数理解析研究所講究録
第318巻 1978年 1-26

Augmented Schottky Spaces

静大・理　佐藤宏樹

§0. 序文

タイヒミュラー空間に関しては美しい理論が数多く知られている。たとえば，その境界は b-groups により表現されるということ，更にその一部 regular b-groups をタイヒミュラー空間に付け加えて augmented タイヒミュラー空間を構成し，moduli の空間のコンパクト化に成功している。これに反し，Schottky 空間，Schottky 群については研究はそこまで進んでいない。Akaza，Chuckrow，Marden，Maskit，Bers，Zarrow 等による研究はあるがまだまだ十分とはいえない。たとえば自然な意味で augmented Schottky space が定義されていないこと，それを利用しての moduli の空間のコンパクト化がなされていないことなどがある。しかし，Schottky 空間もタイヒミュラー空間とよく似た性質をもつのではないか又場合によってはかえって便利な性質があるのではないかという考えが当然生ずるであろう。まずタイヒミュラー空間の

方でいえることが Schottky 空間の方でもいえないかということから始める。これに関しては Bers [2] に於いて Bers の意味での augmented Schottky space が導入され，その fiber space 上の保型形式が研究された。ここで Bers の意味での augmented Schottky space とは，Schottky space に non-dividing nodes をもつリーマン面を表わす拡張された Schottky 群を付け加えた空間であり，使用された座標は従来の (λ, p, q) 法である。この方法では dividing nodes をもつリーマン面を表わす拡張された Schottky 群を表わすことは困難であり，このような Schottky 群を付け加えないことには augmented タイヒミュラー空間に対応させえないことは明らかである。ここで従来の座標の導入が自然なものかどうかという疑問が生ずる。

我々は今回次の性質をもつ新しい座標の導入から始める。

(i) 同値な Schottky 群，即ち Möbius 変換による conjugation により互いにうつされる2つの Schottky 群は同一の座標をもつ。(ii) この座標の各元は具体的な意味をもつ。(iii) 自然な方法で augmented Schottky space を定義することができる。

性質 (i) は §2 で，性質 (ii) は §6 で説明される。性質 (i) により augmented Schottky space の fiber space 上の保型形式の考察が自然に行なわれ，augmented タイヒミュラー空間よ

りも便利なことも分る。

ここで述べる結果は Sato [7] に含まれており，Sato [8] では augmented Schottky spaces の fiber spaces 上の保型形式を扱っている。更にここで導入した座標を用いることにより Marden [4], Zarrow [10] の結果，即ち Schottky 群ではあるが classical Schottky 群ではない群の存在，classical Schottky space が連結なることが容易に示される。これは classical Schottky spaces の研究である Sato [9] の中に含まれる。更に moduli の空間の compact 化への応用もある。

§1. 定義と例.

1-1. Schottky 群の定義. $C_1, C_1', \cdots, C_g, C_g'$ を次の性質をみたすリーマン球上の $2g$ 個 $(g \geq 1)$ の互いに disjoint な Jordan curves とする。(i) $C_1, \cdots, C_g'$ は $2g$ 重連結領域 D の境界，(ii) $A_j(C_j) = C_j'$, $A_j(D) \cap D = \emptyset$ $(j = 1, 2, \cdots, g)$ なる Möbius 変換 $A_1, \cdots, A_g$ が存在する。このとき $G = \langle A_1, \cdots, A_g \rangle$ を <u>(marked) Schottky group</u> といい，D を G の<u>基本領域</u>，$C_1, C_1', \cdots, C_g, C_g'$ を G の <u>defining curves</u> という。

1-2. Schottky space の定義. 2つの Schottky 群 $G = \langle A_1, \cdots, A_g \rangle$ と $\hat{G} = \langle \hat{A}_1, \cdots, \hat{A}_g \rangle$ が同値であるとは，$TA_jT^{-1} = \hat{A}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, g)$ なる Möbius 変換 T が存在するとき。

genus g の marked Schottky groups の同値類全体の集合 $\mathfrak{S}_g$ を (normalized) <u>Schottky space</u> という。

1−3. 座標. $G = \langle A_1, \cdots, A_g \rangle$ を marked Schottky 群とする。λ_j $(|\lambda_j| > 1)$, p_j, q_j をそれぞれ A_j の multiplier, repelling fixed point, attracting fixed point とする。このとき $p_1 = 0$, $q_1 = \infty$, $p_2 = 1$ と正規化するとき $\tau \in \mathfrak{S}_g$ を

$$\tau = (\lambda_1 ; \lambda_2, q_2 ; \lambda_3, p_3, q_3 ; \cdots ; \lambda_g, p_g, q_g) \in \mathbb{C}^{3g-3}$$

と表わすことができる。この座標は Schottky space の境界を考えるとき，不明瞭な部分を含むことを論文 [6] で例をもって指摘した。そしてその論文に於いて座標を正規化しない形で導入した。即ち

$$\tau = (\lambda_1, p_1, q_1 ; \cdots , \lambda_g, p_g, q_g) \in \hat{\mathbb{C}}^{3g} \quad (\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$$

に対応する G_τ が Schottky 群となる τ 全体を $\tilde{\mathfrak{S}}_g$ とした。そしてこの $\tilde{\mathfrak{S}}_g$ を Schottky space とした。$\tilde{\mathfrak{S}}_g$ の境界点 τ_0 とは $\tau_n \in \tilde{\mathfrak{S}}_g$ で $\tau_0 \notin \tilde{\mathfrak{S}}_g$ なる点として定義した。τ_0 又は τ_0 に対応する群 G_{τ_0} が <u>cusp</u> とは G_{τ_0} が parabolic な変換を含むときいう。ここでこの定義も又完全ではないことを例をもって示す。

1−4. 例.

$$A_{r,n}(z) = \frac{\left(1 + \frac{r}{n}\right) z + \left(\frac{2}{n} + \frac{r}{n^2}\right)}{r z + \left(1 + \frac{r}{n}\right)} , \quad B_{r,n}(z) = \frac{7z - 29}{z - 4}$$

とおく。$G_{r,n} = \langle A_{r,n}(z), B_{r,n}(z) \rangle$ は Schottky 群である。

$G_{r,n}$ に対応する $\hat{\mathbb{C}}^6$ の点を $\tau_{r,n}$ とすれば,

$$\tau_{r,n} = \left(1+\frac{4r}{n}+\frac{2r^2}{n^2}+\sqrt{\frac{4r}{n}\left(2+\frac{5r}{n}+\frac{4r^2}{n^2}+\frac{r^3}{n^3}\right)},\ -\sqrt{\frac{2n+r}{rn^2}},\right.$$
$$\left.\sqrt{\frac{2n+r}{rn^2}}\ ;\ \frac{7+3\sqrt{5}}{2},\ \frac{11-\sqrt{5}}{2},\ \frac{11+\sqrt{5}}{2}\right).$$

r を固定して $n\to\infty$ とすれば,

$$A_{r,\infty} = \lim_{n\to\infty} A_{r,n} = \frac{z}{rz+1},$$

$$\tau_{r,\infty} = \lim_{n\to\infty}\tau_{r,n} = (1,0,0;*,*,*)$$

となる。即ち $\tau_{r,\infty}$ は cusp である。一方 n を固定して,

$r\to\infty$ とすれば, $A_{r,\infty} = \frac{1}{n}$,

$$\tau_{\infty,n} = \lim_{r\to\infty}\tau_{r,n} = \left(\infty, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}; *,*,*\right)$$

