

或る種の拡散方程式の 非定数定常解の安定性について

京大 数理研 俣野 博

§ 1. 序

n 次元空間内に領域 D が与えられているとして、そこにおいて次の方程式を考えよう。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + u g(u). \quad (\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, d > 0)$$

ここで未知変数 $u(x, t) \equiv u(x_1, \dots, x_n, t)$ を例えばプランクトン等の生物の場所 $x \in D$ 時刻 $t \geq 0$ における個体数(密度)と解釈するならば、上の方程式は、領域 D 内をランダムに動き回りながら出生死亡を繰り返しているこの生物の時々刻々の分布状況の推移を記述していると見なすことができる。

そのとき d は拡散係数、 $g(u)$ は増殖係数となるわけで、いずれも考えている生物自身の特性及びいくつかの適当な環境因子によって決定されるものであるが、本稿では d が定数で g が u のみに依存し、 x や t に無関係な場合を扱う。 言うな

らば場所や時間で変化しない一定の環境の下での繁殖状況を考察するわけである。また、 D の境界は反射壁であるとする。すなわち u には0-Neumann境界条件を課す。これにより、 D は外界と交渉を持たない孤立した領域と考えることができる。

さて、この生物の個体数密度の分布がある平衡状態 $u(x)$ に落ち着いたと想定しよう。すると $u(x)$ は、方程式

$$d\Delta u + u g(u) = 0$$

と所定の境界条件 $\partial u / \partial n = 0$ を満足するであろう。しかし注意しなければならないのは、この境界値問題を数学的に解いて得られる任意の解が必ずしも現実の平衡状態と対応しているわけではないことである。絶えず微小な擾乱の生じている自然界では、平衡状態が文字通り平衡状態として存続するためにはそこに或る意味での安定性が要求される。つまり、上の境界値問題の「安定な」解のみが現実の平衡状態に対応していると考えられるわけである。従って、上の境界値問題が解を持つか否かを単に云々するよりも、安定な解を持つかどうか、また、もし持つとすればそれは具体的にどのような形をしているのか、等を調べることの方が重要な課題となってくる。本稿ではもう少し方向をしぼり、上の境界

値問題の安定な解で定数でないものが存在するかどうかを議論することにしよう。言い換えれば、時間的にも場所的にも均一な環境のもとで、不均一な平衡状態が果たして実現可能なかどうかを検討してみることにする。

近年 Gierer-Meinhardt、三村、その他の研究で指摘され始めているように、連立の拡散方程式系の場合には、均質な環境の下で比較的単純な初期データから出発しているにもかかわらず複雑な形の（安定な）平衡状態に到達するようなことが往々にして起こる。いわゆる patchiness なる現象で、これは2種以上の生物（その他取り扱っている対象）同士の競争に起因すると考えられるが、同じようなことが単一種の生物しか存在しない場合にも起こり得るだろうか？

Patchiness とまでいかなくとも、少なくとも flat でないような（安定な）平衡状態が存在し得るかどうかを確かめてみたい。空間の次元を1に限った場合には答は否定的であることが1975年に N. Chafee [1] に報告されている。その報告によれば、 $n=1$ ならば関数 g が如何なるものであれ上の境界値問題の安定な解は定数に限る。同じ結果は三村昌泰氏によっても独立に証明された。そこで、本稿では一般の n 次元空間の場合を考察する。結論から言えば、 $n \geq 2$ のときには上の境界値問題は場合によっては安定な非定数解を持

つ。そしてそのような解が存在するかどうかは領域 D の形状に大きく依存するのである。例えば D が凸領域なら決してそのような解は存在しないし、大きくくびれたヒョウタン型の領域ならしばしば存在する。以下、§2 で問題を精確に設定し、§3、§4 で領域の形状と安定な非定数解の存在との関連を論ずる。

§2. 問題の設定

D を n 次元ユークリッド空間 R^n の有界領域とし、その境界 ∂D は十分滑らかなものとする。問題を一般的に取り扱うため、§1 で $u g(u)$ の形をしていた非線型項を単に $f(u)$ と改める。また、座標変数を定数倍する座標変換により、 $d=1$ と正規化しておく（この変換は Neumann 境界条件を損わない）。すると §1 で最初に与えた拡散方程式は、次の形の初期値境界値問題になる。

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) & \text{in } D \times (0, S) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \times (0, S) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } D \end{cases}$$

