数理解析研究所講究録
第 318 巻 1978 年 125-136

Teichmüller 空間の外半径

東北大・理　関川　久男

1. $D=\{z\in\hat{\mathbb{C}};\ 1<|z|\leqq+\infty\}$, $k(z)=z/(1-z)^2$ とする. $k(z)$は,単葉関数論において重要な役割を果たすKoebe関数であり, Dにおいて正則単葉かつそのSchwarz微分$[k]$は,
$[k](z)=k'''(z)/k'(z)-(3/2)(k''(z)/k'(z))^2=-6(1-z^2)^2$
で与えられる.

ρをDのPoincaré計量とする. B(D)によって, Dにおいて定義された正則関数ϕで

$$\|\phi\|=\sup_{z\in D}\rho(z)^{-2}|\phi(z)|=\sup_{z\in D}(|z|^2-1)^2|\phi(z)|<+\infty$$

を満たすもの全体からなるBanach空間を表わすものとする.

ΓをDに作用するFuchs群とするとき, B(D,Γ)によって,

$$\phi(T(z))(T'(z))^2=\phi(z),\quad T\in\Gamma$$

を満たすB(D)の元ϕ全体からなるB(D)の閉部分空間を表わすものとする. この空間B(D,Γ)は, Γが有限生成第1種Fuchs群であるときかつそのときに限り有限次元である.

2．まず次の定理を証明する．

定理1．　Dに作用するあるFuchs群Γに対して，$[k]\in B(D,\Gamma)$とすると，Γの極限点集合$\Lambda(\Gamma)$は空集合か又は2つの点からなる．

証明．　Γ^*を

$$(1)\qquad [k\circ T]=([k]\circ T)(T')^2=[k]$$

を満たすDを不変にするMöbius変換T全体からなる群とする．Dを不変にするMöbius変換Tは，

$$T(z)=\varepsilon\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\quad,\quad |\varepsilon|=1,\ |\alpha|<1$$

なる形をしているから，(1)は

$$(2)\quad \left[\frac{\varepsilon(1-|\alpha|^2)}{1-\varepsilon^2\alpha^2}\right]^2\left(1-\frac{\varepsilon+\bar{\alpha}}{1+\varepsilon\alpha}z\right)^{-2}\left(1+\frac{\varepsilon-\bar{\alpha}}{1-\varepsilon\alpha}z\right)^{-2}$$

$$=(1-z^2)^{-2}$$

と書ける．もし，$T\in\Gamma^*$とすると，(2)より，

$$\left[\frac{\varepsilon(1-|\alpha|^2)}{1-\varepsilon^2\alpha^2}\right]^2=1,\quad \frac{\varepsilon+\bar{\alpha}}{1+\varepsilon\alpha}=\frac{\varepsilon-\bar{\alpha}}{1-\varepsilon\alpha}=\pm 1$$

となるから，$\varepsilon=\pm 1$，$\alpha=\bar{\alpha}$である．従って，Γ^*は次の2つの型のMöbius変換からなる：

$$T_1(r)(z)=\frac{z-r}{1-rz}\quad,\quad -1<r<1,$$

$$T_2(s)(z) = -\frac{z-s}{1-sz}, \quad -1 < s < 1.$$

ここに $T_1(r)$ は双曲的変換であり，$T_2(s)$ は位数2の楕円的変換である．

さて Γ を Γ^* の部分群とする．Γ が楕円的変換のみを含むとすると，Γ は位数2の巡回群である．実際，

$$T_2(s_1) \circ T_2(s_2) = T_1((s_2 - s_1)/(1 - s_1 s_2))$$

となる．よってこの場合，$\Lambda(\Gamma)$ は空集合である．もし，Γ が双曲的変換を含むとすると，$\Lambda(\Gamma)$ は Γ に含まれる双曲的変換の固定点全体からなる集合の閉包であるが，$T_1(r)$ の固定点は r の値によらず -1，1 であるから，$\Lambda(\Gamma) = \{-1, 1\}$ である．

3．この節において定理1の1つの応用を述べる．

普遍 Teichmüller 空間 $T(1)$ は，$\hat{\mathbb{C}}$ からそれ自身の上への擬等角写像に拡張可能な D 上の有理型単葉関数の Schwarz 微分となるような $\phi \in B(D)$ 全体からなる部分集合として定義される．$T(1)$ は $B(D)$ の有界領域となることが知られている．

