数理解析研究所講究録
第318巻 1978年 99-114

Hausdorff dimension and Poincaré dimension for the Schottky cusp

金沢大・理　赤座　暢

まえがき

1．Gを不連続群，Eをその limit set とする。Gにかんする保型函数の存在を示すのに必要な $-2m$ 次元 Poincaré 級数 $\Theta_{2m}(z)$ （$m \geq 2$，整数）の収束問題は，既に前世紀末に Poincaré により解決された。これに対しEの Hausdorff measure の研究は1964年頃より始まった比較的新しい研究である。そしてこの両者の間に密接な関係のある事が最近次第に判明してきた。

最初に Hausdorff dimension と Poincaré dimension の関係を歴史的に簡単に説明してみよう。

Fuchs 群では $\Theta_2(z)$ は常に発散するであろうという1884年の Poincaré 予想（[16]）は，1891年に Burnside が第2種の Fuchs 群では常に収束する事を示し，否定的に解決し

た（[10]）。　これに対し第1種のFuchs群では1892年にRitterが，基本領域がコンパクトの場合にPoincaré予想の正しい事を証明した（[17]）。　而しながら一般の第1種Fuchs群に対しては，1933年のP. J. Myrbergの証明まで待たねばならなかった（[11], [12], [13]）。

2.　今 $G \ni S_i(z) = (a_i z + b_i)/(c_i z + d_i)$, $(a_i d_i - b_i c_i = 1)$ $i = 0, 1, 2, \cdots$（ただし $S_0(z) = z$）に対し

$$P(G) = \inf\{\mu ; \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^{-\mu} < +\infty\},$$

$$d(E) = \inf\{d ; M_d(E) = 0\}$$

をそれぞれGのPoincaré dimension，EのHausdorff dimensionと定義しよう．H. Peterson (1948) によれば，第1種のFuchs群に対しては，任意の実数 $r\,(>0)$ に対しては $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i z + \overline{a_i}|^{-r} < +\infty$，$(r > 2)$ を証明した（[15]）。Ritterの定理とこのPetersonの定理により，Gが第1種のFuchs群に対しては $1 = d(E) = \frac{P(G)}{2}$ が判るのである。

Akazaにより1973年Schottky群に対しては $d(E) = \frac{P(G)}{2}$ が証明された（[3]）。そこで比較的簡単な群として残っていた第2種のFuchs群に対して $d(E) = \frac{P(G)}{2}$ が当然予想され，又これが証明されたとして，一般のKlein群に対して $d(E) = \frac{P(G)}{2}$ が成立するであろうという問題が提起され今日に至っているのである。

第2種Fuchs群に対しては，1971年 Beardon によって一般に $0 < d(E) \leqq \frac{P(G)}{2} < 1$（parabolic な元が含まれるときは $\frac{1}{2} < d(E) \leqq \frac{P(G)}{2} < 1$）が証明された（[7],[8],[9]）。更に1976年にPatterson により第2種Fuchs群がparabolic の元を含まぬときは $d(E) = \frac{P(G)}{2}$ が，parabolic の元を含むときは $\frac{P(G)}{2} \geqq \frac{2}{3}$ のとき $d(E) = \frac{P(G)}{2}$ の成立する事が証明された（[14]）。

3. 以下に若干の注意を述べよう。G が elementary 群のときは $d(E) = \frac{P(G)}{2}$ は必ずしも成立しない。即ち G が parabolic cyclic group のときは $0 = d(E) < \frac{P(G)}{2} = \frac{1}{2}$ であるからである。又一般の有限生成 Klein 群で $0 < d(E) \leqq \frac{P(G)}{2} < 2$ が証明されたとすれば $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^{-4} < +\infty$ であるから $M_2(E) = 0$ を得て，Ahlfors の予想（[1]）の正しい事が判るので，この問題の重要性がわかる。

4. 以上で第1種，第2種の Fuchs 群及び Schottky 群について $d(E) = \frac{P(G)}{2}$ 問題を扱ってきて，殆んど予想の正しい事が証明された。ここでは Schottky 空間の境界群である Schottky cusp について扱うが，現在は $\frac{1}{2} < d(E) \leqq \frac{P(G)}{2} < 2$ の成立する事が証明されたのであり，$d(E) = \frac{P(G)}{2}$ の解決の第一歩を踏み出したばかりである。証明の本質は Schottky群のときの方法を用い，parabolic の元を消去する

