数理解析研究所講究録
第 318 巻 1978 年 115-124



# 放物的変換をもつKlein群のHausdorff次元について

金沢女子短大　　古沢 治司

リーマン球または拡張された複素平面を$\hat{\mathbb{C}}$で表す。$\Gamma$は$\hat{\mathbb{C}}$から$\hat{\mathbb{C}}$の上への一次変換群とする。点$z_0$が$\Gamma$の極限点(limit point)とは，ある$z \in \hat{\mathbb{C}}$に対して$\Gamma$の異なる要素の列$\{S_n\}$があって$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = z_0$のときいう。この$\Gamma$の極限点集合を$\Lambda(\Gamma)$で表す。$\Omega(\Gamma)=\hat{\mathbb{C}}-\Lambda(\Gamma)$とおく。$\Omega(\Gamma)\neq\phi$のとき，$\Gamma$を不連続群という。ここでは$\#(\Lambda(\Gamma))\geq 3$のとき$\Gamma$のことをKlein群ということにする。$\Gamma$の要素$S$（$S(\infty)\neq\infty$）に対して$\{z \mid |S'(z)|=1\}$を$I(S)$で表し，$I(S)$の内部をこめた閉円板を$D(S)$で表す。上半平面$H$を不変にするKlein群をFuchs群という。A.F. Beardonは[2]に於て，有限生成第二種Fuchs群でHausdorff次元が1/2より大なるものが存在することを示した。さらに[3]に於て，放物的変換をもつFuchs群は常にHausdorff次元が1/2より大であることを示した。ここでは放物的変換をもつKlein群に於ても この不等式が成立す

ることを示す。

1. $\Gamma$は放物的変換をもつKlein群とする．この$\Gamma$の適当な部分群に対して，幾何学的にわかりやすい部分群と相似する性質をもつものがある．その準備として次に述べる。

補題1． $T=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$，$\alpha\delta-\beta\gamma=1$ は放物的変換とする このとき任意の $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$ に対して，帰納法により，

$$(1)\qquad T^n=\begin{pmatrix} n\alpha-(n-1) & n\beta \\ n\gamma & n\delta-(n-1)\end{pmatrix}.$$

補題2． $S^{-1}(\infty)=-\delta/\gamma$ は円C上にないとする。このときCのSによる像C'の半径を$r(C')$とするとき，

$$(2)\qquad r(C')=\frac{1}{|\gamma|^2}\frac{r(C)}{|\rho^2-r^2(C)|},$$

ここで$\rho=|S^{-1}(\infty)-z_0|$，$z_0$は円Cの中心とする。

補題3． $\Gamma$は放物的変換をもつKlein群とする。このとき次の条件を満足する$\Gamma$の部分群Gが存在する。

(A) P，Tを各々$\Gamma$の放物的，ロクソドロム的変換とする。そのとき$I(P)$と$I(P^{-1})$が1点$p$で接するほかは$I(P)$，$I(P^{-1})$，$I(T)$，$I(T^{-1})$ のどの2つも互いに素である。

(B) GはPとTを生成元とする自由群である。

補題3の証明．$\Gamma$に含まれる放物的変換をUとする。このときU$(\infty)\neq\infty$ としておいてよい．なぜなら適当な$\Gamma$のロクソ

ドロム的変換$V$によって$VUV^{-1}$を$U$のかわりに考える。また、$\Gamma$のロクソドロム的変換$W$で$W(\infty)\neq\infty$なるものがある。$\xi_1$, $\xi_2$を$W$の固定点とし$K$を$W$の乗数とする($K\neq 1$)。

すると、
$$W^n=\frac{1}{K^{\frac{n}{2}}(\xi_1-\xi_2)}\begin{pmatrix}K^n\xi_2-\xi_1 & (1-K^n)\xi_1\xi_2\\ K^n-1 & \xi_2-K^n\xi_1\end{pmatrix}$$

である。さて$I(W^n)$, $I(W^{-n})$の半径$r(W^n)=r(W^{-n})=r_n$は

$r_n=\dfrac{|\xi_1-\xi_2|}{|K^{\frac{n}{2}}-K^{-\frac{n}{2}}|}$ ,であるから $r_n\to 0$ ($n\to\infty$).