ここで \bar{D} は D の閉包、 $\partial/\partial n$ は外向き法線微分を表わす。
 初期データ u_0 は連続関数の空間 $C(\bar{D})$ の中から選ぶ。そして S の値は、(2.1) の解が有限時間で爆発する場合にはその時刻に、爆発しない場合には $S = \infty$ としておく。(その値は一般に初期データ u_0 に依存するので $S(u_0)$ と書く) ところで関数 $v = v(x)$ が (2.1) の定常解であるとは、それが次の境界値問題を満たすことをいう。

$$(2.2) \quad \begin{cases} \Delta v + f(v) = 0 & \text{in } D \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

さて安定性の定義に移ろう。

定義 (2.2) の解 v が安定であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次のような $\delta > 0$ が存在することをいう。

" $\|u_0 - v\|_\infty < \delta$ なる $\forall u_0 \in C(\bar{D})$ に対し、 $S(u_0) = \infty$ であり、更に u_0 を初期データとする (2.1) の解 u は $0 \leq t < \infty$ において

$$\|u(\cdot, t) - v\|_\infty < \varepsilon$$

を満足する。($\|\cdot\|_\infty$ は D における \sup ノルム) "

本来 $f(u)$ は、対象となる生物の特性及びいくつかの環境因

子に応じて領域の形状とは殆ど無関係に定まっているであろうから、考える順序としては、まず $f(u)$ が具体的に与えられたものとして次に領域 D を色々変えてみて、それが如何なる形状の場合に (2.2) は安定な非定数解を持ち如何なる場合に持たないか、を調べてゆきたいところである。しかしこの方向の研究が満足ゆくところまで進んでいないので、ここでは若干趣向を変えて、次のように問題を設定する。

問題 A. 関数 f が如何にあれ、(2.2) が決して安定な非定数解を持たないような領域 D としてはどのようなものがあるか。

問題 B. (2.2) が安定な非定数解をもつための、領域 D と関数 f に対する十分条件を求めること。

問題 B'. 関数 f を適当に選べば (2.2) が安定な非定数解を持つようにできる領域 D にはどのようなものがあるか。

問題 A と B' とはちょうど互いに逆の内容になっている。

A に該当する領域の例として 1 次元の有界開区間が Chafee によって報告されていることは既に述べた。関心のあるのは $n \geq 2$ の場合である。これに該当する領域においては、対象とする生物の特性ないし環境因子がはっきりしなくて関数 $f(u)$ が未知であろうとも、不均質な平衡状態が決して実現され得ないことがア・プリアリに結論できる。(無論、話は

(2.1)の方程式で記述されるモデルに限っている) 問題Aは§3で、問題BおよびB'は§4で論ずる。

§3. 安定な非定数解が存在し得る領域

まず、具体的にいくつかの領域の型を掲げる。

[Type 1] $n \geq 1$. D は有界凸領域

[Type 2] $n \geq 2$. D は $n-1$ 次元有界凸領域の回転体
(回転軸と D は共通部分を持たない)

[Type 3] $n \geq 2$. $D = \{x \in \mathbb{R}^n; r_1 < |x| < r_2\}$
(ここで $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$)

$n=2$ の場合には、Type 2とType 3はともに円環領域を意味している。しかし $n \geq 3$ の場合には、Type 1~3の表わす領域の型はすべて相異なる。

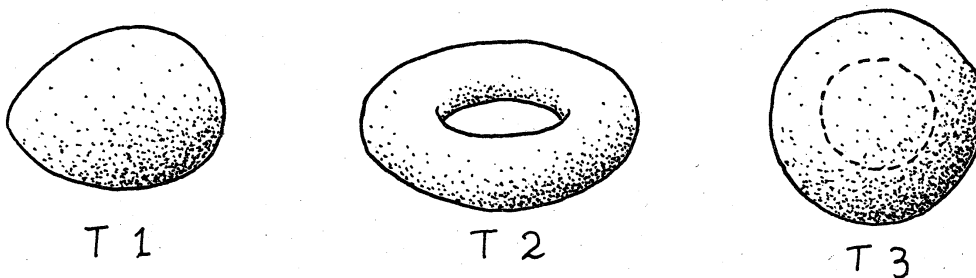


図1. $n=3$ のときの各typeの領域の例

この節の眼目となる定理を述べる。

定理 A DCR^n は Type 1~3 のいずれかに属し、その境界は十分滑らかであるとする。また、 f は C^2 級の関数とする。このとき、(2.2) の定数でない解はすべて不安定である。

