数理解析研究所講究録
第 318 巻 1978 年 50-62

不変成分をもつ Klein 群の安定性.

山形大. 教養　仲田正躬

1. Klein 群の安定性.

Möbius 変換全体の群を Möb と書く. すなわち

$$\mathrm{M\ddot{o}b} = \left\{ g(t) = \frac{at+b}{ct+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad-bc=1 \right\}$$

以下 Möb と $SL(2,\mathbb{C})/\pm I$ とを同一視する.

Möb の元 $g(t) = (at+b)(ct+d)^{-1}$ に対して, g が parabolic とは $tr^2 g = (a+d)^2 = 4$ なる事を言う. g が elliptic とは $tr^2 g = (a+d)^2 \in [0, 4)$ なる事を言う. その他の場合 g を loxodromic と言う.

G を finitely generated Kleinian group とする. i.e. G は finitely generated r_s discontinuous subgroup of Möb. $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_N\}$ を a system of generators for G とし fix する. $\theta : G \longrightarrow \mathrm{M\ddot{o}b}$ を into homomorphism とする. この時 θ が parabolic homomorphism とは $tr^2\theta(g) = 4$ if $g \in G$ parabolic

なる事を言う．そこでGからMöbの中への parabolic homomorphism の全体を $\text{Hom}_p(G, \text{Möb})$ と書くことにする．$\text{Hom}_p(G, \text{Möb})$ の元 θ と $(\theta(\gamma_1), \cdots, \theta(\gamma_N)) \in \text{Möb}^N$（$\text{Möb}$ の N コの直積空間）とを同一視して $\text{Hom}_p(G, \text{Möb}) \subset \text{Möb}^N$ と見る．

w を $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の quasi-conformal self-mapping とし，さらに $w \circ G \circ w^{-1} \subset \text{Möb}$ とする．この時 w を quasi-conformal mapping compatible with G という．又 $\theta(g) = w \circ g \circ w^{-1}$ で定義される isomorphism $\theta : G \longrightarrow w \circ G \circ w^{-1} (\subset \text{Möb})$ を G の quasi-conformal deformation という．そこで G の quasi-conformal deformation 全体を $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ と書くことにする．前と同様に $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \ni \theta \longmapsto (\theta(\gamma_1), \cdots, \theta(\gamma_N)) \in \text{Möb}^N$ なる対応により $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \text{Möb}^N$ と見る．この時 $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}_p(G, \text{Möb})$ である．

定義．finitely generated Kleinian group G が quasi-conformally stable とは，Möb^N における identity homomorphism $(\gamma_1, \cdots, \gamma_N)$ の近傍 U が存在して

$$\text{Hom}_p(G, \text{Möb}) \cap U = \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \cap U$$

となる事を言う．

この quasi-conformal stability の定義は G の generator $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_N\}$ のとり方に independent である．

不変成分をもつ finitely generated Kleinian group に対し

て quasi-conformal stability と同値な条件を，その cohomology space の構造を調べる事により与える．

2. Klein 群の cohomology.

$\Pi = \{v(t) = at^2 + bt + c : a, b, c \in \mathbb{C}\}$ とする．$GL(\Pi)$ を group of all non-singular linear maps of Π とする．そこで $\rho : G \longrightarrow GL(\Pi)$ を，$\rho(g)(v)(t) = v(g(t))g'(t)^{-1}$ で定義すると ρ は anti-homomorphism i.e. $\rho(g_1 \circ g_2) = \rho(g_2) \circ \rho(g_1)$ for all $g_1, g_2 \in G$ である．

$\chi : G \longrightarrow \Pi$ a mapping に対して，χ が cocycle とは

$$\chi(g_1 \circ g_2) = \rho(g_2)(\chi(g_1)) + \chi(g_2) \quad \text{for all } g_1, g_2 \in G$$

なる事を言う．cocycle χ が coboundary とは，ある $v \in \Pi$ が存在して，すべての $g \in G$ に対して

$$\chi(g) = \rho(g)(v) - v$$

なる事を言う．cocycles 全体を $Z^1(G, \Pi)$，coboundaries 全体を $B^1(G, \Pi)$ と書く．又 $Z^1(G, \Pi)/B^1(G, \Pi) \equiv H^1(G, \Pi)$ を cohomology space という．