となる. 即ち $\tau_{\infty,n}$ は node である (定義は [6] をみよ)。

更に $\lim_{r\to\infty}\tau_{r,\infty} = (1,0,0;*,*,*)$, $\lim_{n\to\infty}\tau_{\infty,n} = (\infty,0,0;*,*,*)$ を得る。即ち次の図は可換図ではない。

$$\begin{tikzcd}
\tau_{r,n} \arrow[r, "n\to\infty"] \arrow[d, "r\to\infty"'] & \tau_{r,\infty} \arrow[d, "r\to\infty"'] \\
\tau_{\infty,n} \arrow[r, "n\to\infty"] & \tau_{\infty,\infty}.
\end{tikzcd}$$

上図の右の列を考えれば, 境界点 $(1,0,0;*,*,*)$ の表わす等角同値でないリーマン面が無限個あることが分る。このことは定義の不十分さを示している。ここでは全く新しい座標を導入し, Schottky space にある境界点を付け加えた augmented Schottky space を考える。

1−5. nodesもちのリーマン面. nodesもちの閉リーマン面Xとは，次の様なcompact complex spaceのことである。Xの各点Qは$\mathbb{C}$内の$|z|<1$とisomorphismな近傍をもつ($Q \leftrightarrow z=0$)又は$\mathbb{C}^2$内の$|z|<1$, $|w|<1$, $zw=0$とisomorphismな近傍をもつ。後者の場合をnodeという。$X\setminus\{\text{nodes}\}$の各成分を$X$のpartsという。nodesを2種類に分ける。(i) リーマン面Xをそのnodeで切りはなしたとき，なおXは連結であるとき，non-dividing nodeという。(ii) Xをそのnodeで切りはなしたとき，Xが2つの部分に分離されるとき，dividing nodeという。

ここに於いて我々はdefining curvesに対応する高々g個のnon-dividing nodesと，高々$2g-3$個のdividing nodesをもつnodesもちのリーマン面を考え，それを表わす拡張されたSchottky群をSchottky spaceに付け加えた空間を考える。

§2. 座標の導入.

この節では，論文[7], [8], [9]で基本的な役割をはたす座標を与に導入し，これを用いてaugmented Schottky spaceを定義する。

marked Schottky group $G=\langle A_1, \cdots, A_g\rangle$を与える。このとき$\Omega(G)/G=S$はmarked Riemann surfaceである。

ここで $\Omega(G)$ は G の discontinuity の region である。$C_1, C_1', \cdots, C_g, C_g'$ を G の defining curves とし，$\alpha_1, \cdots, \alpha_g$ を $C_1, \cdots, C_g$ に対応する S 上の non-dividing loops とする。$2g-3$ 個の dividing loops $\gamma_1, \cdots, \gamma_{2g-3}$ を S 上次の様に選ぶ。(i) $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2g-3}, \alpha_1, \cdots, \alpha_g$ は互いに disjoint である，(ii) $\gamma_1 \cdots, \gamma_{2g-3}, \alpha_1, \cdots, \alpha_g$ は S 上の homotopically independent loops である。$\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \gamma_1, \cdots, \gamma_{2g-3}$ の順序を固定する。これから導入する新しい座標は loops の選び方，その順序に依存していることに注意する。

$\mathfrak{S}_g$ の点 $\tau \leftrightarrow G = \langle A_1, \cdots, A_g \rangle$ は新しい座標により

$$\tau = (t_1, \cdots, t_g ; \rho_1, \cdots, \rho_{2g-3}) \in \mathbb{C}^{3g-3}$$

と表わされる。ここで t_j, ρ_j は次の様に定義される。

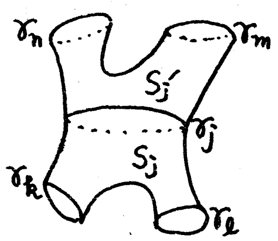
$$t_j = 1/\lambda_j \qquad (j=1,2,\cdots,g)$$

ここで λ_j $(|\lambda_j|>1)$ は A_j の multiplier である。従って $0<|t_j|<1$ 。次に ρ_j を定義する。$I=\{1,2,\cdots,g\}$, $J=\{1,2,\cdots,2g-3\}$ とおく。loops $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2g-3}$ により S を分割すれば $2g-2$ 個の部分に分けられる。そのうち g 個は type $(1,1)$ のリーマン面であり，$g-2$ 個は type $(0,3)$ のリーマン面である。ここで type (g,n) のリーマン面とは genus が g で holes の個数が n の開リーマン面である。

(i) $J_1 \subset J$ を次の様な部分集合とする。γ_j が type $(1,1)$

のリーマン面の境界であるような $j \in J$ の集合。便宜上 $J_1 = \{1, 2, \cdots, g\}$ とする。このときこのリーマン面は non-dividing loop α_j を含んでいる。Möbius 変換 T_j を $T_j(P_j, q_j, P_{j-1}) = (0, \infty, 1)$ により定義する。ここで $P_0 = P_g$。ρ_j を $\rho_j = T_j(P_{j+1})$ により定義する。ここで $P_{g+1} = P_1$。この ρ_j を γ_j に対応する数という。

(ii) $j \in J \setminus J_1 = \{g+1, \cdots, 2g-3\}$ とする。γ_j はこのとき2つの type (0,3) のリーマン面の共通の境界である。リーマン面を S_j, S_j' とする。γ_j の基本領域 $\omega(G)$ への持ちあげを $\tilde{\gamma}_j$ と表わす。



左図の如く S_j, S_j' の境界曲線を γ_k, γ_l, γ_m, γ_n とする。それらの $\omega(G)$ への持ちあげをそれぞれ $\tilde{\gamma}_k$, $\tilde{\gamma}_l$, $\tilde{\gamma}_m$, $\tilde{\gamma}_n$ とする。$\tilde{\gamma}_k$, $\tilde{\gamma}_l$, $\tilde{\gamma}_m$ $\tilde{\gamma}_n$ の内部にある G の defining curves をそれぞれ $C_{k,1}, C'_{k,1}, \cdots, C_{k,\tilde{k}}, C'_{k,\tilde{k}}$; $C_{l,1}, \cdots, C'_{l,\tilde{l}}$; $C_{m,1}, \cdots, C'_{m,\tilde{m}}$; $C_{n,1}, \cdots, C'_{n,\tilde{n}}$ とする。Möbius 変換 T_j を $T_j(P_{k,1}, P_{l,1}, P_{n,\tilde{n}}) = (0, \infty, 1)$ により決め，ρ_j を $\rho_j = T_j(P_{m,1})$ により定義する。この ρ_j を loop γ_j に対応する数という。