R^1 の有界開区間は Type 1 に属するから、上の定理は Chafee の結果を含んでいる。本稿では Type 1 の場合に限って証明の概略を述べる。詳しくは [2; Th.5.1] を参照されたい。

略証 (Type 1 の場合)

v を (2.2) の非定数解とする。周知のように、 v の不安定性を言うには、固有値問題

$$\begin{cases} \Delta \varphi + f'(v(x)) \varphi = -\lambda \varphi & \text{in } D \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

の最小固有値 λ_1 が負であることを示せば十分である。そして、 $\lambda_1 < 0$ なることと、 $\mathcal{H}(\varphi) < 0$ なる $\varphi \in H^1(D)$ が存在することとは同値である (ここで、 $\mathcal{H}(\varphi) \equiv \int_D \{|\nabla \varphi|^2 - f'(v)\varphi^2\} dx$)。よって、このような φ を見つけてくれればよい。ところで、グリーンの公式より

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{H}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n} |\nabla v|^2 dS \quad \left(\begin{array}{l} dS \text{ は} \\ \text{境界積分変数} \end{array} \right)$$

この右辺は、 D が凸なることと v が境界条件 $\partial v / \partial n = 0$ を満足する事実を用いて ≤ 0 であることが示される。 v は定数ではなかったから、ある整数 k , $1 \leq k \leq n$ が存在して、

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) \leq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_k} \neq 0$$

を満足する。このことから $\lambda_1 \leq 0$ なることがわかる。更に $\lambda_1 \neq 0$ なることは、固有値 λ_1 が simple である事実と再び v が定数でないことを利用して結論される。(略証終わり)

§4. 安定な非定数解が存在し得る領域

まず問題 B と取り組む。真ん中でくびれたジョウタン型の領域なら安定な非定数解が存在し得るだろうと考えたのは、次のような発想による。初めに独立した二つの領域 O_1, O_2 を与え、それぞれにおいて (2.1) の解 u は flat な平衡状態にあるとする (すなわち

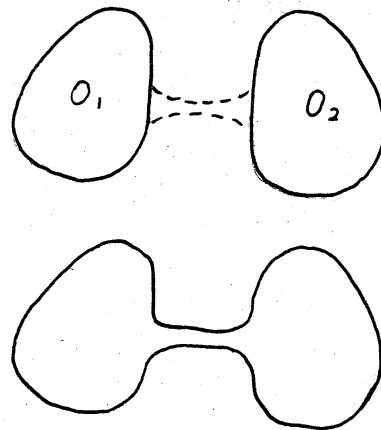


図 2.

(2.2)の安定な定数解が、 $D=O_1$ 、 $D=O_2$ に対してそれぞれ与えられているとする)。そして、その平衡点(=定数解の値)は O_1 と O_2 とは異なるものとしておく。すると形式的には $D=O_1 \cup O_2$ に対して(2.2)の安定な非定数解が得られたわけだが、 $O_1 \cup O_2$ は連結でないから領域とは言えず、従ってこのままでは問題Bに応えたことにならない。そこで、 O_1 と O_2 とを細いパイプでつないでやる(図2)。こうしたものを D とおけば、 D は領域である。しかもパイプの幅を十分小さくしておけば、その流通が非常に悪いために、パイプを通す前の状態と比べて密度 u の分布に殆ど変動は生じないと想像される。だからこのまま時間がたてば、全体の様相にさしたる変化をきたさないうちに新領域 D における平衡状態が実現されるであろう。それは、もとの領域 O_1 、 O_2 における平衡点が変わっていたことから、flatでない平衡状態であろう。つまり、この領域 D に対して(2.2)の安定な非定数解が得られたわけである。(もっとも、パイプを通したことで生ずるわずかな変動が長い時間蓄積していった結果的に全体の様相が大きく変化し、ために D において得られた平衡状態がflatになっていることもあるのではないかという疑問も起こり得ようが、最初 O_1 、 O_2 においては安定な平衡状態にあったのだから、平衡状態それ自身の持つ「復元力」によ

って変化が大きくなってゆくのがある程度食い止められると
考えられる。))

さて、上のような発想で
非定数解が構成されるため
には、まず二つの相異なる
安定な平衡点が存在してい
なければいけない。つまり、
 f の 0 点で (2.2) の解とし
て安定なものが少なくとも
二つなければならぬ。

