数理解析研究所講究録
第316巻 1977年 30-40

ストークス現象

慶応義塾大およびミネソタ大
渋谷 泰隆

1. 記号と約束:

(i) $\mathcal{D}(R)=\{x\in\mathbb{C};\ |x|>R\}$, ここにRは正の数;

(ii) $\mathcal{S}(R)=\{x\in\mathcal{S};\ |x|>R\}$, ここに$\mathcal{S}$は複素平面における角領域;

(iii) n次の正方行列$T(x)$を$T(x)=x^q\sum_{h=0}^{\infty}T_h x^{-h}$のように書いた時は、右辺の級数は形式的なべき級数であって、qは整数(正でもかまわない), T_hはn次の定数行列である; また、このような場合に$T(x)$を形式的な行列とよぶ;

(iv) 各成分が或る$\mathcal{S}(R)$において正則であるようなn次の行列$F(x)$に対して、$A_{sp}(F)=x^q\sum_{h=0}^{\infty}T_h x^{-h}$と書いた時は、$A_{sp}(F)$は$x$が$\mathcal{S}(R)$において$\infty$に近づく場合の$F$の漸近展開を表わす; つまり、すべての自然数Nに対して、$\mathcal{S}(R)$において不等式$\left|F(x)-x^q\sum_{h=0}^{N}T_h x^{-h}\right|\leqq K_N|x|^{q-N-1}$が成り立つような正の数$K_N$が存在する;

(v) n 次の行列 $F(x)$ が下に述べる三つの条件を満足する場合に $F(x) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}(R))$ と書く：

(a) $F(x)$ の各成分は $\mathcal{S}(R)$ において正則である；

(b) $\det F(x) \neq 0 \quad (x \in \mathcal{S}(R))$；

(c) x が $\mathcal{S}(R)$ において ∞ に近づく時，F と F^{-1} はそれぞれ漸近展開 $A_{sp}(F)$，$A_{sp}(F^{-1})$ をもつ。

2. 主要な問題：

線形常微分方程式

$$(E_1) \quad \frac{dy}{dx} = A_1(x)y \qquad と \qquad (E_2) \quad \frac{du}{dx} = A_2(x)u$$

を考える。ここに，y と u は n 次元のベクトル，A_1 と A_2 は n 次の行列であって，各成分はそれぞれ $\mathcal{D}(R_1)$ と $\mathcal{D}(R_2)$ において正則，$x = \infty$ において有理型である。

定義 2.1：　下に述べる二つの条件を満足する n 次の形式的な行列 $T(x)$ が存在する時に，(E_1) と (E_2) は形式的に同値であるという：

(a) $\det T(x) \neq 0$ （形式的なべき級数として）；

(b) 変換 $u = T(x)y$ により (E_1) は形式的に (E_2) になる。

定義2.2： 下に述べる三つの條件を満足するn次の行列$T(x)$が存在する時に，(E_1)と(E_2)は有理型的に同値であるという：

(a) $T(x)$の各成分は$\mathcal{D}(R_3)$において正則，$x=\infty$において有理型である；

(b) $\det T(x) \neq 0 \quad (x \in \mathcal{D}(R_3))$；

(c) 変換 $u = T(x)y$ により(E_1)は(E_2)になる．

注意2.3： $x=\infty$が不確定特異点である場合には，(E_1)と(E_2)が形式的に同値であっても，必らずしも有理型的に同値とは限らない。

主要問題： 形式的な同値関係による同値類のひとつを与え，それを有理型的な同値関係によって分類し，各同値類の特徴付けを与える．このようにすれば，ストークス現象の果たす重要な役割りのひとつを明らかにすることができる．

3. 基本的な準備：

有限ケの角領域$\mathcal{S}_j = \{ x \in \mathbb{C} \; ; \; a_j < \arg x < b_j \}$，$j = 1, \cdots, N$，を固定する．$\{\mathcal{S}_j\}$は下に述べる二つの條件を満足すると仮定する：

(α) $0 < b_j - a_j < \pi$, $j = 1, \cdots, N$;

(β) $\bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{S}_j = \mathbb{C} - \{0\}$.