<u>Proposition 1.</u> 上で定義された t_i, ρ_j ($i = 1, 2, \cdots, g$; $j = 1, 2, \cdots, 2g-3$) は Möbius 変換による conjugation の下で不変である。

証明は容易である．[7] を参照。

$D=\{z\,;\,|z|<1\}$ とおけば $\tau\in\mathfrak{S}_g$ のとき

$\tau=(t_1,\cdots,t_g\,;\,\rho_1,\cdots,\rho_{2g-3})\in D^{*g}\times(\mathbb{C}-\{0,1\})^{2g-3}$

となる。

逆を考える。即ち

$\tau=(t_1,\cdots,t_g\,;\,\rho_1,\cdots,\rho_{2g-3})\in D^{*g}\times(\mathbb{C}-\{0,1\})^{2g-3}$

を与えたとき，λ_j, p_j, q_j $(j=1,\cdots,g)$ が一意的に決まること示す。但し $p_1=0$，$q_1=\infty$，$p_g=1$ と正規化しておく。

(i) $p_2=\rho_1$ とおくことにより p_2 を決める。

(ii) $p_3,\cdots,p_{g-1}$ を $J\backslash J_1$ の元に対応する γ_j を用いて決めることができる。詳細は [7] を参照。

(iii) 最後に $q_2,\cdots,q_g$ を J_1 の $g-1$ 個の元に対応する γ_j を用いて次の様に決める。 $T\in$ Möb（Möbius 変換の集合）を $T(p_j, p_{j-1}, p_{j+1})=(0,1,\rho_j)$ により決める。ここで $p_0=p_g$ と約束する。$q_j=T^{-1}(\infty)$ とおくことにより q_j を決める。

$\lambda_j=1/t_j$ $(j=1,2,\cdots,g)$ とおくことにより λ_j を定義する。従って $\mathfrak{S}_g$ の元 τ を与えれば，この τ に対応する群 $G_\tau=\langle A_1,\cdots,A_g\rangle$ が一意的に決まる。しかし一般に上の方法で構成された $G_\tau=\langle A_1,\cdots,A_g\rangle$ は Schottky 群になるか否かは分らない。G_τ が Schottky 群になるて全体を $\mathfrak{S}_g$ とかいてもよい。

§3. Augmented Schottky space.

ここでは Bers [2] の augmented Schottky space の拡張を定義する。$I\subset\{1,2,\cdots,g\}$，$J\subset\{1,2,\cdots,2g-3\}$ とおく。$\delta^{I,J}\mathfrak{S}_g\subset\mathfrak{S}_g\cup\partial\mathfrak{S}_g$ を次の様に定義する。

(i) $I=J=\phi$ のとき，$\delta^{\phi}\mathfrak{S}_g=\mathfrak{S}_g$ と定義する。

(ii) $I\neq\phi$，$J=\phi$ のとき，$\delta^{I,\phi}\mathfrak{S}_g=\delta^{I}\mathfrak{S}_g$ を次の様に定義する。次の性質をみたす

$$\tau=(t_1,\cdots,t_g\,;\,\rho_1,\cdots,\rho_{2g-3})\in D^g\times(\mathbb{C}-\{0\})^{2g-3}$$

の全体が $\delta^{I}\mathfrak{S}_g$ である。ここで $D=\{|z|<1\}$。

(1) $t_i=0$, $i\in I$; $t_i\neq 0$, $i\notin I$，(2) $\rho_j\neq 1$, $j=1,2,\cdots,2g-3$。前節と同様の操作により，$\rho_j\neq 1$ $(j=1,2,\cdots,2g-3)$ であるから τ より $\hat{\tau}=(t_1,0,\infty\,;\,t_2,p_2,q_2\,;\cdots;\,t_g,1,q_g)$ を一意的に決めることができる。従って $i\notin I$ に対し multiplier が $1/t_i$，fixed points が p_i, q_i になる Möbius 変換 $A_i(\tau,z)$ が一意的に定まる。(iii) $A_i(\tau,z)$, $i\notin I$, は Schottky 群（これを G_τ とかく）を生成する。(iv) p_i, q_j, $i,j\in I$, はすべて distinct である。(v) p_i, q_j, $i,j\in I$, は G_τ の適当な基本領域の内部にある。

(iii) $J\neq\phi$，$I=\phi$ の場合，$\delta^{\phi,J}\mathfrak{S}_g=\hat{\delta}^{J}\mathfrak{S}_g$ を定義する。$J=\{j_1,\cdots,j_m\}\subset\{1,2,\cdots,2g-3\}$ とする。$\hat{\delta}^{J}\mathfrak{S}_g$ は次の性質をみたす

$\tau=(t_1,\cdots,t_g;\rho_1,\cdots,\rho_{2g-3})\in D^{*g}\times(\mathbb{C}-\{0\})^m\times(\mathbb{C}-\{0,1\})^{2g-3-m}$
の集合である。(1) $t_i\neq 0$, $i\in\{1,2,\cdots,g\}$, (2) $\rho_j=1$, $j\in J$; $\rho_j\neq 1$, $j\notin J$。 $\tau_0\in\mathfrak{S}_g$ とする．compactリーマン面 $S_{\tau_0}=\Omega(G_{\tau_0})/G_{\tau_0}$ 上のJに対応するloopsを $\gamma_{j_1},\gamma_{j_2},\cdots,\gamma_{j_m}$ とする。S_{τ_0} をこの $\gamma_{j_1},\cdots,\gamma_{j_m}$ により $m+1$ 個の部分 $S_1,S_2,\cdots,S_{m+1}$ に分ける。このとき S_k 内の境界曲線を $\gamma_1^k,\cdots,\gamma_{n_k}^k$ ($k=1,2,\cdots,m+1$) とする。S_k 上の $\{1,2,\cdots,2g-3\}\backslash J$ に対応するloopsを $\delta_1^k,\cdots,\delta_{l_k}^k$ ($k=1\cdots,m+1$) とすれば，$2g_k+n_k\geqq 3$, $l_k=2g_k+n_k-3$ かつ $\sum_{k=1}^{m+1}n_k=2m$ である。loops γ_s^k の外側(S_kの反対側)にある"α"-loopsを $\alpha_{s1}^k,\cdots,\alpha_{s g_s}^s$ ($s=1,\cdots,n_k$) とする。このとき勿論 $\tilde{g}_s\geqq 1$。性質のつづきを述べる。$g_k\neq 0$ のとき．$p_1^k=0$, $q_1^k=\infty$, $p_{n_k 1}^k=1$ ($p_{n_k 1}^k=p_1^{n_k}$) とおいて前節の如く p,q を決めれば，次の $2g_k+n_k$ 個の p,q が定まる,