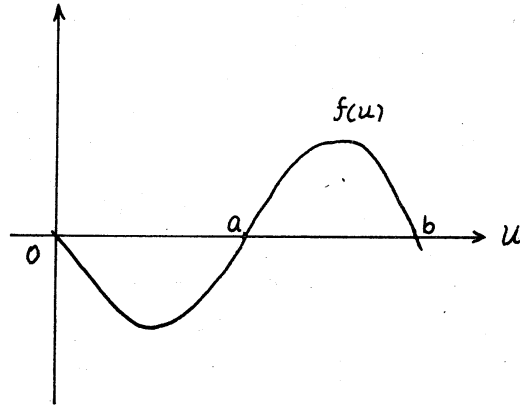


図 3. $f(u)$ のグラフ

図 3 に、そのような関数 f の典型的な例を掲げた。この場
合は、 $u=0$ 、 $u=b$ が安定で、 $u=a$ が不安定である。こ
の節では以下、 f は図 3 のようなものに限るとする。詳し
く言えば、

f に関する条件

- f は C^2 級滑らか。
- $f(0) = f(a) = f(b) = 0$. (ここで $0 < a < b$)
- $0 < u < a$ で $f(u) < 0$,
- $a < u < b$ で $f(u) > 0$.

同じく D の形も規定しておく。本稿では簡単のために空

間次元が2次元の場合だけを考えるが、一般の n 次元空間($n \geq 2$)においても事情は本質的に異なるない。

Dに関する条件

- D は有界で、その境界は十分滑らか。
- 図4のように、 D は領域 O_1, O_2 と、それらを結ぶ長さ l のパイプからなる。

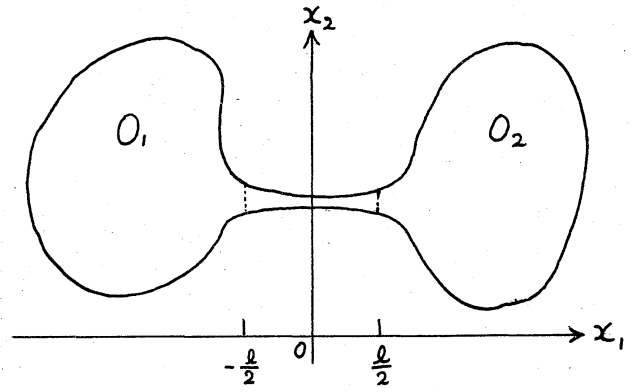


図 4

- パイプの幅は d を越えない。すなわち、その境界が2曲線 $x_2 = \psi_1(x_1)$, $x_2 = \psi_2(x_1)$ で表わされたとすると、不等式 $0 < \psi_1(x_1) - \psi_2(x_1) \leq d$ が $-\frac{l}{2} \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$ の範囲で成立する。

その他の記号

$\mu(\Omega)$: Ω の面積

$\lambda(\Omega)$: Ω における Neumann 境界条件下での $-\Delta$ の第2固有値 (正の最小固有値)

$$k = \sup_{0 \leq u \leq b} \frac{|f(u)|}{|u-a|}$$

$$F_1 = -\int_0^a f(u) du, \quad F_2 = \int_a^b f(u) du$$

さて、§2に述べた問題Bに対するひとつの解答として、次の定理がある。

定理 B 領域 D 、関数 f は上の通りとし、 $F_2 \geq F_1$ とする。更に、 O_1, O_2 の部分領域 D_1, D_2 があって、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b^2}{2l} + F_2 l \right) d \\ & \leq F_2 \min \left\{ \mu(D_1) \min \left\{ 1, \frac{\lambda(D_1)}{k} \right\}, \mu(D_2) \min \left\{ 1, \frac{\lambda(D_2)}{k} \right\} \right\} \\ & \quad - (F_2 - F_1) \mu(O_1) \end{aligned}$$

が成立するとする。このとき、(2.2)の解 v で次の性質をもつものが存在する。

○ v は安定である。

○ $\int_{D_1} \{v(x) - a\} dx < 0$, $\int_{D_2} \{v(x) - a\} dx > 0$

注 1. 最後の不等式から v は定数でないことがわかる。

注 2. $F_2 < F_1$ の場合には、条件の不等式において、 F_1 と F_2 および $\mu(O_1)$ と $\mu(O_2)$ を入れ替えば同じ結果が成り立つ。