Δ を G-invariant union of components of $\Omega(G)$ とする．($\Omega(G)$: G の不連続領域)　この時 cocycle χ が Δ-parabolic cocycle とは，Δ/G の任意の puncture に対応する parabolic cyclic subgroup G_0 of G に対して $\chi|_{G_0} \in B^1(G_0, \Pi)$ なることを

言う．とくにすべての parabolic cyclic subgroup G_0 of G に対して $z|_{G_0} \in B^1(G_0, \Pi)$ なる時 z を parabolic cocycle という．Δ-parabolic cocycles 全体を $PZ^1_\Delta(G, \Pi)$ と書き，又 parabolic cocycles 全体を $PZ^1(G, \Pi)$ と書く．$PZ^1_\Delta(G, \Pi)/B^1(G, \Pi) \equiv PH^1_\Delta(G, \Pi)$ を Δ-parabolic cohomology space と言い，又 $PZ^1(G, \Pi)/B^1(G, \Pi) \equiv PH^1(G, \Pi)$ を parabolic cohomology space という．

λ を Poincaré metric on Δ とし，$A(\Delta, G)$ を cusp forms for G on Δ とする．すなわち

$$A(\Delta, G) = \{ \varphi : \text{holomorphic on } \Delta,\ \varphi(g(t))\, g'(t)^2 = \varphi(t) \text{ for } \forall t \in \Delta,\ \forall g \in G \ \&\ |\lambda^{-2}\varphi| : \text{bounded on } \Delta \}$$

この時

$$\exists \beta^* : A(\Delta, G) \longrightarrow PH^1_\Delta(G, \Pi) \quad (\text{anti-linear, injective}).$$

β^* を Bers の写像という．（Bers [1], Kra [4]）

Δ 上の holomorphic function F が Eichler integral とは

$$F(g(t))\, g'(t)^{-1} - F(t) \in \Pi \quad \text{for all } g \in G$$

なる事をいう．Δ 上の Eichler integral F が bounded とは

$$\frac{d^3}{dt^3} F(t) \in A(\Delta, G)$$

なる事をいう．そこで Δ 上の bounded Eichler integrals の全体を Π でわったものを $E_\ell(\Delta, G)$ と書く．この時

$$\alpha : E_\ell(\Delta, G) \longrightarrow PH^1_\Delta(G, \Pi)$$

を $\alpha(\langle F\rangle)(g)(t) = F(g(t))g'(t)^{-1} - F(t)$ で定義すれば α は linear かつ injective である．(Kra [4]) さらに

$$PH^1_\Delta(G,\Pi) = \beta^*(A(\Delta,G)) \oplus \alpha(E_\ell(\Delta,G)) \quad (\text{Kra } [4]).$$

今 Δ と Δ' を2つの G-invariant union of components of $\Omega(G)$ とし，かつ $\Delta \subset \Delta'$ とすると $A(\Delta,G) \subset A(\Delta',G)$ であり，又 $PH^1_\Delta(G,\Pi) \supset PH^1_{\Delta'}(G,\Pi)$ である．そこで次の事を考える．すなわち，G を不変成分をもつ finitely generated Kleinian group とした時

$$PH^1_{\Omega(G)}(G,\Pi) = \beta^*(A(\Omega(G),G)) \overset{?}{\Leftrightarrow} G : \text{quasi-conformally stable}.$$

所で，とくに $\beta^*(A(\Omega(G),G)) \subset PH^1(G,\Pi)$ (Kra [4]) であるから次の事を問題にする．

$$PH^1(G,\Pi) = \beta^*(A(\Omega(G),G)) \overset{?}{\Leftrightarrow} G : \text{quasi-conformally stable}$$