また補題1より$I(U^n)$の半径は$1/|n\gamma|$であるから十分大きな$n$に対して条件(A)を満足する$I(U^n)$, $I(U^{-n})$, $I(W^n)$, $I(W^{-n})$が存在する。そして$G=\langle U^n, W^n\rangle$を考えればよい。

<u>補題4</u>. $G=\langle P, T\rangle$は補題3の条件を満足する$\Gamma$の部分群とする。$G'$は$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}P^jTP^{-j}$の各要素から生成される$G$の部分群とする。このとき次のことが成立する。

(C) $G'$は$G$の正規部分群である。そして商群$G/G'=\langle P\rangle$である。

(D) $\Lambda(G)=\Lambda(G')$.

補題4の証明 (C)について, $G'$から$G'$の上への自己同型写像$\Phi_n(g')=P^ng'P^{-n}$ ($g'\in G'$)の存在を示せばよい。またこのとき, $G$の任意の要素$g=P^mg'$ ($m\in\mathbb{Z}$, $g'\in G'$)と表現できることに注意すればよい。さらに$P^l(\Lambda(G'))=\Lambda(G')$が

成立する　$(\ell\in\mathbb{Z})$．　　(D) については，$\Lambda(G)\subset\Lambda(G')$ を示せば十分である。$G$の任意の要素は $S=P^{l_j}T^{m_j}\cdots\cdots P^{l_1}T^{m_1}$ $(l_i, m_i\in\mathbb{Z}\ ;\ 1\leqq i\leqq j)$ と表せる。$n=\sum_{i=1}^{j}(|l_i|+|m_i|)$ とおいて $S=S(n)$ とおく．$G$の生成元とその逆変換全体を $\mathcal{Y}$ とおく。$S(n)=S(n-1)V$ とおくとき，$U\in\mathcal{Y}-\{V\}$ について，$D(S(n))=S(n)(D(U))$ とすれば，$\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{S(n)}D(S(n))=\Lambda(G)$ である。$B$を $I(P), I(P^{-1}), I(T), I(T^{-1})$ の外部とすると $B$は$G$の基本領域である。$\Lambda(G)\ni z$ に対して，$z$ の $\varepsilon_n$－近傍 $U(z,\varepsilon_n)$ を考える，ここで $\{\varepsilon_n\}$ は $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ となる列とする。上のことから $D(S(n'))\subset U(z,\varepsilon_n)$ となる $S(n')\in G'$ が存在する。ここで $S(n')TS(n')^{-1}$ は $G'$の要素であり，かつ $S(n')TS(n')^{-1}$ の固定点 $z_{n'}$ は $U(z,\varepsilon_n)$ に含まれる。よって $z\in\Lambda(G')$ となる。

2． $P^kTP^{-k}=T_k$ $(k\in\mathbb{Z})$ とおく。ここで $T_0=P^0=1$．さらに $P^k(D(T))=D(T_k)=D_k$，$P^k(D(T^{-1}))=D(T_k^{-1})=D_{k^{-1}}$ $(k\in\mathbb{Z})$ とおく。$B'$ を $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}\{D_i, D_{i^{-1}}\}$ の外部とすると $B'$は$G'$の基本領域である。$G'_\ell$ は $\bigcup_{|j|\leqq\ell}T_j$ の各要素を生成元にもつ有限生成の Schottky 群である．$\mathcal{Y}'_\ell=\bigcup_{|j|\leqq\ell}\{T_j, T_j^{-1}\}$ とする。このとき $G'_\ell\to G'$，$\mathcal{Y}'_\ell\to\mathcal{Y}'$ $(\ell\to\infty)$．また $B'_\ell$ を $G'_\ell$ の基本領域とする。また一般性を失うことなく $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma & 1\end{pmatrix}$ とでき さらに$P^n$を考え補題1より $|\gamma\cdot T^{-1}(\infty)|>2$ となるように$P$

をとることができる。いくつかの補題ののちに$G_\ell'$と$G'$における特徴ある性質を述べる。

補題5. $B\supset\{|z-z_0|\leqq r\}=D$ の$P^n\,(n\neq 0)$による像の半径を$r_n$とすると，$B$と$D$にのみ依存する定数$C_0, C_1$が存在して,

(2)′
$$\frac{r}{|n|^2}C_0\leqq r_n\leqq\frac{r}{|n|^2}C_1$$

証明は簡単であるから略する。

$R_\varepsilon=\{z\,|\,r(D(T))\leqq|z-T^\varepsilon(\infty)|\leqq r(D(T))+2\delta\}\ (\varepsilon=\pm 1)$