定理Bの証明は省略する。詳しくは [2; Cor. 6.3] 参照

のこと。ところで、 l の値を固定したまま f を色々変えたときの F_2 のとり得る上限は $ka^2/2$ であることを考えて、次の三条件を満たす f を選んでみる。

$$\circ b = 2a$$

$$\circ F_1 = F_2 = (1-\varepsilon) \frac{ka^2}{2} \quad (\varepsilon \ll 1)$$

$$\circ k = \pi^2/h^2 \quad (h > 0)$$

また、 D_1 および D_2 としては、ともに一辺 h の正方形をとる。このとき $\mu(D_i) = h^2$, $\lambda(D_i) = \pi^2/h^2$ ($i=1,2$) だから、定理 B の最初の不等式は次のような形になる。

$$\left(\frac{2}{l} + \frac{1-\varepsilon}{2} \cdot \frac{\pi^2}{h^2} l \right) d \leq \frac{1-\varepsilon}{2} \pi^2$$

ここで $\varepsilon > 0$ は任意に小さくとれるから、結局次の系を得る。これは問題 B' に応えるものである。

系. D はこの節の初めに述べた通りとし、更に O_1, O_2 には一辺 h の正方形が含まれ得るとする。このとき、

$$d < \frac{l}{(l/h)^2 + (2/\pi)^2}$$

ならば (2.2) は安定な非定数解を持つ。

同じく問題 B' に応えるものとしては、次の結果が更に精密

である。証明は [2; Th. 6.2] を用いてできる。

定理 B' D はこの節の初めに述べた通りとし、更に O_1 、 O_2 には一辺 h の正方形が含まれ得るとする。このとき、

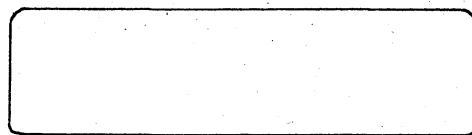
i) $l \geq h$ かつ $d < h$

ii) $l < h$ かつ $d < \frac{l}{(l/h)^2 + (2/\pi)^2 \theta \cot \theta}$ ($\theta = \frac{\pi l}{2h}$)

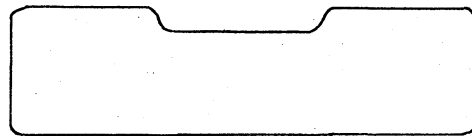
のいずれかが成立するならば、(2.2) は安定な非定数解を持つ。

注 3. 図 4 にはパイプが一本しかない場合を示したが、二本以上あっても一向にかまわれない。その際には d は、それらのパイプの幅の和の上限にとる。

図 5 に具体的な領域の例を示した。(a) および (c) の領域では定理 A より (2.2) の安定な非定数解は決して存在せず、(b)、(d) の領域においては適当に関数 f を選べばそのような解が存在することが



(a)



(b)

定理B'よりわかる。

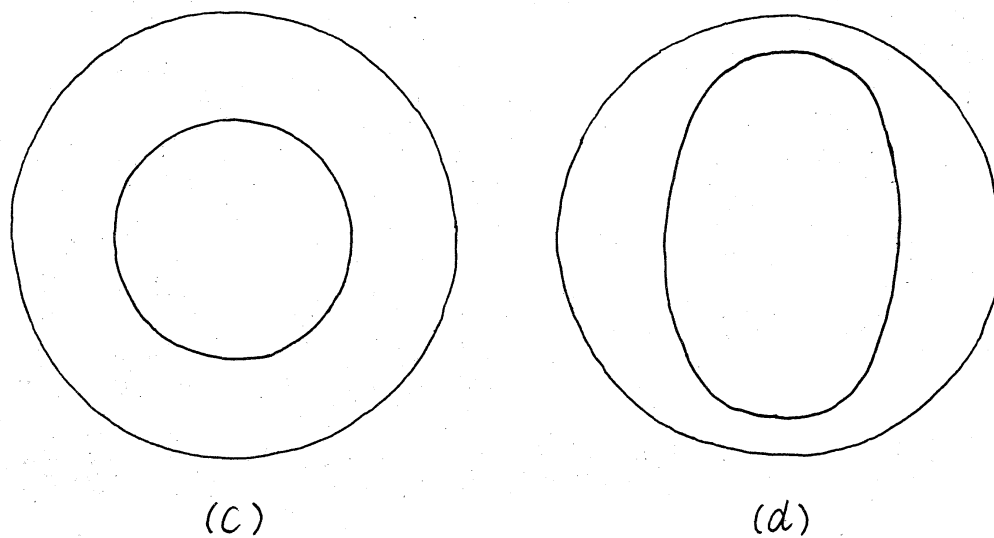


図 5

参考文献

- [1] Chafee, N., Asymptotic behavior for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions, J. Differential Equations, 18 (1975), 111-134.
- [2] Matano, H., Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations, Publ. RIMS, to appear.