($p_1^k=0$, $q_1^k=\infty$, p_2^k, $\cdots$, $q_{g_k}^k$, p_{11}^k, p_{21}^k, $\cdots$, $p_{n_k 1}^k=1$)。

ここで $p_{j1}^k=p_1^j$ ($j=1,\cdots,n_k$)。このとき (3) $A_1^k(\tau,z)$, $\cdots$, $A_{g_k}^k(\tau,z)$ はSchottky群(これを $G_k(\tau)$ とかく)を生成する。ここで $A_l^k(\tau,z)$ はmultiplierが $1/t_l^k$ でfixed pointsが p_l^k, q_l^k なるMöbius変換である。t_l^k は α_l^k に対応するIの元をjとするとき $t_l^k=t_j$。 (4) $p_{11}^k,p_{21}^k,\cdots,p_{n_k 1}^k=1$ はすべてdistinct, (5) $p_{11}^k,p_{21}^k,\cdots,p_{n_k 1}^k=1$ は $G_k(\tau)$ の

適当な基本領域 $\omega_k(\tau)$ の内部にある。

一方 $g_k=0$ のときは，性質は次の様になる。この場合 $n_k \geqq 3$ である。$p_{11}^k=0$，$p_{21}^k=\infty$，$p_{n_k 1}^k=1$ とおいて前節の如くすれば τ より p, q を決めることができる。即ち n_k 個の p, q （$p_{11}^k=0$, $p_{21}^k=\infty$, $p_{31}^k, \cdots, p_{n_k-1,1}^k$, $p_{n_k,1}^k=1$）が定まる。(3) これらの p_{s1}^k $(s=1,2,\cdots,n_k)$ はすべて distinct である。

<u>注意。</u> この場合 $G_k(\tau)$ は trivial group である。

τ を与えたとき上の様に $m+1$ 個の Schottky 群（trivial groups も含む）$G_1(\tau), \cdots, G_{m+1}(\tau)$ が定まる。$G_\tau = [G_1(\tau), \cdots, G_{m+1}(\tau)]$ とかく。意味は自明であろう。更に $\Omega(G_\tau) = \{\Omega(G_1(\tau)), \cdots, \Omega(G_{m+1}(\tau))\}$ とかく。これは上の様に正規化すれば，$z \in \Omega(G_\tau)$ は $z \in \Omega(G_k(\tau))$ であるということを意味する。そして $\Omega'(G_k(\tau)) = \Omega(G_k(\tau)) - \bigcup_{\gamma \in G_k(\tau)} \bigcup_{s=1}^{n_k} \gamma(p_{s1}^k)$ とおく。このとき $\Omega'(G_\tau) = \{\Omega'(G_1(\tau)), \cdots, \Omega'(G_{m+1}(\tau))\}$ とおく。

(iv) $I \neq \emptyset$，$J \neq \emptyset$ の場合 $\delta^{I,J}\mathfrak{S}_g$ は cases (ii) と (iii) を組み合わすことにより定義される。

$\delta^{I,J}\mathfrak{S}_g$ の定義を用いて，次の集合の定義を与える；

$$\mathfrak{S}_g^I = \bigcup_{L \subset I} \delta^L \mathfrak{S}_g, \quad \hat{\mathfrak{S}}_g^J = \bigcup_{M \subset J} \hat{\delta}^M \mathfrak{S}_g, \quad \mathfrak{S}_g^{IJ} = \bigcup_{\substack{L \subset I \\ M \subset J}} \delta^{L,M} \mathfrak{S}_g,$$

$$\mathfrak{S}_g^* = \mathfrak{S}_g^I, \ I = \{1,2,\cdots,g\}, \quad \hat{\mathfrak{S}}_g = \hat{\mathfrak{S}}_g^J, \ J = \{1,2,\cdots,2g-3\},$$

$\hat{\delta}^J \mathfrak{S}_g^I = \bigcup_{L\subset I} \delta^{L,J}\mathfrak{S}_g$, $\hat{\delta}^J\mathfrak{S}_g^* = \hat{\delta}^J\mathfrak{S}_g^I$, $I=\{1,2,\cdots,g\}$, $\hat{\mathfrak{S}}_g^* = \mathfrak{S}_g^{I,J}$, $I=\{1,2,\cdots,g\}$, $J=\{1,2,\cdots,2g-3\}$。

<u>定義.</u> $\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ を <u>augmented Schottky space</u> という。

<u>注意.</u> $\mathfrak{S}_g^*$ は Bers が定義した augmented Schottky space である。

$\hat{\mathfrak{S}}_g^* \ni \tau = (t_1,\cdots,t_g;\rho_1,\cdots,\rho_{2g-3})$ は $\tau\in D^g\times(\mathbb{C}-\{0\})^{2g-3}$ である。

<u>注意1.</u> $\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ は loops の選び方とその順序に依存しているから, marked augmented Schottky space と言った方がいいかも知れない。

<u>注意2.</u> $\hat{\mathfrak{S}}_g^*\setminus\mathfrak{S}_g \subset \partial\mathfrak{S}_g$ の点 $\tau=(t_1,\cdots,t_g;\rho_1,\cdots,\rho_{2g-3})$ は次の性質をもつ。(1) $\rho_j(\tau)$, $j=1,2,\cdots,2g-3$, の少なくとも1つは1に等しいか, 又は (2) $t_i(\tau)$, $i=1,2,\cdots,g$ の少なくとも1つは0に等しい。従って $\hat{\mathfrak{S}}_g^*\setminus\mathfrak{S}_g$ は $\partial\mathfrak{S}_g$ と有限個の hyperplanes との intersection である。

<u>Proposition</u> 2. augmented Schottky space $\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ は $D^g\times(\mathbb{C}-\{0\})^{2g-3}$ 内の領域であり, $\overline{\mathfrak{S}}_g$ の部分集合である。更に各 $I\subset\{1,2,\cdots,g\}$ と $J\subset\{1,2,\cdots,2g-3\}$ に対し $\delta^{I,J}\mathfrak{S}_g$ は $D^{g-|I|}\times(\mathbb{C}-\{0\})^{2g-3-|J|}$ 内の領域で, $\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ の部分領域である。

証明は [7] を参照せよ。

§4. Augmented Schottky spaces とリーマン面.