以下でこの問題に対して肯定的な解を与える．又 G の quasi-conformal deformation に関する一つの応用も与える．

3. Cohomology と quasi-conformal stability.

$\{\gamma_1,\cdots,\gamma_N\}$ を a system of generators for G とする．

$$\mathrm{Hom}_p(G,\text{Möb}) \ni \theta \longmapsto (\theta(\gamma_1),\cdots,\theta(\gamma_N)) \in \text{Möb}^N$$

により $\mathrm{Hom}_p(G,\text{Möb}) \subset \text{Möb}^N$．$\text{Möb} = SL(2,\mathbb{C})/\pm I$: complex Lie group．そこで Möb の Lie algebra を $\mathfrak{g}$ とすれば

$$\mathfrak{g} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) : a+d=0 \right\}.$$

以下，Möb の単位元 e における接空間 $T_e(\text{Möb})$ と $\mathfrak{g}$ とを identify する．

$g\in$ Möb に対して，$Ad(g)\in GL(\mathfrak{g})$ ($GL(\mathfrak{g})$: group of all non-singular linear maps of $\mathfrak{g}$) を $Ad(g)(X)=d(A_g)_e(X)$ for $X\in\mathfrak{g}\,(=T_e(\text{Möb}))$ で定義する．ただし $A_g:\text{Möb}\longrightarrow\text{Möb}$ は $A_g(h)=g^{-1}\circ h\circ g$ for $h\in$ Möb なる写像．この時 $Ad: G\longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ は anti-homomorphism i.e. $Ad(g_1\circ g_2)=Ad(g_2)\circ Ad(g_1)$ for all g_1, $g_2\in G$．従って前と同様に parabolic cohomology space $PH^1(G,\mathfrak{g})\equiv PZ^1(G,\mathfrak{g})/B^1(G,\mathfrak{g})$ を得る．すなわち
$z\in PZ^1(G,\mathfrak{g})\Leftrightarrow z(g_1\circ g_2)=Ad(g_2)(z(g_1))+z(g_2)$ for all $g_1,g_2\in G$ & $\forall g\in G$: parabolic に対して $\exists X\in\mathfrak{g}$ such that $z(g)=Ad(g)(X)-X$.
又 $z\in B^1(G,\mathfrak{g})\Leftrightarrow\exists X\in\mathfrak{g}$ such that $z(g)=Ad(g)(X)-X$ for all $g\in G$.

$J:\mathfrak{g}\longrightarrow\Pi$ を $J(X)=-ct^2+2at+b$ で定義する．ただし $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}$．この時 $J(Ad(g)(X))=\rho(g)(J(X))$．従って J は isomorphism $\tilde{J}: PZ^1(G,\mathfrak{g})\longrightarrow PZ^1(G,\Pi)$ を induce する．($\tilde{J}(z)(g)=J(z(g))$ とすればよい)．又この isomorphism は $PH^1(G,\mathfrak{g})$ と $PH^1(G,\Pi)$ の間の isomorphism を induce する．

さて $z\in PZ^1(G,\mathfrak{g})$ とした時，z は uniquely determined by $(z(\gamma_1),\cdots,z(\gamma_N))\in\mathfrak{g}^N=T_e(\text{Möb})^N$．そこで

$$PZ^1(G,\mathfrak{g})\ni z\longmapsto(z(\gamma_1),\cdots,z(\gamma_N))\in\mathfrak{g}^N$$

なる対応により $PZ^1(G,\mathfrak{g})\subset\mathfrak{g}^N$ と見る．

$\{w_\alpha(g_1,\cdots,g_N)\}_{\alpha\in A}$ を set of all words in N letters $g_1,\cdots,g_N$ such that $w_\alpha(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)=e$ for all $\alpha\in A$ とする. 又 $\{w_\beta(g_1,\cdots,g_N)\}_{\beta\in B}$ を set of all words in N letters $g_1,\cdots,g_N$ such that $w_\beta(g_1,\cdots,g_N)$ は parabolic element. そこで $W_\alpha : \text{Möb}^N \longrightarrow \text{Möb}$ 及び $W_\beta : \text{Möb}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ を次のように定義する.