Γ を D に作用する Fuchs 群とする．Γ の Teichmüller 空間 $T(\Gamma)$ は，$T(1) \cap B(D, \Gamma)$ の（$B(D, \Gamma)$ の）原点を含む連結成分として定義される．$\dim T(\Gamma) > 0$ となる Fuchs 群 Γ に対して，$T(\Gamma)$ の外半径 $o(\Gamma)$ を

$$o(\Gamma) = \sup_{\phi \in T(\Gamma)} \|\phi\|$$

と定義する．Nehari, Hille, Earle 等の結果より

$$2 < o(\Gamma) \leqq 6 \quad , \quad o(1) = 6$$

となることが知られている．

定理 1 を用いることにより，次の定理を得る（証明は §5 において与える）．

定理 2．　Γ が有限生成第 1 種 Fuchs 群ならば，$o(\Gamma) < 6$ である．

Chu [6] によると，Γ に無関係な定数としては，6 をより小さな値で置き換えることはできない．

4．この節において 2 つの補題を準備する．次の補題は Bers による．

補題 1（Bers [2], Proposition 8）．　D における有理型単葉関数の Schwarz 微分全体からなる B(D) の部分集合 $\mathcal{S}$ は，B(D) における閉集合である．

補題 2．　f を D 上の有理型単葉関数とし，ある点 $z_0 \in D$ において，$\|[f]\| = \rho(z_0)^{-2} |[f](z_0)| = 6$ となっているとする．このとき，D を不変にする Möbius 変換 S が存在して，$[f] = [k \circ S]$ となる．ここに，$[f]$ は f の Schwarz 微分である．

証明．　Nehari [6] の議論を注意深くたどる．まず，U(z) を

$|z_0|<\infty$ のときは，$U(z)=(1-\bar{z}_0 z)/(z-z_0)$ と，$z=\infty$ のときは，$U(z)=z$ とおく．Möbius変換ηを適当に選べば $F=\eta\circ f\circ U^{-1}$ はDにおいて次のように展開される：

$$F(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots$$

$[f]=[\eta\circ f]=[F\circ U]=([F]\circ U)(U')^2$ を用いて計算すると，$\rho(z_0)^{-2}|[f](z_0)|=6|b_1|$ を得る．仮定より$|b_1|=1$となり，さらにBieberbachの面積定理より $b_n=0$ $(n=2,3,\cdots)$ となる．従って，$[F](z)=-6b_1(z^2-b_1)^2$ である．ここで，$T(z)=\varepsilon z$ $(b_1=\varepsilon^{-2})$ とおくと，$S=T\circ U$ が求めるMöbius変換である．

5．定理2の証明．　$o(\Gamma)=6$ と仮定すると，$\lim_{n\to\infty}\|\phi_n\|=6$ となるような $T(1)$内の列 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．いま，$\dim T(\Gamma)=\dim B(D,\Gamma)<+\infty$ であるから，$\|\phi\|=6$ なる $\phi\in B(D,\Gamma)$ が存在して，$\lim_{n\to\infty}\phi_n=\phi$ となると仮定してよい．このとき，補題1より，ϕはDにおけるある有理型単葉関数のSchwarz微分である．

さて，NをDにおけるΓのnormal polygon，$\bar{N}$をNの$\hat{\mathbb{C}}$における閉包，∂DをDの境界である単位円周とする．Γは有限生成第1種Fuchs群であるから，$\partial D\cap\bar{N}$は高々有限個の点（Γのparabolic cusps）からなる．いまそれを，$\zeta_1,\cdots,\zeta_m$

とする．ϕ は Γ に関する cusp form であるから，

$$\lim_{\bar{N}\cap D\ni z,\, z\to\zeta_i} \phi(z) = 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

である．よって，

$$\lim_{\bar{N}\cap D\ni z,\, z\to\zeta_i} \rho(z)^{-2}|\phi(z)| = 0 \quad (i=1,2,\cdots m)$$

となる．他方，$\|\phi\| = \sup_{z\in\bar{N}\cap D} \rho(z)^{-2}|\phi(z)|$ であるから，ある点 $z_0\in\bar{N}\cap D$ が存在して，$\|\phi\| = \rho(z_0)^{-2}|\phi(z_0)|$ となる．従って，補題2より，D を不変にする Möbius 変換 S が存在して，$\phi=[k\circ S]$ となる．ところが，$[k\circ S]\in B(D,\Gamma)$ となるのは $[k]\in B(D,S\Gamma S^{-1})$ となるときかつそのときに限るから，定理1より，$\Lambda(S\Gamma S^{-1})$（従ってまた $\Lambda(\Gamma)$）は，空集合又は2点からなる．これは，$\Lambda(\Gamma)=\partial D$ という仮定に反する．