(1) $\tau\in\delta^{I}\mathfrak{S}_g$ $(I\neq\emptyset)$ のとき, $\Omega(G_\tau)/G_\tau = S_\tau$ は genus $g-|I|$ のコンパクト リーマン面で, $|I|$個の distinguished pairs of points ; $a_i, b_i, i\in I$, をもつ。ここで a_i は $p_i(\tau)$ の $\Omega(G_\tau)\rightarrow\Omega(G_\tau)/G_\tau$ での像, b_i は $q_i(\tau)$ の像である。a_i, b_i を同一視したリーマン面を $\hat{S}_\tau$ により表わす。このとき $\hat{S}_\tau$ は1つの part をもつ, $|I|$ 個の non-dividing nodes をもつ compact リーマン面である。

(2) $\tau\in\hat{\delta}^{J}\mathfrak{S}_g$ $(J\neq\emptyset)$ とする。$|J|=m$ ならば $G_\tau = [G_1(\tau),\cdots,G_{m+1}(\tau)]$, $\Omega(G_\tau)=\{\Omega(G_1(\tau)),\cdots,\Omega(G_{m+1}(\tau))\}$ である。このとき $\Omega(G_k(\tau))/G_k(\tau)$ は genus g_kで, n_k 個の distinguished points $a^k_1,\cdots,a^k_{n_k}$ をもつ compact リーマン面である。$\tau_0\in\mathfrak{S}_g$ とする。loop γ_h, $h\in J$, を $S_k(\tau_0)$と共通の境界曲線としてもつ S_{τ_0} の part を $S_j(\tau_0)$ とする。このとき上と同様にして $\Omega(G_j(\tau))/G_j(\tau) = S_j(\tau)$ は genus g_j で n_j 個の distinguished points $b^j_1,\cdots,b^j_{n_j}$ をもつ compact リーマン面である。今仮に a^k_1 と b^j_1 が $h\in J$ に対応する distinguished points とする。これらを同一視すれば genus g_k+g_j で, distinguished points $a^k_2,\cdots,a^k_{n_k}, b^j_2,\cdots,b^j_{n_j}$ をもち, 1つの dividing node a^k_1 $(=b^j_1)$ をもつ compact リーマン面 S_{kj} がえられる。これを

$S_{kj} = [\Omega(G_k(\tau))/G_k(\tau),\ \Omega(G_j(\tau))/G_j(\tau)] = [S_k(\tau), S_j(\tau)]$

とかくことにする。この操作をすべてのリーマン面 $S_1, \cdots, S_{m+1}$ とそれらの上のすべての pairs になっている distinguished points にほどこせば，最終的には genus $g_1+g_2+\cdots+g_{m+1}$ $(=g)$ で，m 個の dividing nodes をもつ compact リーマン面が得られることになる．これを

$S_\tau = [S_1(\tau), S_2(\tau), \cdots\cdots, S_{m+1}(\tau)]$

とかくことにする。

(3) $\tau \in \delta^{I,J}\mathfrak{S}_g$ ($I \neq \phi$, $J \neq \phi$) の場合。このときは上の case (1) と case (2) を組み合わせれば，

$S_\tau = [\hat{S}_1(\tau), \cdots, \hat{S}_{m+1}(\tau)]$

が得られる。ここで $m = |J|$。従って S_τ は genus g $(= g_1+g_2+\cdots+g_{m+1})$ で，m 個の dividing nodes と $|I|$ 個の non-dividing nodes をもつ compact リーマン面である。

次にこの逆を考えてみる。即ち m 個の dividing nodes と l 個の non-dividing nodes をもつ genus g の compact リーマン面 S を与えたとき，この S を表わす $\tau \in \hat{\mathfrak{S}}_g^*$ が一意的に存在することを示そう。

(1) $m=0$，$l=0$ のときはよく知られている。

(2) $m=0$，$l \neq 0$ のときは Bers [2] により示されている。

(3) $m \neq 0$, $l = 0$ の場合。m個の dividing nodes のみもつ compact リーマン面を S とする。S を各 node で切りはなせば，$m+1$ 個のリーマン面 $S_1', \cdots, S_{m+1}'$ と nodes に対応して各 S_k' 上 n_k ($\sum_{k=1}^{m+1} n_k = 2m$) 個の punctures が得られる。各 puncture に1点を付け加えることにより S_k' を genus g の compact リーマン面 S_k にする。S_k' 上付け加えた n_k 個の点 $\hat{p}_1^k, \cdots, \hat{p}_{n_k}^k$ を S_k 上の distinguished points ということにする。S_k 上の "α"-loops を $\alpha_1^k, \cdots, \alpha_{g_k}^k$ とし，S_k を表わす Schottky 群を $G_k = \langle A_1^k(\tau, z), \cdots, A_{g_k}^k(\tau, z) \rangle$ とする。ここで $A_s^k(\tau, z)$ は "α"-loops α_s^k に対応する Möbius 変換である. $\Omega(G_k)/G_k = S_k$ である。$\hat{p}_1^k, \cdots, \hat{p}_{n_k}^k$ に対応する G_k の基本領域 ω_k の内部にある点を $p_1^k, \cdots, p_{n_k}^k$ とする。S_k 上指定された dividing loops を $\delta_1^k, \cdots, \delta_{l_k}^k$ とする。勿論このとき $l_k = 2g_k + n_k - 3$ である。今 G_k を $g_k \neq 0$ のとき $p_1^k = 0$, $q_1^k = \infty$, $p_{n_k}^k = 1$ と正規化し，その正規化された群を再び G_k により表わす。このとき以前と同様の操作により，各 δ_s^k ($s = 1, 2, \cdots, l_k$) に応じて1つずつの p_s^k が定まる。即ち l_k 個の p_s^k が定まる。$g_k = 0$ のときは，$p_1^k = 0$，$p_2^k = \infty$，$p_{n_k}^k = 1$ と正規化した群を再び G_k で表わす。勿論 G_k は trivial group である。以前と同様の操作により各 δ_s^k に応じて1つずつの p_s^k

が定まる。この場合も l_k 個の ρ_j^k が定まる。各 dividing loop, node には $\{1, 2, \cdots, 2g-3\}$ のうちの1つの番号が指定されているということに注意すれば，上の操作により，$l_1+l_2+\cdots+l_{m+1}$ 個の ρ_j が定まる。更に distinguished points $\hat{p}_1^k, \cdots, \hat{p}_{n_k}^k$ $(k=1, \cdots, m+1)$ に対応する $\{1, 2, \cdots, 2g-3\}$ の番号を $k_1, \cdots, k_{n_k}$ $(k=1, \cdots, m+1)$ とすれば，m 個 $(m = \frac{1}{2}(n_1+\cdots+n_{m+1}))$ の ρ_{k_s} に対して $\rho_{k_s}=1$ とおく。以上により $l_1+l_2+\cdots+l_{m+1}+m$ 個の ρ_j が決められた。即ち $\sum_{k=1}^{m+1} l_k + m = \sum_{k=1}^{m+1}(2g_k+n_k-3)+m = 2g-3$ 個の ρ_j が決められた。

t_j^k を $A_j^k(\tau, z)$ の multiplier λ_j^k $(|\lambda_j^k|>1)$ の逆数とすれば，与えられた S に対して一意的に

$$\tau = (t_1, \cdots, t_g ; \rho_1, \cdots, \rho_{2g-3}) \in D^{*g} \times (\mathbb{C}-\{0\})^{2g-3}$$

が決められたことになる。構成の仕方によりこの τ に対して $\Omega(G_\tau)/G_\tau = S$ となることは明らかである。

(4) $m \neq 0$, $l \neq 0$ の場合。case (2) と case (3) を組み合わせれば同様の結果をえる。

以上をまとめれば，次の定理をえる。

<u>定理 1.</u> (1) 各 $\tau \in \mathfrak{S}_g^*$ に対し，τ に対応する genus g の nodes もち (or なし) の compact リーマン面が存在する。

(2) nodes もち (or なし) の genus g の compact リーマン面 S に対し, S を表わす $\tau \in \hat{\mathfrak{S}}_g^*$ が一意的に存在する。

§5. Augmented Schottky spaces の fiber spaces.