$$W_\alpha(g_1,\cdots,g_N) = w_\alpha(g_1,\cdots,g_N) \quad \text{for } (g_1,\cdots,g_N)\in \text{Möb}^N,$$
$$W_\beta(g_1,\cdots,g_N) = \mathrm{tr}^2 w_\beta(g_1,\cdots,g_N) - 4 \quad \text{for } (g_1,\cdots,g_N)\in \text{Möb}^N.$$

この時

$$\Big\{\bigcap_\alpha W_\alpha^{-1}(e)\Big\} \cap \Big\{\bigcap_\beta W_\beta^{-1}(0)\Big\} = \mathrm{Hom}_p(G, \text{Möb}).$$

さらに $L_{(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)}$ を left translation of Möb^N とした時

$$\Big\{\bigcap_\alpha \ker d(W_\alpha\circ L_{(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)})_{(e,\cdots,e)}\Big\} \cap \Big\{\bigcap_\beta \ker d(W_\beta\circ L_{(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)})_{(e,\cdots,e)}\Big\}$$
$$= PZ^1(G,\mathfrak{g}) \big(\subset T_e(\text{Möb})^N\big) \qquad (\text{see } [3], [8])$$

λ を Poincaré metric on $\Omega(G)$ とし, $A_1(\Omega(G),G) = \{\varphi\in A(\Omega(G),G) : |\lambda^{-2}\varphi|<1\}$ とする. $\varphi\in A_1(\Omega(G),G)$ に対して $\mu=\lambda^{-2}\overline{\varphi}$ とし, w^μ を μ-conformal self-mapping of $\hat{\mathbb{C}}$ such that $w^\mu(0)=0$, $w^\mu(1)=1$, $w^\mu(\infty)=\infty$ とすると, w^μ は compatible with G である. 従って $g\in\text{Möb}$ に対して $w=g\circ w^\mu$ とおくと $\exists\,\gamma^{(g,\varphi)}\in\text{Möb}$ such that $w\circ\gamma=\gamma^{(g,\varphi)}\circ w$ for all $\gamma\in G$. そこで $f : \text{Möb}\times A_1(\Omega(G),G) \longrightarrow \text{Möb}^N$ を

$$f(g,\varphi) = (\gamma_1^{(g,\varphi)},\cdots,\gamma_N^{(g,\varphi)})$$

で定義する. この時 $f(\text{Möb}\times A_1(\Omega(G),G)) \subset \mathrm{Hom}_{gc}(G,\text{Möb})$

$\subset \mathrm{Hom}_p(G, \text{Möb})$. さらに

$$d(L_{(r_1^{-1},\cdots,r_N^{-1})}\circ f)_{(e,0)}(T_e(\text{Möb})\times T_0(A_1(\Omega(G),G)))\subset PZ^1(G,\mathfrak{g})$$

であり，かつ

$$\tilde{\jmath}\,(d(L_{(r_1^{-1},\cdots,r_N^{-1})}\circ f)_{(e,0)}(T_e(\text{Möb})\times T_0(A_1(\Omega(G),G))))$$

$=$ *space of cocycles that correspond to Bers cohomology space* $\beta^*(A(\Omega(G),G))$ (Gardiner & Kra [3])

従って次の図を得る．

$$\text{Möb}\times A_1(\Omega(G),G)\xrightarrow{L_{(r_1^{-1},\cdots,r_N^{-1})}\circ f}\text{Möb}^N,\qquad \text{Möb}^N\xrightarrow{W_\alpha\circ L_{(r_1,\cdots,r_N)}}\text{Möb},\qquad \text{Möb}^N\xrightarrow{W_\beta\circ L_{(r_1\cdots r_N)}}\mathbb{C}$$

$$T_e(\text{Möb})\times T_0(A_1(\Omega(G),G))\xrightarrow{d(L_{(r_1^{-1}\cdots r_N^{-1})}\circ f)_{(e,0)}}T_e(\text{Möb})^N,\qquad T_e(\text{Möb})^N\xrightarrow{d(W_\alpha\circ L_{(r_1\cdots r_N)})_{(e\cdots e)}}T_e(\text{Möb}),\qquad T_e(\text{Möb})^N\xrightarrow{d(W_\beta\circ L_{(r_1\cdots r_N)})_{(e\cdots e)}}\mathbb{C}$$