ように，Schottky cusp のある無限生成部分群を構成し，これが，有限生成 Schottky 群の極限として得られる事に着目し，有限生成 Schottky 群で成立する性質の極限移行によってもなほ成立する性質を用いるのである。委しい証明はいずれかの機会に発表するが，一部の証明はすでに発表されたものもある（[4]，[5]，[6]）。

§1.　準備，記号の説明

5.　互に外部にある円群 $\{H_i, H_i'\}_{i=1}^{\infty}$ でかこまれた領域を B とする。ここで $\{H_i, H_i'\}_{i=1}^{q}$ は $q \to \infty$ に対し有限な点 Q に収束すると仮定する。

T_i を H_i の外部を H_i' の内部にうつす *loxodromic* な変換とすれば，$\mathcal{G} = \{T_i, T_i^{-1}\}_{i=1}^{\infty}$ は無限生成 Schottky 群 G の生成系を作っている。任意の整数 $q\,(>1)$ をとり，$\mathcal{G} \supset \mathcal{G}_N = \{T_i, T_i^{-1}\}_{i=1}^{q}$ $(N = 2q)$ を考える。$\mathcal{G}_N$ は G の Schottky 部分群 G_N を生成する．$\{H_i, H_i'\}_{i=1}^{q}$ でかこまれた領域を B_N とすると，B_N は G_N の基本領域と一致する。E_N，E をそれぞれ G_N，G の *limit set* とする。

円群 $\{H_i, H_i'\}_{i=1}^{\infty}$ の Q への集積の状態を規制するために条件をつける。今 $\{H_i, H_i'\}_{i=1}^{\infty} \ni {}^{\forall}H$ の半径を $r(H)$ とし，$l(H) = \inf |z - \zeta|$，$z \in H$，$\zeta \in \{H_i, H_i'\}_{i=1}^{\infty} - \{H\}$ とし

$$\text{(A)}\qquad \frac{r(H)}{l(H)} \leqq K$$

なるKが存在するという条件をつけよう。

G内の任意の2元SとTの積を $ST(z)=S(T(z))$ と定義すれば，$G \ni {}^{\forall}U$ は $U = T_{i_n}\cdots T_{i_2}T_{i_1}$ $(T_{i_j} \in \mathcal{G}\ (1 \leqq j \leqq n),$ $T_{i_{j+1}}^{-1} \neq T_{i_j})$ と表わされる。この n を U の *grade* とよび，*grade* を明確にするために U を $S_{(n)}$ と書くことにする。
生成元 $T_i\ (\in \mathcal{G})$ を円 H_i に対応させ，H_i, H_i' を C_{T_i}, $C_{T_i^{-1}}$ で表わすと $C_{T_i} = T_i(C_{T_i^{-1}})$ である。そして D_{T_i}, $D_{T_i^{-1}}$ を C_{T_i} と $C_{T_i^{-1}}$ でかこまれた閉円板をあらわすとする。
G_N の n *grade* の変換 $S_{(n)} = T_{i_n}\cdots T_{i_2}T_{i_1}$ に対して，$S_{(n)}(B_N)$ は1つの外境界円 $S_{(n)}(C_{T_{i_1}^{-1}})$ と $N-1$ 個の内境界円 $S_{(n)}(C_{T_j})$ $(T_j \neq T_{i_1}^{-1},\ T_j \in \mathcal{G}_N)$ でかこまれている。この内境界円を *grade* n の円とよぶ。*grade* n の円の数は $N(N-1)^n$ である。

6.　$G \ni T, S\ (\neq T^{-1})$ をとり，I_S, I_T, I_{ST} をそれぞれ S, T, ST の *isometric circle* とすれば，それらの半径に対して

$$(1.1)\qquad R_{ST} = \frac{R_S \cdot R_T}{|T(\infty) - S^{-1}(\infty)|}$$

が成立する。まず (1.1) を用い G_N に対してきまる函数をつくる。

$G_N \ni {}^{\forall}S_{(n)} = T_{i_n} \cdots T_{i_2} T_{i_1}$ $(T_{i_j} \in \mathcal{G}_N)$ をとり，
$T(\neq T_{i_1}^{-1}) \in \mathcal{G}_N$ なる生成元と $z \in D_T$ を固定すると

$$(1.2) \qquad \left|\frac{dS_{(n)}(z)}{dz}\right|^{\frac{\mu}{2}} = \left(\frac{R_{S_{(n)}}}{|z - S_{(n)}^{-1}(\infty)|}\right)^{\mu}, \quad (0 < \mu < 4)$$