$\tau \in \mathfrak{S}_g$ に対して $S_\tau = \Omega(G_\tau)/G_\tau$ 上 $3g-3$ 個の loops がその順番と共に指定されている。同様に $\tau \in \hat{\mathfrak{S}}_g^*$ に対して S_τ 上 $3g-3$ 個の loops 又は nodes がその順番と共に指定されている。この中に $2g-3$ 個の dividing loops or dividing nodes がある。この $2g-3$ 個の loops と nodes により S_τ を $2g-2$ 個の parts, $\hat{S}_1(\tau), \cdots, \hat{S}_{2g-2}(\tau)$ に分けられる。各 $\hat{S}_j(\tau)$ を中心とした G_τ を $\hat{G}_j(\tau)$ とかくことにする. (定義と詳細な説明は [7] を参照)。$T\hat{G}_i(\tau)T^{-1} = \hat{G}_j(\tau)$ となる T: Möbius 変換が存在するとき, $\hat{G}_i(\tau)$ と $\hat{G}_j(\tau)$ は同値な群という。

<u>注意.</u> $S_\tau = [S_1(\tau), \cdots, S_{m+1}(\tau)]$ のとき, $\hat{G}_j(\tau)$ と $\hat{G}_i(\tau)$ が同じリーマン面を ($S_k(\tau)$) 表わすとき, $\hat{G}_j(\tau)$ と $\hat{G}_i(\tau)$ は同値である。

5-1. fiber spaces.

fiber spaces $\mathcal{F}_j\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ ($j = 1, 2, \cdots, 2g-2$) を定義する。$\tau \in \hat{\mathfrak{S}}_g^*$ に対し $\Omega'(\hat{G}_j(\tau))$ が決まる。pairs (τ, z), $\tau \in \hat{\mathfrak{S}}_g^*$, $z \in \Omega'(\hat{G}_j(\tau))$ すべての集合を $\mathcal{F}_j\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ とかき, $\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ の j 番目の <u>fiber space</u> という。各 j に対して, $\mathcal{F}_j\mathfrak{S}_g^{I,J} = \mathcal{F}_j\hat{\mathfrak{S}}_g^* \mid \mathfrak{S}_g^{I,J}$,

$\mathfrak{F}_j \delta^{I,J} \mathfrak{S}_g = \mathfrak{F}_j \hat{\mathfrak{S}}_g^* \mid \delta^{I,J} \mathfrak{S}_g$, $\mathfrak{F}_j \hat{\delta}^J \mathfrak{S}_g^I = \mathfrak{F}_j \hat{\mathfrak{S}}_g^* \mid \hat{\delta}^J \mathfrak{S}_g^I$,
$\mathfrak{F}_j \hat{\delta}^J \mathfrak{S}_g^* = \mathfrak{F}_j \hat{\mathfrak{S}}_g^* \mid \hat{\delta}^J \mathfrak{S}_g^*$ とかく。

Proposition 3. $j=1,2,\cdots,2g-2$ に対し $\mathfrak{F}_j \hat{\mathfrak{S}}_g^*$ は $\mathbb{C}^{3g-2}$ 内の領域である。あらゆる $I \subset \{1,2,\cdots,g\}$, あらゆる $J \subset \{1,2,\cdots,2g-3\}$ に対し $\mathfrak{F}_j \mathfrak{S}_g^{I,J}$ は $\mathfrak{F}_j \hat{\mathfrak{S}}_g^*$ の部分領域で, $\mathfrak{F}_j \delta^{I,J} \mathfrak{S}_g$ は $\mathbb{C}^{3g-2-|I|-|J|}$ 内の領域である。

証明は [7] を参照せよ。

5−2. Poincaré metric. S を 0, 1 又は 2個の punctures をもつ sphere でも, genus 1 の compact リーマン面でもないリーマン面とする。このとき S 上 Poincaré metric が存在する。S を nodes もちのリーマン面とするとき S 上の Poincaré metric は $S \setminus \{nodes\}$ の各成分上の Poincaré metric として定義される。今各 $\tau \in \hat{\mathfrak{S}}_g^*$, $z \in \Omega'(\mathfrak{G}_j(\tau))$ に対し $\Omega'(\mathfrak{G}_j(\tau))$ の Poincaré metric を $\lambda_j(\tau, z) = \lambda_{\Omega'(\mathfrak{G}_j(\tau))}(z)$ とおく。明らかに $\lambda_j(\tau, z)$ は $\hat{S}_j(\tau)$ 上の Poincaré metric を induce する。

Proposition 4. $\lambda_j(\tau, z)$ は $(\tau, z) \in \mathfrak{F}_j \hat{\mathfrak{S}}_g^*$ ($j=1,2,\cdots,2g-2$) の連続函数である。

証明は Bers [2] と類似になされる。

§6. 新しい座標の性質.

<u>定理 2.</u> (1) $\tau_\nu \in \mathfrak{S}_g$ で $\tau_\nu \to \tau_0 \in \delta^I \mathfrak{S}_g$ $(I \neq \emptyset)$ とする。loop $\alpha_i(\tau_\nu)$ と $t_i(\tau_\nu)$ が対応しているとする。$L(\alpha_i(\tau_\nu))$ を $\alpha_i(\tau_\nu)$ と homotopic な geodesic loop の長さとする。このとき

$$\lim_{\nu\to\infty} L(\alpha_i(\tau_\nu)) = 0 \iff i \in I \iff t_i(\tau_0) = 0.$$

(2) $\tau_\nu \in \mathfrak{S}_g$ で $\tau_\nu \to \tau_0 \in \hat{\delta}^J \mathfrak{S}_g$ $(J \neq \emptyset)$ とする。loop $\gamma_j(\tau_\nu)$ と $\rho_j(\tau_\nu)$ が対応しているとする。$L(\gamma_j(\tau_\nu))$ を $\gamma_j(\tau_\nu)$ と homotopic な geodesic loop の長さとする。このとき,

$$\lim_{\nu\to\infty} L(\gamma_j(\tau_\nu)) = 0 \iff j \in J \iff \rho_j(\tau_0) = 1.$$