また，順序の付いた (j, k) に対して，$\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k$ を $\mathcal{S}_{jk}$ で表わす．

<u>定義 3.1</u>： 下に述べる二つの条件を満足する有限ヶの n 次の行列の系 $\{F_{jk}(x)\}$ を $x = \infty$ における<u>漸近的な系</u>とよぶ：

(a) $F_{jk}(x) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_{jk}(R))$ $(\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset)$;

(b) $F_{jh}(x) F_{hk}(x) = F_{jk}(x)$ $(\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_h \cap \mathcal{S}_k \neq \emptyset)$.

<u>定義 3.2</u>： 下に述べる二つの条件を満足する有限ヶの n 次の行列 $P_1(x), \cdots, P_N(x)$ が存在する時に，漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ は <u>$x = \infty$ で trivial</u> であるという：

(a) $P_j(x) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_j(R))$, $j = 1, \cdots, N$;

(b) $F_{jk}(x) = P_j(x)^{-1} P_k(x)$ $(\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset)$.

<u>定義 3.3</u>： 下に述べる二つの条件を満足する有限ヶの n 次の形式的な行列 $Q_1(x), \cdots, Q_N(x)$ が存在する時に，漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ は <u>$x = \infty$ で形式的に trivial</u>

であるという：

(a) $\det Q_j(x) \neq 0$ （形式的なべき級数として），
$j = 1, \cdots, N$；

(b) $A_{sp}(F_{jk}) = Q_j(x)^{-1} Q_k(x) \quad (\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset)$．

<u>補題 3.4</u>： 漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ が条件 $A_{sp}(F_{jk}) = I$ $(\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset)$ を満足すれば，それは $x = \infty$ で trivial である．ここに，I は n 次の恒等行列である．（渋谷［3］の172頁の定理6.4.1を参照．）

<u>定理 3.5</u>： 漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ が $x = \infty$ で trivial であるための必要かつ充分な条件は，それが形式的に trivial なことである．

<u>定義 3.6</u>： 定義3.2の条件(a)と(b)を満足する N ヶの行列 $P_1(x), \cdots, P_N(x)$ を漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ の <u>$x = \infty$ における断面</u>とよぶ．

<u>定理 3.7</u>： 漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ が $x = \infty$ で trivial で，$\{P_j(x)\}$ と $\{\widetilde{P}_j(x)\}$ がそれの二つの断面である場合，下に述べる二つの条件を満足する n 次の行列 $T(x)$ が存在する：

(a) $T(x)$ の各成分は $\mathcal{D}(R)$ において正則，$x=\infty$ において有理型である；

(b) $\tilde{P}_j(x) = T(x)P_j(x) \quad (x \in \mathcal{S}_j(R))$,

$j = 1, ---, N$.

4. ストークス構造：

微分方程式の形式的な同値関係による同値類のひとつを $\mathfrak{a}$ で表わし，$\mathfrak{a}$ に属する微分方程式

$$(E_0) \qquad \frac{dy}{dx} = A_0(x)y$$

を勝手にひとつ選らんで固定する．また，$\mathfrak{a}$ に属する微分方程式を一般に

$$(E) \qquad \frac{du}{dx} = A(x)u$$

で表わす．

定理4.1：与えられた $\mathfrak{a}$ に対して，下に述べる二つの條件を満足する有限ヶの角領域 $\mathcal{S}_1, \cdots, \mathcal{S}_N$ が存在する：

(a) $\{\mathcal{S}_j\}$ は §3 で与えた條件 (α), (β) を満足する；

(b) $\mathfrak{a}$ に属する微分方程式 (E) に対して，下に述べる二つの條件を満足する n 次の行列 $P_1(x), ---, P_N(x)$ が存在する：

(1) $\quad P_j(x) \in A(\mathcal{S}_j(R))$, $\quad j=1, ---, N$；

(2) 変換 $u = P_j(x)y$ は $\mathcal{S}_j(R)$ において (E_0) を (E) に変換する.

<u>注意 4.2</u>: $\{P_j\}$ と R は (E) に依存するが, $\{\mathcal{S}_j\}$ は $\mathfrak{A}$ だけできまる. 定理 4.1 はよく知られている福原-Turrittin の結果を有理べきが表われないように書き直したものである. これから先, <u>$\mathcal{S}_1, \cdots, \mathcal{S}_N$ を固定する</u>.

微分方程式 (E_0) の角領域 $\mathcal{S}_j$ における基本解の行列 $\Phi_j(x)$ <u>を勝手に選らんで固定する</u>.