を得る。 $S_{(n)}^{-1} = T_{i_1}^{-1} \cdots T_{i_n}^{-1}$ は $S_{(n)}$ の逆元を表わし，$S_{(n)}^{-1}(\infty) \in D_{T_{i_1}^{-1}}$ $\neq D_T$ である。 $T_{i_1}^{-1} \neq T$, $T_{i_j} \neq T_{i_{j+1}}^{-1}$ $(1 \leqq j \leqq n-1)$ なるすべての $S_{(n)}$ $(\in G_N)$ について $(N-1)^n$ 個の和をつくると

$$(1.3) \qquad \chi_{n,N}^{(\mu;T)}(z) = \sum_{S_{(n)} \in G_N} \left(\frac{R_{S_{(n)}}}{|z - S_{(n)}^{-1}(\infty)|}\right)^{\mu}$$

なる函数を得る。これを $T(\in \mathcal{G}_N)$ にかんする *order* n の μ 次元 *computing function* という。全部で $\mathcal{G}_N$ の生成元の数 N 個だけ *computing function* $\chi_{n,N}^{(\mu;T)}(z)$ が存在する。勿論 $\chi_{n,N}^{(\mu;T)}(z)$ の定義域は D_T である。
(1.3) の各項は >0 であるから，$N \to +\infty$ とすれば，${}^{\forall}z \in D_T$ に対して *limit* が $+\infty$ もこめて一意にきまる。即ち

$$(1.4) \qquad \lim_{N\to\infty} \chi_{n,N}^{(\mu;T)}(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{S_{(n)} \in G_N} \left(\frac{R_{S_{(n)}}}{|z - S_{(n)}^{-1}(\infty)|}\right)^{\mu}$$

$$= \sum_{S_{(n)} \in G} \left(\frac{R_{S_{(n)}}}{|z - S_{(n)}^{-1}(\infty)|}\right)^{\mu}.$$

これを群 G の生成元 $T(\in \mathcal{G})$ にかんする *order* n の μ 次元 *limiting computing function* といい $\chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z)$ であらわす

([4], [5])。

この函数を用いて次の定義を与える。

定義. G の $T(\in \mathcal{G})$ にかんする μ 次元 *limiting computing function* の列 $\{\chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ があたえられたとせよ。今ある T とある $z \in D_T$ に対し

$$(1.5) \qquad \underset{n\to\infty}{\mathrm{limit}}\ \chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z) = 0 \quad (\text{or } \infty)$$

ならば G を μ-*convergent* (*or divergent*) *type* という。又ある T とある $z \in D_T$ に対し

$$(1.6) \qquad 0 < \varliminf_{n\to\infty} \chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z) < +\infty$$

ならば, G を μ-*finite type* という。

7. G にかんする結果を出す前に G_N と E_N にかんして得られた以下の結果を述べておく ([2], [3])。

Proposition 1 ([3]). 以下の３つの命題は互に同値である。

(1). ${}^{\exists}T(\in \mathcal{G}_N)$ と ${}^{\exists}z_0 \in E_N \cap D_T$ に対し

$$(1.7) \qquad \lim_{n\to\infty} \chi_{n,N}^{(\mu;T)}(z_0) = +\infty \quad (\text{or } 0)$$

(2). ${}^{\forall}T(\in \mathcal{G}_N)$ に対し D_T で一様に

$$(1.8)\qquad \lim_{n\to\infty} \chi_{n,N}^{(\mu;T)}(z) = +\infty \quad (\text{or } 0)$$

$$(3).\qquad M_{\frac{\mu}{2}}(E_N) = +\infty \quad (\text{or } 0).$$

さて $H(z)$ をその *pole* が G_N の *limit set* E_N にふくまれない有理函数とする。$\mu\,(>0)$ を整数とし，$z_j \in (a_j z + b_j)/(c_j z + d_j) \in G_N$ に対し $\mathit{H}_\mu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} H(z_j)(c_j z + d_j)^{-\mu}$ を $(-\mu)$ 次元 Poincaré 級数という。任意の実数 $\mu\,(>0)$ に対し $P_\mu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} |c_j z + d_j|^{-\mu}$ を $(-\mu)$ 次元 P 級数という。これ等の級数について次の結果を得る。

Proposition 2 ([2]). 次の4つの命題は同値である。

(i) $P_\mu(z)$ は補集合 $(E_N)^c$ で局所一様収束する。

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^{-\mu} < +\infty$.　(iii) $\sum_{m=1}^{\infty} l_m^{(\mu)} < +\infty$, ここで $l_m^{(\mu)}$ は $(m-1)$ *grade* のすべての円の半径 $r_{(m-1)}$ の $\frac{\mu}{2}$ 乗の和をあらわす。　(iv) $M_{\frac{\mu}{2}}(E_N) = 0$.