<u>証明.</u> (1) $L(\alpha_i(\tau_0)) = 0$ ならば $t_i(\tau_0) = 0$ を示す。今 $t_i(\tau_0) \neq 0$ とする。$\tau_0 \in \delta^I \mathfrak{S}_g$ より $A_i(\tau_0, z)$ は Schottky 群 G_{τ_0} の生成元である。$A_i(\tau_0, z) = (1/t_i(\tau_0))z$ としてよい。この defining curves を $C_i(\tau_0)$, $C_i'(\tau_0)$ とする。この場合明らかに $L(\alpha_i(\tau_0)) \neq 0$ となり不合理である。

逆に $t_i(\tau_0) = 0$ ならば $L(\alpha_i(\tau_0)) = 0$ を示す。今 $P_i(\tau_0)$ を中心とする小円 C で $l_{\tau_0}(C) < \varepsilon$ なるものをとる。ここで $l_{\tau_0}(C)$ は $\Omega(G_{\tau_0})/G_{\tau_0} = S_{\tau_0}$ 上の Poincaré metric に関する C の長さを表わす。ν が十分大きければ, 円 C の内部に $P_i(\tau_\nu)$ が含まれ, C と $A_i(\tau_\nu, C) = C'$ の外側に G_{τ_ν} の他のすべての defining curves があるようにできる。このとき $\alpha_i(\tau_\nu)$ は C の natural projection による像と S_{τ_ν} 上 homotopic である

ことが分る。Poincaré metric の連続性により，十分大きな ν に対し

$$|\, l_{\tau_0}(c) - l_{\tau_\nu}(c)\,| < \varepsilon .$$

故に $l_{\tau_\nu}(c) < 2\varepsilon$. 従って

$$L_{\tau_\nu}(\alpha(\tau_\nu)) \leqq l_{\tau_\nu}(c) < 2\varepsilon .$$

ε の任意性より，$\lim_{\nu\to\infty} L_{\tau_\nu}(\alpha(\tau_\nu)) = 0$ となることが分る。

(2) $L(\gamma_j(\tau_\nu)) \to 0$ $(\nu\to\infty)$ ならば $\rho_j(\tau_\nu)\to 1$ $(\nu\to\infty)$ となることを示す。$\gamma_j(\tau_\nu)$ により $G(\tau_\nu)/G_{\tau_\nu}$ が2つの部分 $S_1(\tau_\nu)$ と $S_2(\tau_\nu)$ に分けられたとする。$S_i(\tau_\nu)$ 上の "α"-loops を $\alpha_1^i(\tau_\nu),\cdots,\alpha_{g_i}^i(\tau_\nu)$ $(i=1,2)$ とする。今 $S_i(\tau_\nu)$ の genus g_i が $g_i \geqq 2$ $(i=1,2)$ とする．他の場合も同様に示される。$\alpha_k^i(\tau_\nu)$ に対応する G_{τ_ν} の生成元を $A_k^i(\tau_\nu, z)$ とし，$\alpha_1^1(\tau_\nu)$ を中心とした群，即ち，$p_1^1(\tau_\nu)=0$, $p_2^1(\tau_\nu)=\infty$, $p_1^2(\tau_\nu)=1$ と正規化した群を $G_{\tau_\nu}^1$ とする；

$$G_{\tau_\nu}^1 = \langle A_1^1(\tau_\nu, z), \cdots, A_{g_1}^1(\tau_\nu, z), A_1^2(\tau_\nu, z), \cdots, A_{g_2}^2(\tau_\nu, z)\rangle$$

とかく。$\omega^1(\tau_\nu)$ を $G_{\tau_\nu}^1$ の基本領域とする。このとき $A_1^2(\tau_\nu, z)$, $\cdots$, $A_{g_2}^2(\tau_\nu, z)$ の defining curves はすべて loop $\gamma_j(\tau_\nu)$ の $\omega^1(\tau_\nu)$ へのもちあげ $\tilde{\gamma}_j(\tau_\nu)$ の内部にある。loop $\gamma_j(\tau_\nu)$ を geodesic loop としてよい。$L(\gamma_j(\tau_\nu))\to 0$ $(\nu\to\infty)$ より $\tilde{\gamma}_j(\tau_\nu)$ の Euclid の距離（長さ）も 0 へ行くことが容易にみられる。従って，

$$\lim_{\nu\to\infty} p_1^2(\tau_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} q_1^2(\tau_\nu) = \cdots = \lim_{\nu\to\infty} p_{g_2}^2(\tau_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} q_{g_2}^2(\tau_\nu) = 1。$$

故に $\lim_{\nu\to\infty} p_j(\tau_\nu) = 1$ となる。

逆に $\lim_{\nu\to\infty} p_j(\tau_\nu)=1$ ならば $\lim_{\nu\to\infty} L(\gamma_j(\tau_\nu)) = 0$ となることを示す。$\omega_0(\tau_0)$ 内の j に対応する distinguished points を $P(\tau_0)$ とかく。$P(\tau_0)$ のまわりの小円 C を，任意に小さい正の数 $\varepsilon>0$ に対し $l_{\tau_0}(C)<\varepsilon$ のように選ぶことができる。Prop. 2 の証明と類似にすれば，十分大きな ν に対し $A_1^2(\tau_\nu, z), \cdots, A_{g_2}^2(\tau_\nu, z)$ の defining curves はすべて円 C の内部にあり，$A_1^1(\tau_\nu, z), \cdots, A_{g_1}^1(\tau_\nu, z)$ の defining curves はすべて円 C の外部にあるようにできる。従って C は loop $\gamma_j(\tau_\nu)$ と homotopic である。更に Poincaré metric の連続性により

$$| l_{\tau_\nu}(C) - l_{\tau_0}(C) | < \varepsilon .$$

故に $l_{\tau_\nu}(C) < 2\varepsilon$。そして $L_{\tau_\nu}(\gamma_j(\tau_\nu)) \leqq L_{\tau_\nu}(C)$ であるから $\lim_{\nu\to\infty} L_{\tau_\nu}(\gamma_j(\tau_\nu)) = 0$ ということが分る。 Q.E.D.

Appendices.