<u>定義 4.3</u>: 有限ヶの n 次の定数行列の系 $\{C_{jk}\}$ が下に述べる四つの條件を満足する時に, それを<u>ストークス系</u>とよぶ:

(a) $C_{jk} \in GL(n;\mathbb{C}) \qquad (\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset)$;

(b) $C_{jh}C_{hk} = C_{jk} \qquad (\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_h \cap \mathcal{S}_k \neq \emptyset)$;

(c) $\Phi_j(x)C_{jk}\Phi_k(x)^{-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_{jk}(R)) \quad (\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset)$;

(d) 漸近的な系 $\{\Phi_j(x)C_{jk}\Phi_k(x)^{-1}\}$ は $x = \infty$ で trivial である.

<u>定義 4.4</u>: 下に述べる三つの條件を満足する n 次の定数

行列 $C_1, \cdots, C_N$ が存在する時に，<u>ストークス系</u> $\{C_{jk}\}$ <u>と</u> $\{\widetilde{C}_{jk}\}$ <u>は同値である</u>という：

(a) $C_j \in GL(n;\mathbb{C})$, $j=1,\cdots,N$;

(b) $C_{jk}C_k = C_j\widetilde{C}_{jk}$ $\quad (\mathcal{S}_{jk} \neq \phi)$;

(c) $\Phi_j(x)C_j\Phi_j(x)^{-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_j(R))$, $j=1,\cdots,N$.

<u>定義4.5</u>： ストークス系の同値類 $\mathfrak{C}$ を<u>ストークス構造</u>とよぶ。

<u>注意4.6</u>： 定義4.3と定義4.5では，正確には<u>$\mathfrak{A}$に付随したストークス系</u>，<u>$\mathfrak{A}$に付随したストークス構造</u>のように書かねばならないが，簡略にするため，"<u>$\mathfrak{A}$に付随した</u>"をはぶいた。

<u>補題4.7</u>： 定理4.1で与えた行列 $P_j(x)$ を使えば，$P_j(x)\Phi_j(x)$ は $\mathcal{S}_j$ における(E)の基本解の行列になる。したがって，

$$C_{jk} = (P_j\Phi_j)^{-1}(P_k\Phi_k) \in GL(n;\mathbb{C}) \quad (\mathcal{S}_{jk} \neq \phi)$$

となり，しかも $\{C_{jk}\}$ はストークス系である。さらに，$\{C_{jk}\}$ が定めるストークス構造 $\mathfrak{C}$ は $\{P_j(x)\}$ の选らび

方によらない.

定義4.8: 補題4.7で定められたストークス構造を $\mathfrak{C}(E)$ で表わし, 微分方程式(E)のストークス構造とよぶ.

5. 主要な結果:

定理5.1: 勝手に与えられたストークス構造 $\mathfrak{C}$ に対して, $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}(E)$ を満足する $\mathfrak{A}$ の微分方程式(E)が存在する.

定理5.2: $\mathfrak{A}$ の二つの微分方程式 (E_1) と (E_2) が有理型的に同値であるための必要かつ充分な条件は $\mathfrak{C}(E_1)=\mathfrak{C}(E_2)$ が成り立つことである.

定理5.3: 勝手に与えられたストークス構造 $\mathfrak{C}$ に対して,

$$(C) \qquad A_{sp}(\Phi_j C_{jk} \Phi_k^{-1}) = I \qquad (\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset)$$

を満足するストークス系 $\{C_{jk}\}$ が $\mathfrak{C}$ に含まれている.

注意 5.4：

(1) 条件(C)を満足する $\{C_{jk}\}$ をすべて求めて，それらをストークス系の同値関係で分類すれば，すべてのストークス構造が求まる；

(2) ストークス構造の定義は $\{\mathcal{S}_j\}$，(E_0)，$\{\Phi_j\}$ の選び方によるが，どのように選んでも結果は "isomorphic" である；

(3) 特別な選び方は，例えば，G.D. Birkhoff [2] や W. Balser, W.B. Jurkat and D.A. Lutz [1] によって与えられている；

(4) この報告の内容は近々 Bull. AMS に発表される予定である．

文献：

1. W. Balser, W.B. Jurkat and D.A. Lutz, Birkhoff invariants and Stokes' multipliers for meromorphic linear differential equations, Universität Ulm, 1976；

2. G.D. Birkhoff, The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations,

Proc. Amer. Acad. Arts and Sci. 49 (1913), 531-568;
3. 渋谷 泰隆, 複素領域における線型常微分方程式—解析接續の問題—, 紀伊国屋, 1976.