以上の *Proposition* 1 及び 2 を用いると E_N の Hausdorff 次元と G_N の Poincaré 次元に対して次の結果を得る。

Proposition 3 ([3]). $d(E_N) = \dfrac{P(G_N)}{2}$.

Proposition 4 ([3]). $d(E_N) = \dfrac{\mu_0}{2}$ とおくと

$$0 < M_{\frac{\mu_0}{2}}(E_N) < +\infty .$$

§ 2.　$\chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z)$ の性質

8.　ここでは円群 $\{H_i, H_i'\}_{i=1}^{\infty}$ が有限な一点 Q に集積する場合を扱い，その集積の状況に制限をあたえるために条件 (A) を考えた。今後簡単のためにかかる群を G(A) と表わすことにする。先ず次の定理を得る。

Theorem 1.　G(A) が μ-*convergent* (*or divergent*) *type* ならば

$$(2.1)\qquad \lim_{N\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\chi_{n,N}^{(\mu;T)}(z)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty}\chi_{n,N}^{(\mu;T)}(z)\right) = 0 \quad (\text{or } \infty).$$

Theorem 2.　$\frac{\mu_0}{2}\,(=d(E))$ とせよ。すると $\forall\mu<\mu_0$ に対して $M_{\frac{\mu}{2}}(E)=+\infty$ と G(A) が μ-*divergent type* であることと同値である。

9.　我々は G(A) を $\{\chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ にかんして，3つの型即ち μ-*convergent*，μ-*divergent* と μ-*finite type* の型に分類した。果してこれ以外の型がおこるであろうかという問題がおこる。即ち $\exists T$, $\exists z\in D_T$ に対して

$$\varliminf_{n\to\infty}\chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z) < \varlimsup_{n\to\infty}\chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z) = +\infty$$

又は

$$0 = \varliminf_{n\to\infty}\chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z) < \varlimsup_{n\to\infty}\chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z)$$

なる場合も考えられる。この事について以下に解答を与える。

そのために以下の２つの Lemma を用意する。

Lemma 1. $^{\exists}T$, $^{\exists}z_0 \in D_T$ に対して $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z_0) = +\infty$ とせよ。すると G(A) は μ-*divergent type* である。

Lemma 2. $^{\exists}T$, $^{\exists}z_0 \in D_T$ に対して $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z_0) = 0$ とせよ。すると G(A) は μ-*convergent type* である。

以上の Lemma 1 と 2 を用いると次の定理を得る。

Theorem 3. μ を任意の固定した数とする。すると G(A) は μ-*divergent type* か, μ-*convergent type* か, μ-*finite type* のいずれかである。

§3. G(A) の *limit set* と *computing function* との関係

G(A) の *limit set* E と *limiting computing function* の間の関係を述べる。証明は非常に複雑であるが, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{n,\infty}^{(\mu;T)}(z) > 0$ より $M_{\frac{\mu}{2}}(E) > 0$ がでてくる。この対偶をとれば Lemma 2 より次の定理を得る。

Theorem 4. $M_{\frac{\mu}{2}}(E) = 0$ ならば, G(A) は μ-*convergent type* である。E の Hausdorff 次元 d(E) を $\frac{\mu_0}{2}$ とおく。すると G(A) は μ_0-*divergent type* でも μ_0-*convergent type* でも

ない事が証明でき，定理４より次の定理を得る。

Theorem 5. $G(A)$ は μ_0-finite type である。従って $0 < M_{\frac{\mu_0}{2}}(E) \leqq +\infty$ である。

次の問題が生ずる。

Problem. $d(E) = \frac{\mu_0}{2}$ に於いて，$M_{\frac{\mu_0}{2}}(E) < +\infty$ か？

次にEの Hausdorff 次元 $d(E) = \frac{\mu_0}{2}$ より大きい $\frac{\mu}{2}$ に対しては次の結果を得る。

Theorem 6. $G(A)$ が μ-convergent type なるための必要十分条件は $M_{\frac{\mu}{2}}(E) = 0$，従って $\frac{\mu}{2} > \frac{\mu_0}{2} = d(E)$ である。