上に述べた結果の応用として，Sato [8], Sato [9] の一部をここで紹介する。

1. Bers [2] にならって $\mathfrak{F}_j\mathfrak{S}_g$ 上の保型形式に関し次の定理を得る (Sato [8])。

<u>定理 A.</u> $g>1$, $q>1$ を整数とする。このとき次の

様な $(2q-1)(g-1)$ 個の (non-equivalent な) 正則函数 $\sigma_j(\tau,z)$, $(\tau,z)\in\mathfrak{F}_j\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ $(j=1,2,\cdots,2g-2)$ と analytic subvariety $Z\subset\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ がある。(i) 各 $J\subset\{1,2,\cdots,2g-3\}$ に対し $Z\cap\hat{\delta}^J\mathfrak{S}_g^*=\emptyset$ 又は codim $Z\cap\hat{\delta}^J\mathfrak{S}_g^*=1$ in $\hat{\delta}^J\mathfrak{S}_g^*$, (ii) $j=1,2,\cdots,2g-2$ に対し, $|I_s|\geq g_s-1$ のとき Z は $\delta^{I_s J}\mathfrak{S}_g$ 上にはない。(iii) 各 $\tau\in\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ に対し, $\hat{\sigma}_j(\tau,\hat{z})$ は S_τ 上の regular q-differentials である。ここで $\hat{z}$ は z の natural projection による像で, $\hat{\sigma}_j(\tau,\hat{z})$ は $\sigma_j(\tau,z)$ から natural projection により induce されたもの。(iv) $\hat{\sigma}(\tau,\hat{z})$ が1次独立であるための必要十分条件は $\tau\notin Z$ である。

<u>定理 B.</u>　$g>1$ 整数で, $\tau_0\in\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ とする。このとき次の様な τ_0 の $\hat{\mathfrak{S}}_g^*$ 内の近傍と g 個の正則函数 $\sigma_j(\tau,z)$, $\tau\in N$, $z\in\Omega'(G_s(\tau))$ $(s=1,2,\cdots,n(\tau)+1)$ がある。各 $\tau\in N$ に対し, g 個の函数 $\hat{\sigma}_j(\tau,\hat{z})$ は $S_\tau=\Omega(G_\tau)/G_\tau$ 上1次独立な regular 1-forms である。ここで $n(\tau)$ は $\Omega(G_\tau)/G_\tau$ 上の non-dividing nodes の個数を表わす。

これを使用すれば, 周期行列の deformation を考えることができる。

2.　次に classical Schottky space $\mathfrak{S}_g^0$ について若干述べる。§1-1 の Schottky 群の定義中の defining curves

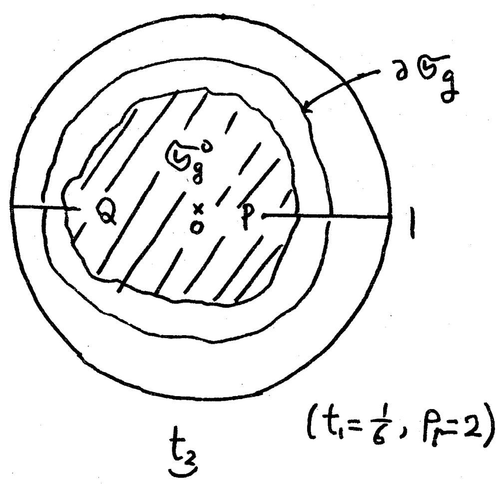
がすべて circles からなるとき，その群を classical Schottky group という。classical Schottky groups 全体から成る空間を classical Schottky space という。ここでは例をいくつかあげる。簡単の為 genus g は 2 とする。

例 1.　$\tau=(t_1, t_2\,;\rho_1)$，$t_1 = 1/K^2$ $(K>1)$，$\rho_1=2$ の場合。$\tau \in \partial\mathfrak{S}_2^0 \cap \{\text{cusps}\} \iff t_2 = L_1(K)$ 又は $t_2 = -\sqrt{L_1(K)}$，ここで $L_1(K)>0$ は与えられた K に対し唯1つ定まるある数（$L_1(K)$ はきちんと定まるが，これに対しては [9] を参照せよ。

たとえば $K=\sqrt{6}$ とすれば，

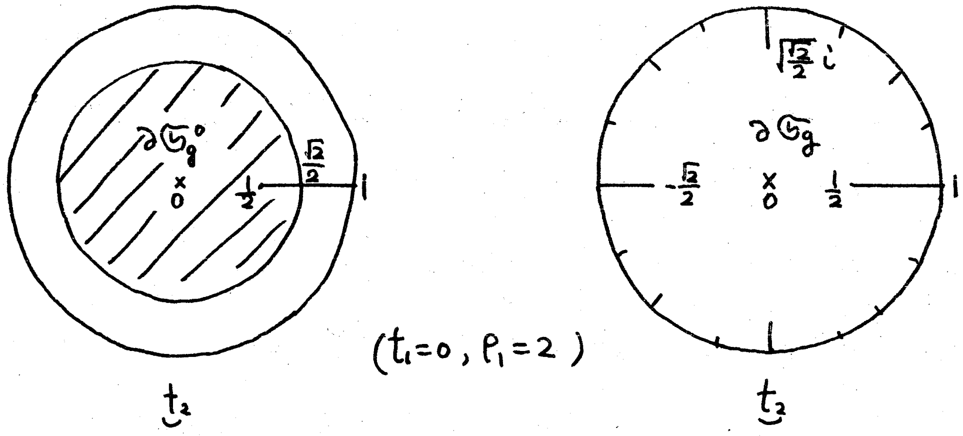
$$1/L_1(K) = \sqrt{\sqrt{6}+5\sqrt{2}}/2\,.$$

この場合次の図が得られる。



点 P, Q は $\in \partial\mathfrak{S}_g^0 \cap \partial\mathfrak{S}_g$ で cusps であり，原点は node である。その他の $\mathfrak{S}_g^0$ の境界点は $\mathfrak{S}_g$ の内点であり，それ故に $\mathfrak{S}_g \setminus \mathfrak{S}_g^0 \neq \emptyset$ ということが分る。

例 2.　極限の場合を考える。$t_1=0$，$\rho_1=2$ とする。この場合 $\mathfrak{S}_g^0$，$\mathfrak{S}_g$ は次の図の様になる。



$(t_1=0,\ \rho_1=2)$

この場合の $\partial\mathfrak{S}_g^0$ の境界は，$t_2=0$；$t_2=\frac{1}{2}$；$t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}$ ($\theta\neq 0$) である。

上のことより，t_1 を十分小さい正の数とし，$\rho_1=2$ とし更に t_2 を $t_2=iL$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}<L<\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$ とすれば，$(t_1,t_2;\rho_1)\in\mathfrak{S}_g\setminus\mathfrak{S}_g^0$ となることが分る。即ち $\mathfrak{S}_g\setminus\mathfrak{S}_g^0\neq\emptyset$ ということが示される。

References

1. L. Bers, Spaces of degenerating Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies 79 (1974), 43–55.
2. L. Bers, Automorphic forms for Schottky groups, Advances in Math. 16 (1975), 332–361.
3. V. Chuckrow, On Schottky groups with applications to Kleinian groups, Ann. of Math. 88 (1968), 47–61.

4. A. Marden, Schottky groups and circles, Contributions to Analysis, Academic Press, New York. 1974, 273 – 278.

5. B. Maskit, A characterization of Schottky groups, J. Anal. Math. 19 (1967), 227–230.

6. H. Sato, On boundaries of Schottky spaces, Nagoya Math. J. 62 (1976), 97–124.

7. H. Sato, On augmented Schottky spaces and automorphic forms I, to appear.

8. H. Sato, On augmented Schottky spaces and automorphic forms II, to appear.

9. H. Sato, On classical Schottky spaces, to appear.

10. R. Zarrow, Classical and non-classical Schottky groups, Duke Math. J. 42 (1975), 717–724.