$d(L_{(r_1^{-1},\cdots,r_N^{-1})}\circ f)_{(e,0)}(T_e(\text{Möb})\times T_0(A_1(\Omega(G),G)))\subset PZ^1(G,\mathfrak{g})$ であるから

$$d(L_{(r_1^{-1},\cdots,r_N^{-1})}\circ f)_{(e,0)}(T_e(\text{Möb})\times T_0(A_1(\Omega(G),G)))$$
$$\subset\{\bigcap_\alpha \ker d(W_\alpha\circ L_{(r_1\cdots r_N)})_{(e\cdots e)}\}\cap\{\bigcap_\beta \ker d(W_\beta\circ L_{(r_1\cdots r_N)})_{(e\cdots e)}\}.$$

従って今 $PH^1(G,\Pi)=\beta^*(A(\Omega(G),G))$ とすると

$$d(L_{(r_1^{-1}\cdots r_N^{-1})}\circ f)_{(e,0)}(T_e(\text{Möb}\times T_0(A_1(\Omega(G),G)))$$
$$=\{\bigcap_\alpha \ker d(W_\alpha\circ L_{(r_1\cdots r_N)})_{(e\cdots e)}\}\cap\{\bigcap_\beta \ker d(W_\beta\circ L_{(r_1\cdots r_N)})_{(e\cdots e)}\}$$

従って Weil [8] より $\exists U'$: *neighborhood of* $(e,\cdots,e)$ *in* Möb^N *such that*

$$\{L_{(r_1^{-1},\cdots,r_N^{-1})}\circ f(\text{Möb}\times A_1(\Omega(G),G))\}\cap U'$$
$$=\{\bigcap_\alpha (W_\alpha\circ L_{(r_1\cdots r_N)})^{-1}(e)\}\cap\{\bigcap_\beta (W_\beta\circ L_{(r_1\cdots r_N)})^{-1}(0)\}\cap U'$$

すなわち

$$f(\text{Möb}\times A_1(\Omega(G),G))\cap U=\{\bigcap_\alpha W_\alpha^{-1}(e)\}\cap\{\bigcap_\beta W_\beta^{-1}(0)\}\cap U$$

for $U=L_{(r_1\cdots r_N)}(U')$: *neighborhood of* $(r_1,\cdots,r_N)$ *in* Möb^N. 一方

$$f(\text{Möb}\times A_1(\Omega(G),G))\subset Hom_{qc}(G,\text{Möb}),$$
$$\{\bigcap_\alpha W_\alpha^{-1}(e)\}\cap\{\bigcap_\beta W_\beta^{-1}(0)\}=Hom_p(G,\text{Möb}).$$

さらに $Hom_{qc}(G,\text{Möb})\subset Hom_p(G,\text{Möb})$. 従って

$$Hom_p(G,\text{Möb})\cap U=Hom_{qc}(G,\text{Möb})\cap U.$$

従って G は *quasi-conformally stable*.

以上により，G が *finitely generated Kleinian group* で，かつ $PH^1(G,\Pi)=\beta^*(A(\Omega(G),G))$ ならば G は *quasi-conformally stable* である事が示された．(なお，以上の証明方法は，本質的に Gardiner & Kra [3] による．)

次に G を，不変成分をもつ *finitely generated Kleinian group* とする．そこで，このような G に対して，G : *quasi-conformally stable* $\Rightarrow PH^1(G,\Pi)=\beta^*(A(\Omega(G),G))$ を示す．そのために Maskit の *Combination Theorem* I, II を用いて，G を基本的な群に分解する．(Maskit [5])

(1). Γ を *non-elementary Kleinian group*，Γ_1,Γ_2 を *finitely generated Kleinian group* とし，さらに $\Gamma\overset{\text{I}}{=}\langle\Gamma_1,\Gamma_2\rangle$