6．K を $[k]$ によって張られる $B(D)$ の1次元部分空間とする．$o(1)=6$ という事実は，K と $T(1)$ の共通部分を考えることによって証明される（Chu [3] をみよ）．

まず，Hille [4] の結果を述べる．

$$f(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\delta}, \quad \delta=(1-\alpha)^{1/2}$$

とおく．ただし，$f(\infty)=1$，$\delta=1\ (\alpha=0)$ とする．このとき，

$$[f](z) = \frac{2\alpha}{(1-z^2)^2} = -\frac{\alpha}{3}[k](z)$$

であり，fがDにおいて単葉となるのはαが，cardioid

(3) $\alpha = -2e^{\sqrt{-1}\theta} - e^{2\sqrt{-1}\theta}$, $-\pi < \theta \leqq \pi$

の内部又は境界の上にあるときかつそのときに限る．

Vをcardioid (3) の内部とし，Rを複素平面$\mathbb{C}$の右半平面$\{z \in x+\sqrt{-1}y \in \mathbb{C} ; x > 0\}$とする．また$\zeta = (z-1)/(z+1)$, $w = g(\zeta) = f(z) = \zeta^\delta$とおく．

Kalme [5] は，$\alpha \in V$のとき，$f(z) = \zeta^\delta$を$\hat{\mathbb{C}}$からそれ自身の上への擬等角写像に具体的に拡張することによって，次の定理を示した．

<u>定理3</u>． 集合$\{\alpha \in \mathbb{C} ; -\frac{\alpha}{3}[k] \in T(1)\}$は，cardioid (3) の内部と一致する．

ここでは，この定理のもう1つの証明を与える．

普遍Teichmüller空間$T(1)$は，Dにおける有理型単葉関数でそれによるDの像がquasi-circleで囲まれているようなもののSchwarz微分ϕ $(\in B(D))$全体からなる集合としても定義され得る．また，Ahlfors [1] はquasi-circleの幾何学的特徴づけを与えている．従って，その幾何学的特徴づけを用いて，任意の$\alpha \in V$に対し，$f(D) = g(R)$がquasi-circleであることを示しさえすればよい．

さて，任意の$\alpha \in V$に対し，領域$g(R)$の境界は

$$(4)\quad w = g(y) = \exp\left[\left(\mu \log|y| - \frac{\nu\pi}{2}\operatorname{sign}(y)\right) + \sqrt{-1}\left(\nu \log|y| + \frac{\mu\pi}{2}\operatorname{sign}(y)\right)\right],$$

$$-\infty < y < \infty,$$

で与えられるJordan曲線である．ここに，$\operatorname{sign}(y)$はyの符号で，$\delta = \mu + \sqrt{-1}\,\nu$ $(\mu > 0)$である．よって，Ahlfors [1] の結果より，任意のy_1, y_2, y_3 $(y_1 < y_2 < y_3)$に対して

$$(5)\quad \left|\frac{g(y_1) - g(y_2)}{g(y_1) - g(y_3)}\right| \leqq M$$

が成立するような定数Mが存在することを示しさえすればよい．ところでy_i $(i = 1, 2, 3)$が正か0か負かによって7つの場合が考えられるが，ここでは$0 < y_1 < y_2 < y_3$となる場合のみを扱い，他の場合の詳細を省略する．もし，$0 < y_1 < y_2 < y_3$ならば(4)より，

$$(6)\quad \left|\frac{g(y_1) - g(y_2)}{g(y_1) - g(y_3)}\right|^2 = h\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\Big/ h\left(\frac{y_3}{y_1}\right),$$

$$h(x) = 1 + x^{2\mu} - 2x^{\mu}\cos(\nu \log x),\ x > 1$$

となるが，$h(x)$が次の性質をもつことは簡単に分る：(i) $x > 1$のとき$h(x) > 0$（これは，(4)で与えられる曲線がJordan

曲線であるということより従う），(ii) $h(x)$は，十分小なる$\varepsilon>0$と十分大なる$N>0$に対して，区間$(1, 1+\varepsilon)$と(N, ∞)において単調増加である．従って，(6)より，(5)がある定数Mに対して成り立つ．