とおき，$R_\varepsilon\subset B\ (\varepsilon=\pm1)$ そして $R_1\cap R_{-1}=\phi$ のようにできる。

$\mathcal{Q}_\varepsilon=\{z\,|\ |z-T^\varepsilon(\infty)|\leqq r(D(T))+2\delta\}$とする。このとき

(3)
$$r(T(\mathcal{Q}_\varepsilon))=\frac{r^2(D(T))}{r(D(T))+2\delta}=C_2\qquad(\varepsilon=\pm1).$$

$D_\delta$ を $R_\varepsilon\ (\varepsilon=\pm1)$ に内接する閉円板とすると，

(4)
$$r(\overset{\varepsilon}{T}(D_\delta))=\frac{\delta\cdot r(D(T))}{r(D(T))+2\delta}\ .$$

このことから$T^\varepsilon(D_\delta)$の半径は$D_\delta$の位置関係には依存しない。

従って $T^\varepsilon(B)\subset\{z\,|\ |z-T^\varepsilon(\infty)|\leqq C_2\}\ (\varepsilon=\pm1)$ であり，

$R_\varepsilon'$ を$\{z\,|\ C_2\leqq|z-T^\varepsilon(\infty)|\leqq r(D(T))\}\ (\varepsilon=\pm1)$ とする

このとき$R_\varepsilon'$に含まれる円板$D$の$P^k\,(k\neq0)$による像の半径

$r(P^k(D))$ について補題2，5により

(5)
$$\frac{1}{|k|^2}C_0'\leqq r(P^k(D))\leqq\frac{1}{|k|^2}C_1'\quad(k\neq0)$$

$C_i'=C_i'(G)>0\ (i=0,1)$ である.

$G'$の任意の要素は、

(6) $$S = T_{\alpha_n}\circ T_{\alpha_{n-1}}\circ\cdots\circ T_{\alpha_2}\cdot T_{\alpha_1},$$

ここで $T_{\alpha_j}\in\mathcal{Y}'$, $\alpha_j\in\mathbb{Z}$ そして $(T_{\alpha_j})^{-1}\neq T_{\alpha_{j+1}}$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$ である。$D$を$R_\varepsilon'$に内接する円板とするとき次のことが言える

<u>補題6</u>. 次の不等式をみたす$G(,B)$にのみ依存する正の数$C_3$, $C_4$が存在する。

(7) $$C_3 < \frac{r(P^k(D))}{r(P^k(D(T^\varepsilon)))} < C_4 < 1 \quad (\varepsilon=\pm 1),$$

ここで$D$は$R_\varepsilon'$に内接する円板である。

さて，(6)より$S=S(n)$とおいてみる．$S_{(n)}^{-1}(\infty)\in D_{\alpha_1}$, $S_{(n)}(D_j)\subset S_{(n)}(D_{\alpha_1})$ $(j\neq\alpha_1)$ である。

<u>補題7</u>. 任意の$T_j(\neq T_{i_1})\in\mathcal{Y}'$に対して$G$にのみ依存して決定される常数$M$があって次の不等式が成り立つ．

(8) $$|S_{(n)}^{-1}(\infty)-\alpha(D_j)| < M\,|P^{i_1}(T^{-1}(\infty))-P^{j}(T^{-1}(\infty))|$$

ここで $S_{(n)}=T_{i_n}\cdots\cdots T_{i_1}\in G'$.

補題7の証明． $l(D_j, D_{i_1}) = \inf_{x\in D_j,\, y\in D_{i_1}} d(x,y)$ とおく．

このとき $|S_{(n)}^{-1}(\infty)-\alpha(D_j)| \leq l(D_j, D_{i_1}) + (2-C_3)\{r(D_j)+r(D_{i_1})\}$

また，$|P^{i_1}(T^{-1}(\infty))-P^{j}(T^{-1}(\infty))| \geqq l(D_j, D_{i_1}) + C_3\{r(D_j)+r(D_{i_1})\}$

そこで $M=(2-C_3)/C_3$ とおけばよい。

これまでのことについては$P(0)=0$という条件をつけても何の意味もないがこれ以後について計算をやさしくするために

この条件をつける。(直接計算もできる) こうして(7), (8)などから次の結論が得られる。

**定理1.** $0 \leqq \mu \leqq 1$ とする。このとき十分大きな $N$ に対して

(9) $$\sum_{|j| \leqq N} r^{\mu/2}(S_{(n)}(D_j)) \geqq r^{\mu/2}(S_{(n)}(D_{i_1}))$$ とできる.

