数理解析研究所講究録
第 318 巻 1978 年 90-98

Klein群の成分の補助領域

山形大・教育　　佐々木武彦

一次変換 $z \longmapsto (az+b)/(cz+d)$, $ad-bc=1$, を要素とする一つの群をGとする。$z_0 \in \hat{C} = C\cup\{\infty\}$ がGの極限点である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists z \in \hat{C}$, $\exists\{g_n\}$, $g_n \in G$ で相異なる, s.t. $\lim_{n\to\infty} g_n(z) = z_0$. Gの極限点の集合を$\Lambda(G)$と書く。$\Omega(G) = \hat{C}\setminus\Lambda(G)$ とおきGの不連続領域という。$\Omega(G)\neq\phi$ なる群GをKlein群という。以後GをKlein群とする。すると$\Omega(G)/G$ は

$$\Omega(G)/G = S_1 + S_2 + \cdots$$

とdisjointなリーマン面S_iの和となる。Ahlforsの有限性定理はGが有限生成ならば上式の右辺は有限和でかつ各S_iはcompactなリーマン面から有限個の点を除いたものになると主張するものである。

一方$\Lambda(G)$については空集合か1点かまたは2点よりなる

場合を除くとそれは nowhere dense perfect set であることが知られている。しかし $\Lambda(G)$ の性質についてはまだ多くのことは知られておらず，それの二次元測度は 0 ではないかという問題も未解決のようである。

以後 G を更に有限生成と仮定する。$\Omega(G)$ の成分を G の成分といい一般に Δ で表わす。すると $\partial\Delta \subset \Lambda(G)$ である。但し $\partial\Delta$ は Δ の境界を表わす。$G_\Delta = \{\gamma \in G \mid \gamma(\Delta) = \Delta\}$ とおき Δ の成分部分群と呼ぶ。Δ_1, Δ_2 を G の成分として Δ_1 の Δ_2 に関する補助領域を次の様にして定義する。

$\partial\Delta_1 \subset \Lambda(G)$ であるから $\overline{\Delta}_1^c$ の成分で Δ_2 を含むものがある。それを Δ_1^* と書く。Ahlfors の有限性定理より G_{Δ_1} は有限生成 Klein 群で Δ_1 は G_{Δ_1} の成分である。G_{Δ_1} の成分部分群 $G_{\Delta_1^*}$ はまた Ahlfors の有限性定理より有限生成 Klein 群で Δ_1^* は $G_{\Delta_1^*}$ の不変成分である。明らかに $G_{\Delta_1^*}$ は Δ_1 を含むもう一つの不変成分をもつ。よって Maskit の定理 “二つの不変成分をもつ有限生成 Klein 群は quasi-Fuchs 群である” より $G_{\Delta_1^*}$ は quasi-Fuchs 群で $\Lambda(G_{\Delta_1^*}) = \partial\Delta_1^*$ を不変 Jordan 閉曲線としてもつ。$\overline{\Delta_1^*}^c$ を Δ_1 の Δ_2 に関する補助領域と呼び D_{12} または $D(\Delta_1, \Delta_2)$ または単に D と書く。同様に Δ_2 の Δ_1 に関する補助領域が定義され D_{21} 等と書く。補助領域間の性質として容易に次のことがわかる。

i) $D_{12} \supset \Delta_1$, $D_{21} \supset \Delta_2$

ii) $\partial D_{12} \subset \partial \Delta_1$, $\partial D_{21} \subset \partial \Delta_2$

iii) $D_{12} \cap D_{21} = \phi$

iv) $\partial D_{12} \cap \partial D_{21} = \partial \Delta_1 \cap \partial \Delta_2$

これらの性質より二つの成分の位置関係は互に外部にあるJordan閉曲線で囲まれた補助領域間の位置関係と見なすことが出来て視覚的になる。また補助領域は二つより多くの成分間の位置関係を見るのにも有効である。例えば次のことが成り立つ。

Δ_1, Δ_2, Δ_3 をGの互に異なる成分とし D_{ij} を Δ_i の Δ_j に関する補助領域とする $(i, j = 1, 2, 3)$。すると $D_{ij} \neq D_{ik}$ は高々一つの (i, j, k) についてのみ成立する。

補助領域を用いて成分部分群と成分の共通境界点の関係を示す次の定理が証明出来る。

定理. G：有限生成Klein群, $\{\Delta_i\}_{i=1}^{n}$：Gの成分の任意な集合(無限個である場合も含む)。すると

$$\Lambda\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_{\Delta_i}\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \partial\Delta_i$$

$n \geqq 3$ のときは $\bigcap \partial\Delta_i$ は高々2点よりなる。

次に rotation order を定義する。γ を G の loxodromic な元とし Δ を G の成分とする。もし γ の不動点が $\partial\Delta$ にあれば $\gamma^r \in G_\Delta$ となる正整数 r が存在することが Maskit により示されている。そのような r の最小数を γ の Δ に関する rotation order と呼ぶ。この rotation order に関しては補助領域を用いて次のことが示せる。

定理. G：有限生成 Klein 群，γ：G の loxodromic な元，Δ_1, Δ_2：G の成分。もし γ の不動点が $\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2$ にあれば γ の Δ_1 に関する rotation order と Δ_2 に関する rotation order は等しい。