7．次に，$T(1)$の境界に対応するD上の有理型単葉関数について少し述べる．次の命題は，同様の証明方法によって，より一般化されるが煩雑になるだけであるので省略する．

命題．Ωを次の(i)〜(iv)の条件を満たす$\hat{\mathbb{C}}$内のJordan領域とする：

(i) $\partial\Omega$は区分的に滑らかである

(ii) $z_0\in\partial\Omega$が存在して，z_0以外の$\partial\Omega$の各点において$\partial\Omega$の内角は0でも2πでもない（$\partial\Omega$が滑らかであるような点においては，$\partial\Omega$の内角はπである）

(iii) z_0において$\partial\Omega$の内角は2πである

(iv) z_0を1つの端点とする円弧又は線分が$\hat{\mathbb{C}}-\overline{\Omega}$に含まれる．

このとき，fを$f(D)=\Omega$となるようなD上の有理型単葉関数とすると，$[f]\in\partial T(1)$である．

（注）Jordan曲線Cが区分的に滑らかであるとは，Cが適当にとったparameter tに関して$z(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$と表わされ，区間$[0, 1]$のある分割$0=t_0<t_1<t_2<\cdots t_{n-1}<t_n=1$に対して，$z(t)$が閉区間$[t_{i-1}, t_i]$ $(i=1, 2, \cdots n)$で連続的

微分可能かつ $z'(t)\neq 0$ となることとする．また，$\partial\Omega$ 上の点における $\partial\Omega$ の内角とは，Ω の存在する側から測った $\partial\Omega$ のその点における角度とする．

<u>証明</u>．　適当なMöbius変換を考えることにより，はじめから $z_0=0$，かつ半直線 $R_+=\{x\,;\,0\leqq x\leqq+\infty\}$ が $\hat{\mathbb{C}}-\overline{\Omega}$ に含まれると仮定してよい．$g_l(z)=z^l$ $(0<l<1)$ なる関数を考える．g_l は $\hat{\mathbb{C}}-R_+$ で正則単葉であるから，$g_l\circ f$ もまた D で正則単葉である．さて，$\partial((g_l\circ f)(D))=\partial(g_l(\Omega))=g_l(\partial\Omega)$ は，区分的に滑らかな Jordan 曲線で，その上の任意の点における内角は 0 とも 2π とも異なる（$z_0=0$ における内角は $2l\pi$）．よって，それは quasi-circle であり，$[g_l\circ f]\in T(1)$ となる．一方，Ω の Poincaré 計量を ρ_Ω，$\delta_\Omega(\zeta)=\inf\limits_{z\in\partial\Omega}|z-\zeta|$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\|[g_l\circ f]-[f]\| &= \sup_{\zeta\in\Omega}\rho_\Omega(\zeta)^{-2}\,|[g_l](\zeta)| \\
&\leqq \sup_{\zeta\in\Omega}(4\delta_\Omega(\zeta))^2\cdot\frac{1}{2}(1-l^2)\cdot\frac{1}{|\zeta|^2} \\
&\leqq 8(1-l^2)\sup_{\zeta\in\Omega}|\zeta|^2\cdot\frac{1}{|\zeta|^2} \\
&= 8(1-l^2)
\end{aligned}
$$

となる．従って，$l\to 1$ のとき $\|[g_l\circ f]-[f]\|\to 0$ となり，

$[f] \in \overline{T(1)}$ である．ところが，$\partial\Omega$ は quasi-circle ではないから，$[f] \in \partial T(1)$ である．

(注) Ω が，少なくとも1つの内角が0であるような円弧三角形のとき，f を $f(D)=\Omega$ となるような D 上の有理型単葉関数とすると，$[f] \in \partial T(1)$ である．このことは，単葉関数論により，f の Schwarz 微分が具体的に求まることから容易に分る．

REFERENCES

[1] L. V. AHLFORS, Quasiconformal reflections, Acta. Math., 109 (1963), 291-301.

[2] L. BERS, On boundaries of Teichmüller spaces and kleinian groups : I, Ann. of Math., 91 (1970), 570-600.

[3] T. CHU, On the outradius of finite-dimensional Teichmüller spaces, Discontinuous groups and Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, 79 (1974), 75-79.

[4] E. HILLE, Remarks on a paper by Zeev Nehari, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 552-553.

[5] C. I. KALME, Remarks on a paper by Lipman Bers, Ann. of Math., 91 (1970), 601-606.

[6] Z. NEHARI, The Schwarzian derivative and schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 545-551.