ここで $S_{(n)} = T_{i_n} \cdots\cdots T_{i_1} \in G'_N$.

証明の方針. $0 < \mu$ とする。$S_{(n)} \in G'$ に対して,

(10) $$\sum_{|j| \leqq N} r^{\mu/2}(S_{(n)}(D_j)) \geqq C_5 R^{\mu}_{S(n)} \sum_{\substack{|j| \leqq N \\ i_1 \neq j}} \left| \frac{i_1}{i_1 - j} \right|^{\mu},$$

ここで $R_{S(n)} = r(I_{S(n)})$, $T_{i_1} \neq T^{\varepsilon}$ $(\varepsilon = \pm 1)$.

(10)′ $$\sum_{|j| \leqq N} r^{\mu/2}(S_{(n)}(D_j)) \geqq C_5' R^{\mu}_{S(n)} \sum_{0 < |j| \leqq N} \frac{1}{|j|^{\mu}} \quad (T_{i_1} = T^{\varepsilon})$$

$C_5$, $C_5'$ は $G$ と $\mu$ にのみ依存する常数である。簡単な計算から, $G$ と $\mu$ にのみ依存する $C_6$, $C_7$ があって次の不等式を満す

(11) $$C_6 |i_1|^{\mu} R^{\mu}_{S(n)} \leqq r^{\mu/2}(S_{(n)}(D_{i_1})) \leqq C_7 |i_1|^{\mu} R^{\mu}_{S(n)}$$

$0 \leqq \mu \leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{|j| \leqq N} \frac{1}{|i_1 - j|^{\mu}} \longrightarrow \infty$ $(N \to \infty)$ となるから $S_{(n)} = T_{i_n} \cdots\cdots T_{i_1} \in G'$ さらに $|i_1| \leqq N$ なる $S_{(n)}$ に対して,
$\displaystyle\sum_{|j| \leqq N} r^{\mu/2}(S_{(n)}(D_j)) \geqq r^{\mu/2}(S_{(n)}(D_{i_1}))$ とできる。従って当然 $G'_N$ についても成立する。

$S_{(m+1)} : z \longmapsto (az+b)/(cz+d)$, $ad-bc=1$ は $G'_N$ の要素とする。このとき $D$ の $S_{(m+1)}$ による像の半径 $r(S_{(m+1)}(D))$ は $2\pi r(S_{(m+1)}(D)) = |c|^{-2} \int_D |z + \frac{d}{c}|^{-2} |dz|$ であって,

ここで $D \in \bigcup_{|i| \leqq N} \{D_i, D_{-i}\}$, $-d/c$ は $B_N'$ の外部にあることを注意すると $\Delta = \max_{z \in D} |z + d/c|$ また $\delta = \min_{z \in D} |z + d/c|$ とおけば

$$(12) \qquad \frac{r(D)}{\Delta} \cdot |c|^{-2} \leqq r(S_{(m+1)}(D)) \leqq \frac{r(D)}{\delta} \cdot |c|^{-2}$$

である。それ故次の不等式が成り立つ。

<u>補題8</u>　$S(m+1) = S(m) T_k$, $T_k \in \mathcal{Y}_N'$ とすると $k_q = k_q(G)$ に対して次の不等式を満足する。

$$(13) \qquad \frac{r(S_{(m+1)}(D_j))}{r(S_{(m+1)}(D_k))} \geqq k_q \quad (|j| \leqq N,\ j \neq k).$$

<u>3.</u>　$V \in \mathcal{Y}$, $S_{(n)} \in G$ とするとき $n \geqq n_0$ に対して $S_{(n)}(D(V))$ から成る閉円板の族を $\mathfrak{F}_{n_0}$ で表す。この $\mathfrak{F}_{n_0}$ は $\Lambda(G)$ の被覆の1つであることは容易にわかる。さらに十分大きな $n$ をとれば与えられた $\delta > 0$ よりも $\mathfrak{F}_{n_0}$ を構成する要素の直径を小さくすることができる. $I(\delta, \Lambda(G))$ は有限個の閉円板で, 直径が $\delta$ より小のものから成る1つの族でありかつ $\Lambda(G)$ のいかなる点も少くとも1つの $U \in I(\delta, \Lambda(G))$ の内点となっているものとする. このとき次の量,

$$(14) \qquad M_\eta(G) = \lim_{\delta \to 0} \left[ \inf_{\{I(\delta, \Lambda(G))\}} \sum_{U \in I(\delta, \Lambda(G))} l_U^{\eta} \right], \text{ ここで}$$