定理４より十分条件は明らか。必要条件の証明をする。$G(A)$ が μ-convergent type であると仮定して，$M_{\frac{\mu}{2}}(E) > 0$ とすれば，$\frac{\mu}{2} \leqq \frac{\mu_0}{2} = d(E)$ である。所が，$\frac{\mu}{2} < \frac{\mu_0}{2}$ に対して定理２より $G(A)$ は μ-divergent type である。又 $\frac{\mu}{2} = \frac{\mu_0}{2}$ に対して，定理５より $G(A)$ は μ-finite type である。故にいずれにしても矛盾である。故に $M_{\frac{\mu}{2}}(E) = 0$ である。

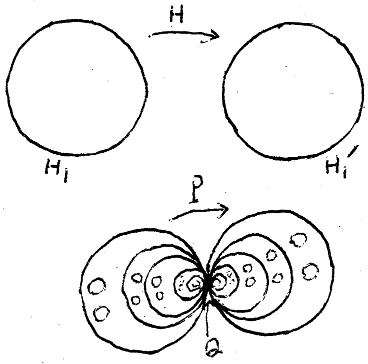
§4. G(A)の Schottky cusp への応用

$H_1, H_2, \cdots, H_n$; hyperbolic 又は loxodromic な変換

P ; parabolic な変換とする。

G を H_i $(1 \leqq i \leqq n)$ と P で生成された Schottky cusp とする。$\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n} \{P^{-i} H_j^{\varepsilon} P^{i}\} = \mathcal{G}'$，$(\varepsilon = \pm 1)$ で生成された G の無限生成

部分群を G' とする。説明のためには $n=1$ で充分で一般の場合も全く同様である。即ち $G=\langle H, P\rangle$, $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}\{P^{-i}H^{\varepsilon}P^{i}\} = \mathcal{G}'$ $(\varepsilon=\pm 1)$ の場合を扱う。



$\mathcal{G}'$ で生成された G の部分群を G' とする。$\mathcal{G}'$ はすべて *loxodromic* な変換で，図の如く $\mathcal{G}'$ の各元に対応する H_1, H_1' の像に対応する円群は P の接点 Q に集積する。

G' について次の事が判る。

Lemma 3.　G' は G の正規部分群である。

Lemma 4.　G' の *limit set* を E' とすれば，$E=E'$。

故に　$M_{\frac{\mu}{2}}(E)=M_{\frac{\mu}{2}}(E')$　である。

Lemma 5.　G' は条件(A)をみたす群 $G(A)$ である。

定理6より次の結果を得る。

Theorem 7.　$M_{\frac{\mu}{2}}(E')=0$　と G' が *μ-convergent type* であることは同値である。

一般論として，不連続群 G に対して，

$S_j(z)=(a_jz+b_j)/(c_jz+d_j)$　$(a_jd_j-b_jc_j=1)\in G$　に対して

Lemma 6.　$\sum_{S_j\in G}|c_jz+d_j|^{-\mu}<+\infty \iff \sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^{-\mu}<+\infty$.

勿論 *Schottky cusp* G に対して Lemma 6 は成立する。さて *Schottky cusp* G とその以上で作った正規部分群 G' に対して

$G \supset G'$ であるから $G' \ni {}^\forall S_j'(z) = (a_j' z + b_j')/(c_j' z + d_j')$ $(a_j' d_j' - b_j' c_j' = 1)$ とすれば

Lemma 7. $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^{-\mu} < +\infty \Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |c_j'|^{-\mu} < +\infty$

を得る。

以上の Lemma を用いると次の主要結果を得る。

Theorem 8. *Schottky cusp* G とその以上で作った部分群 G' に対して

$$\sum_{S_j \in G} |c_j z + d_j|^{-\mu} < +\infty \Longrightarrow G' \text{ は } \mu\text{-}\textit{convergent type}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} < d(E) \leqq \frac{P(G)}{2} < 2 \quad \text{である。}$$