とする．(i.e. Γは，Maskitの Combination Theorem Iにより)，部分群Γ_1, Γ_2から generate されるとする.) ここで$\Gamma_1 \cap \Gamma_2$は parabolic cyclic か elliptic cyclic かもしくは identity のみとする．この時Γが quasi-conformally stable ならΓ_1, Γ_2も共に quasi-conformally stable である．(Nakada [7])

(2). Γを non-elementary Kleinian group，Γ_1を finitely generated Kleinian group，$g \in$ Möb とし，さらに $\Gamma \overset{\mathrm{II}}{=} \langle \Gamma_1, g \rangle$ とする．(i.e. Γは Maskit の Combination Theorem IIにより 部分群Γ_1及び$g \in$ Möb から generate されるとする.) ここで conjugated subgroup (see Maskit [5]) は parabolic cyclic か elliptic cyclic かもしくは identity のみとする．この時，Γが quasi-conformally stable ならΓ_1も quasi-conformally stable である．(Nakada [7])

そこでGを不変成分をもつ finitely generated Kleinian group とする．この時 $G_1, \cdots, G_s$ (G_i : elementary group か finitely generated quasi-Fuchsian group かもしくは finitely generated totally degenerate group without APT's) が存在して Gは$G_1, \cdots, G_s$から generate される．ただし generate のされ方は Maskit の Combination Theorem I, II の仮定を満たすように generate される．(see Maskit [5]) (注. elementary groups, finitely generated quasi-Fuchsian groups, finitely generated

totally degenerate groups without APT's を基本的な群という)
今，Gを quasi-conformally stable とする．この時，上の2つの結果(1),(2) を次々に応用する事により，$G_1, \cdots, G_s$ が quasi-conformally stable である事を得る．一方 totally degenerate groups without APT's は not quasi-conformally stable (例えば Gardiner & Kra [3])．従って $G_1, \cdots, G_s$ は elementary group であるか finitely generated quasi-Fuchsian group である．所で $PH^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G))$ である事と $G_1, \cdots, G_s$ が elementary か finitely generated quasi-Fuchsian である事とは同値．(Nakada [6])．従って G が quasi-conformally stable ならば $PH^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G))$．

以上により，不変成分をもつ finitely generated Kleinian group G に対して，G : quasi-conformally stable $\Leftrightarrow$ $PH^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G))$ が示された．さらに Nakada [6] とを合わせると次の定理を得る．

定理．G を不変成分をもつ finitely generated Kleinian group とすると次の3つの条件は同値である．

① G は quasi-conformally stable.

② $PH^1(G, \Pi) = \beta^*(A(\Omega(G), G))$

③ G は Maskit の Combination Theorem I, II により elementary groups か finitely generated quasi-Fuchsian groups $G_1, \cdots, G_s$

に分解される.
この系として次を得る.

系. Gを不変成分をもつ finitely generated Kleinian group とし, wを quasi-conformal self-mapping of $\hat{\mathbb{C}}$ compatible with Gとする. この時Gが quasi-conformally stable ならば $w\circ G\circ w^{-1}$ も又 quasi-conformally stable である.

参考文献

[1] L. Bers : Inequalities for finitely generated Kleinian groups, J. d'Analyse Math., 18 (1967), 23-41.

[2] L. Bers : On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups I, Ann. of Math., 91 (1970), 570-600.

[3] F. Gardiner and I. Kra : Quasi-conformal stability of Kleinian groups, Indiana Univ. Math. J., 21 (1972) 1037-1059.

[4] I. Kra : On cohomology of Kleinian groups II, Ann. of Math., 90 (1969), 575-589.

[5] B. Maskit : Decomposition of certain Kleinian groups, Acta Math., 130 (1973), 243-263.

[6] M. Nakada : *Cohomology of finitely generated Kleinian groups with an invariant component*, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 699 - 711.

[7] M. Nakada : *Quasi-conformal stability of finitely generated function groups*, to appear.

[8] A. Weil : *Remarks on cohomology of groups*, Ann. of Math., 80 (1964), 149 - 157.