$l_U$ は $U$ の直径であり, $G$ のまたは $\Lambda(G)$ の $\eta$-次元測度という. これからは定理1で表れた $G_N'$ の特異点集合 $\Lambda(G_N')$

$=\Lambda$ について考える。$\Lambda$ はコンパクトであるから $\Lambda$ はある $I(\delta,\Lambda)$ の要素 $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \ldots\ldots, \mathscr{D}_k$ で被覆される。これら $k$ 個の閉円板 $\mathscr{D}_i$ の半径が $l_i (\leqq \delta/2)$ とする。$\delta$ を十分小さな定数とする。固定した $\mathscr{D}_i$ について，集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}_n$ の中に次の条件をみたす閉円板 $S(m_1)(D_1^i), \ldots\ldots S(m_{N(i)})(D_{N(i)}^i)$ がある。

(i) $r(S(m_j)(D_j^i))$ $(1\leqq j\leqq N(i))$ は $l_i$ より大で，

(ii) $S(m_j)(D_j^i)$ の内部にある閉円板で $\mathscr{D}_i$ と交わりを有し半径が $l_i$ より大きくない閉円板 $S(m_j+1)(D_k^i)$ が存在する．

(iii) $\bigcup_{j=1}^{N(i)} S(m_j)(D_j^i) \supset \mathscr{D}_i\cap\Lambda$.

補題 8 によって，

(15) $k_9\, r(S(m_j)(D_j^i)) \leqq r(S(m_j+1)(D_k^i)) \leqq l_i$ .

各 $\mathscr{D}_i$ に対して上のような円板の族 $\{S(m_j)(D_j^i)\}_{j=1}^{N(i)}$ $(i=1, \ldots\ldots k)$ を考える．このとき $\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{N(i)} S(m_j)(D_j^i)\supset\Lambda$ そして

(16) $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N(i)} (r_{S(m_j)(D_j^i)})^{\eta/2} \leqq k_{10}\sum_{i=1}^{k} l_i^{\eta/2}$ ,

ここで $k_{10}$ は $G_1(B)$ にのみ依存して決定される定数であって $D_j^i\in\bigcup_{|k|\leqq N}\{D_k, D_k^{-1}\}$ .

定理 1 によって，任意の実数 $0\leqq\eta\leqq 1$ に対して，

(17) $0<\sum_{|j|\leqq N}(r(D_j))^{\eta/2}\leqq k_{10}\sum_{i=1}^{k} l_i^{\eta/2}$ ,

ここで $\{I(\delta,\Lambda)\}$ について考えてみると，次の補題が導かれる。

補題9. $G_N'$ は定理1で述べた不連続群とする。このとき $M_{\eta/2}(\Lambda(G_N'))>0$ $(0\leqq\eta\leqq 1)$ である。

$\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合 $F$ の Hausdorff 次元は $F$ に対して非負の実数 $d(F)$ が唯一つ定まり，

$$M_{\eta/2}(F)=0 \quad (\eta/2>d(F)),$$

$$M_{\eta/2}(F)=\infty \quad (0\leqq \eta/2<d(F))$$

である。Schottky群 $G_N'$ について $d(\Lambda(G_N'))=d(G_N')$ と書くことにする。すると[1] によって $d(G_N')<d(G_{N+1}')$ であることが知られているから，結局，次の定理が得られる。

定理2　$\Gamma$ は Klein群で放物的変換をもつならば $\Gamma$ の Hausdorff 次元 $d(\Gamma)>1/2$ である。

## 参考文献

[1] Akaza, T. & Shimazaki, T., The Hausdorff dimension of the singular sets of combination groups. Tôhoku Math. J., (1973)

[2] Beardon, A.F., The Hausdorff dimension of singular sets of properly discontinuous groups. Amer. J. Math., (1966)

[3] Beardon, A.F., The exponent of convergence of Poincaré series. Proc. London Math. Soc., (1968)