証明. Lemma 6, 7 より $\sum_{S_j \in G} |c_j z + d_j|^{-\mu} < +\infty$ より $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j'|^{-\mu} < +\infty$。 ここで c_j' は $G' \ni {}^\forall S_j'(z) = (a_j' z + b_j')/(c_j' z + d_j')$ $(a_j' d_j' - b_j' c_j' = 1)$ の c_j' である。これを *isometric circle* の半径を用い, *grade* でならべなほすと $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{S_{(m)} \in G'} R_{S_{(m)}}^{\mu} < +\infty$. 故に $\lim_{m \to \infty} \sum_{S_{(m)} \in G'} R_{S_{(m)}}^{\mu} = 0$。 そこで $S_{(m)} = S_{(n)} S_{(\ell)}$ とおきなほし, $S_{(n)}$ を固定すると

$$\sum_{S_{(\ell)} \in G'} R_{S_{(n)} S_{(\ell)}}^{\mu} = R_{S_{(n)}^{-1}}^{\mu} \sum_{S_{(\ell)} \in G'} (R_{S_{(\ell)}^{-1} S_{(n)}^{-1}})^{\mu} / R_{S_{(n)}^{-1}}^{\mu} = R_{S_{(n)}^{-1}} \chi_{\ell,\infty}^{(\mu;T)}(S_{(n)}^{-1}(\infty)),$$

$S_{(n)}^{-1} = T S_{(n-1)}^{-1}$。 故に $\lim_{\ell \to \infty} R_{S_{(n)}^{-1}}^{\mu} \chi_{\ell,\infty}^{(\mu;T)}(S_{(n)}^{-1}(\infty)) = 0$。故に

G' は μ-*convergent type* である。故に定理 6 と Lemma 4 と 5 より $M_{\frac{\mu}{2}}(E') = M_{\frac{\mu}{2}}(E) = 0$ を得る。これは $\sum_{S_j \in G} |c_j z + d_j|^{-\mu}$

$<+\infty$ なるμに対しては常に $M_{\frac{\mu}{2}}(E)=0$ をいみする故，
$d(E)\leqq\frac{P(G)}{2}$ である。　$\mu<4$ であった故

$$d(E)\leqq\frac{P(G)}{2}<2$$ を得る。

$\frac{1}{2}<d(E)$ は古沢によって証明された。故に

$$\frac{1}{2}<d(E)\leqq\frac{P(G)}{2}<2$$ を得る。

これは Beardon が第2種の Fuchs 群で *parabolic* な元をもつ場合に得た $\frac{1}{2}<d(E)\leqq\frac{P(G)}{2}<1$ なる結果と類似な結果である。

註）以上は *Schottky cusp* で *parabolic* な生成元が一つの場合にやったのであり，2個以上の *parabolic* な生成元をもつ場合は未解決である。

References

1. L.V. Ahlfors, Finitely generated Kleinian groups, Amer. J. Math., 86(1964), 413-429.
2. T. Akaza, Poincaré theta series and singular sets of Schottky groups, Nagoya Math. J., 24(1964), 43-64.
3. T. Akaza, Local property of the singular sets of some Kleinian groups, Tôhoku Math. J., 25(1973), 1-22.
4. T. Akaza, Types of some infinitely generated Kleinian groups, Sci. Rep. of Kanazawa Univ., 19(1974), 95-108.
5. T. Akaza and E. Sakai, Singular sets of some infinitely generated Kleinian groups, Kōdai Math. Sem. Rep., 26(1975), 485-497.
6. T. Akaza, Hausdorff dimension and Poincaré dimension for the Schottky cusp, (to appear).
7. A.F. Beardon, The Hausdorff dimension of singular sets of properly discontinuous groups, Amer. J. Math., 88(1966), 722-736.
8. A.F. Beardon, The exponent of convergence of Poincaré series, Proc. London Math. Soc., 18(1968), 461-483.
9. A.F. Beardon, Inequalities for certain Fuchsian groups, Acta Math., 127(1971), 221-258.
10. W. Burnside, On a class of automorphic functions, Proc. London Math. Soc., 23(1891), 49-88.
11. J. Lehner, Two theorems on automorphic functions, Illinois J. Math., 6(1962), 173-176.
12. P.J. Myrberg, Zur Theorie der Konvergenz der Poincaréschen

Reihen, Ann. Acad. Sci. Fennicae. (1917), 1-27.

13. P.J. Myrberg, Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemnnschen Fläche, Acta Math. 61(1933), 39-79.

14. S.T. Patterson, The limit set of a Fuchsian group, Acta Math., 136(1976), 241-273.

15. H. Peterson, Über der Bereich absoluter Konvergenz der Poincaréschen Reihen, Acta Math., 80(1948), 23-49.

16. H. Poincaré, Sur les groupes des équations linéaires, Acta Math., 4(1884), 201-312.

17. E. Ritter, Die eindeutigen automorphen Formen von Geschlecht Null, Math. Ann., 41(1892), 1-82.