さて，$\Lambda(G)$ は $\bigcup_{\Delta} \partial\Delta$ と一致するという誤まって認識されていたことが Abikoff 氏により1971年に訂正された。そして residual limit set と呼ばれる集合 $\Lambda_0(G) = \Lambda(G) \setminus \bigcup_{\Delta} \partial\Delta$ が発見され研究対象となった。Abikoff 氏は1973年の論文で次の事を示した。

有限生成Klein群に関しては residual limit set は関数群と quasi-Fuchs 群の Z_2-extension である場合を除いて空でない。そしてその濃度は連続体の濃度である。

次に述べる定理は residual limit set が生成元の集合にとって重要であることを主張するものである。その証明には補助領域が用いられる。

定理. G: 有限生成Klein群, S: Gの有限な生成元の集合。もしGが関数群でも quasi-Fuchs 群の Z_2-extension でもなければSは次の性質をもつ生成元の集合S_0に変えれる。

i) S_0の各元は$\Lambda_0(G)$に不動点をもつ loxodromic な元である。

ii) S_0の元の個数はSの元の個数を越えない。

証明は三段階に分けて行なわれるが補助領域及びそれから導かれた定理が有効に使われる第二段階について解説する。

第二段階: 与えられた loxodromic な元ばかりからなる生成元の集合を元の個数をふやさずに少くとも一つは$\Lambda_0(G)$に不動点をもつ loxodromic な元を含む loxodromic な元ばかりか

らなる生成元の集合に変えること。

これを行なうには二つの loxodromic な元から $\Lambda_0(G)$ に不動点をもつ loxodromic な元を構成することが必要になる。その構成法を与えるのが次の補題である。

補題：γ_i, γ_j：G の loxodromic な元で不動点を共有しないもの。更に γ_i, γ_j の4つの不動点は $\Lambda_0(G)$ にないとする。すると次のいずれかの条件が満されると $\gamma_i \gamma_j^m$ が $\Lambda_0(G)$ に不動点をもつ loxodromic な元となるような整数 m が存在する。

i) γ_i, γ_j の4つの不動点全部を境界にもつような G の成分は存在しない。

ii) γ_i の不動点を境界に有する成分を Δ とする。γ_i の Δ に関する rotation order は1より大でかつ γ_j の不動点は $D(\Delta, \gamma_i(\Delta))$ にある。

iii) Δ は ii) と同じものとする。γ_i の Δ に関する rotation order は2より大で γ_j の不動点は $\partial D(\Delta, \gamma_i(\Delta))$ にある。

ii) の証明。 ξ_j, ξ_j' を γ_j の repelling と attractive な不動点とする。$D = D(\Delta, \gamma_i(\Delta))$ とおく。$D(\Delta, \gamma_i(\Delta)) \cap D(\gamma_i(\Delta), \Delta) = \phi$ より容易に $D \cap \gamma_i(D) = \phi$ が出る。$\xi_j \in$

D, $\gamma_i(\xi_j') \in \gamma_i(D)$ より十分大なる m について $\gamma_i\gamma_j^m$ は loxodromic でその不動点は $\partial D \subset \Lambda(G)$ で分離されている。従って $\Lambda_0(G)$ にある。

もし補題のどれかの条件を満す γ_i, γ_j があれば $\gamma_i \to \gamma_i\gamma_j^m$ ととりかえて所要の生成元の集合となる。よってこの補題の判定法にひっかからない場合を吟味することにより第二段階の証明が完成する。まず i) が使用出来ない場合というのはどの二つの元をもってきてもそれらの4つの不動点を境界に有する成分が存在する場合である。それらの場合に ii), iii) を適用することになる。

さて, Klein 群 G が web group であるとは G が有限生成で G の各成分 Δ について G_Δ が quasi-Fuchs 群である場合をいう。但し通常は G 自身が quasi-Fuchs 群である場合は除かれる。この群は最近重要視されているが, web group を除くと上の定理は次に述べる形に精密化される。その前に一つ定義を述べる。$p \in \Lambda_0(G)$ が第一種の residual limit point である。$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\{C_n\}$ s.t. $n \mapsto \infty$ のとき $C_n \to p$ でかつ C_n は C_{n-1} と C_{n+1} を分離する。但し, C_n は G の成分の閉包の補成分の一つの境界である。このような点の集合を $L_1(G)$ と書

き第一種 residual limit set と呼ぶ。

定理. G: 有限生成 Klein 群, S: G の有限な生成元の集合。もし G が関数群でも web group でもなければ S は次の性質をもつ生成元の集合 S_1 に変えれる。

i) S_1 の各元は $L_1(G)$ に不動点をもつ loxodromic な元である。

ii) S_1 の元の個数は S の元の個数を越えない。

証明はまた補助領域を使用してなされる。

参考文献

1. W. Abikoff, Residual limit sets of Kleinian groups, Acta Math., 130 (1973), 127-144.
2. B. Maskit, Intersections of component subgroups of Kleinian groups, Ann. of Math. Studies, 79 (1974), 349-367.
3. T. Sasaki, Boundaries of components of Kleinian groups, Tôhoku Math. J., 28 (1976), 267-276.

4. T. Sasaki, On common boundary points of more than two components of a finitely generated Kleinian group, Tôhoku Math. J., 29 (1977), 427–437.

5. T. Sasaki, The residual limit sets and the generators of finitely generated Kleinian groups, to appear in Osaka J. Math..