数理解析研究所講究録
第318巻 1978年 137-162

Riemann面の正則族へのTeichmüller空間の応用

東北大・理　今吉洋一

ここでは、Imayoshi [6] の続きを取り扱うことにする。

$\bar{S}$ を2次元複素多様体, C を $\bar{S}$ の非特異な1次元解析的部分集合又は空集合とする。複素 t 一平面において、$D=(|t|<1)$, $D^*=(0<|t|<1)$ とおく。さらに固有正則写像 $\bar{\pi}: \bar{S} \longrightarrow D^*$ は次の2条件を満すものとする；

1) $\bar{S}$ の各点で $\bar{\pi}$ は最大階数をもつ,

2) $S=\bar{S}-C$ 及び $\pi=\bar{\pi}|_S$ とおくとき、任意の $t \in D^*$ に対して、t 上の fibre $S_t=\pi^{-1}(t)$ は S の既約な解析的部分集合で、Riemann面とみて一定の finite type (g,n) である。ただし $3g-3+n \geqq 0$ とする。

以上の条件を満すとき、(S,π,D^*) を type (g,n) の Riemann面達の正則族と呼ぶ。また S は D^* 上に type (g,n) の fibring (S,π,D^*) をもつと云う。

§1 では、このような (S,π,D^*) が与えられたとき、fiber S_t

$(t \in D^*)$ を Teichmüller 空間 $T(G)$ の点 $\Phi(t)$ とみなし、Φ の点 $t=0$ における挙動を調べる。(ただし、一般には、Φ は多価な解析函数である。)

§2では、§1の結果を用いて (S, π, D^*) の completion $(\hat{S}, \hat{\pi}, D)$ を一定の手続によって構成することを考える。そして、§3では、S から $\hat{S}$ のなかへの正則写像 f の拡張定理を示す。ただし、$\pi = \hat{\pi} \circ f$ とする。

§4では、§2及び§3の応用として、代数曲面の一意化を調べる。同様に、§5では、2次元 Stein 多様体の compactification と、$\mathbb{C}^2$ の analytic automorphism が polynomial map になるための条件を取り扱う。

§1. type (g, n) の Riemann 面達の正則族 (S, π, D^*) の Teichmüller 空間 $T(G)$ への embedding と、その $\tilde{t}=1$ における挙動。

楕円変換をもたない第一種有限生成 Fuchs 群 G で、$S = U/G$ が type (g, n) なるものを1つとり、G の Teichmüller 空間を $T(G)$ と書く。各点 $\phi \in T(G)$ に対して、$D_\phi = W_\phi(U)$, $G_\phi = W_\phi \circ G \circ W_\phi^{-1}$ とおく。

固定された一点 $t_0 \in D^*$ に対して、$\phi_{t_0} \in T(G)$ で、$D_{\phi_{t_0}}/G_{\phi_{t_0}}$ が S_{t_0} と等角同値になるものを一つとる。t_0 の十分小さな近傍 δ に対

して、一意的に正則写像 $\Phi_0 : \delta \longrightarrow T(G)$ が定まり、$\Phi_0(t_0)=\phi_{t_0}$ かつ $t\in\delta$ に対して、$D_{\Phi_0(t)}/G_{\Phi_0(t)}$ は S_t と等角同値になる。そして、この Φ_0 は δ^* 内の任意の曲線に沿って解析接続可能である。

そこで、$\tilde{t}$-平面における単位円板 $\tilde{D}=(|\tilde{t}|<1)$ を covering map $p(\tilde{t})=\exp\left(2\pi\frac{\tilde{t}+1}{\tilde{t}-1}\right)$ をもつ δ^* の universal covering space と思う。この covering transformation group は $\gamma(\tilde{t})=\dfrac{(1-2i)\tilde{t}-1}{\tilde{t}-(1+2i)}$ で生成される。また一点 $\tilde{t}_0\in\tilde{D}$ を $p(\tilde{t}_0)=t_0$ となるようにとる。

$\tilde{D}$ は単連結であるから、一価な正則写像 $\tilde{\Phi} : \tilde{D}\longrightarrow T(G)$ があって、$\tilde{\Phi}(\tilde{t}_0)=\phi_{t_0}$ かつ、$\forall\tilde{t}\in\tilde{D}$ に対して、$D_{\tilde{\Phi}(\tilde{t})}/G_{\tilde{\Phi}(\tilde{t})}$ は $S_{p(\tilde{t})}$ と等角同値になる。

次に $(\mathcal{S},\pi,\delta^*)$ の homotopical monodromy $\tilde{\mathfrak{M}}$ を定義しよう。これは、G の modular 群 Mod (G) の元であって、$\tilde{\Phi}(\gamma(\tilde{t}))=\tilde{\mathfrak{M}}(\tilde{\Phi}(\tilde{t}))$ for $\forall\tilde{t}\in\tilde{D}$ を満すものである。

Riemann の moduli space $R(g,n)$ とは、signature $(g,n;\infty,\cdots,\infty)$ の nodes をもたない Riemann surfaces の isomorphism classes の全体である。また moduli space $M(g,n)$ とは、signature $(g,n;\infty,\cdots,\infty)$ の nodes をもつものも含めた Riemann surfaces の isomorphism classes の全体である。このとき、$M(g,n)$ は compact normal analytic space で、$R(g,n)$ はその Zariski open subset になっている。
（詳しくは、Bers [2], [3] を見よ。）

このとき、正則写像 $J: D^* \longrightarrow R_{(g,n)}$, $J(t)=[S_t]$ は、正則写像 $\hat{J}: D \longrightarrow M_{(g,n)}$ に拡張できることが証明される。そこで $\hat{J}(0)=[S_0]$ とおき、S_0 の components を $Z_1, \cdots, Z_r$, nodes を $P_1, \cdots, P_k$ とする。

複素 S-平面における上半面を H とし、等角写像 $\lambda: H \longrightarrow \tilde{D}$, $\lambda(S)=\dfrac{S-i}{S+i}$ を考える。この λ によって、H の帯状領域 $\{a<\mathrm{Re}\, S<b\}$ は、$\tilde{D}$ における $\tilde{t}=1$ を cusp にもつ cusp region Δ に写像される。

以上に述べたことと、deformation space $X(S_0)$ を用いることによって、Imayoshi [6] と同様な議論から次の定理を得る。($X(S_0)$ については、Bers [2] を見よ。)

<u>Theorem 1.</u> type (g,n) の Riemann 面の正則族 (S, π, D^*) が与えられたとき、元 $\phi_1 \in \overline{T(\Gamma)}$ が存在して、$\tilde{t}=1$ を cusp にもつ任意の cusp region Δ に対して、Δ において $\tilde{t} \longrightarrow 1$ のとき、$\tilde{\Phi}(\tilde{t})$ は ϕ_1 に一様に収束する。

そして、$\tilde{m}$ が有限位数であることと、$\phi_1 \in T(\Gamma)$ であることが、また、$\tilde{m}$ が無限位数であることと、$\phi_1 \in \partial T(\Gamma)$ であることが、

それぞれ有値である。

さらに、$\tilde{\mathfrak{M}}$ が無限位数のとき、φ_1 に対応する境界群 $G_1 = G_{\varphi_1}$ は regular b-group であって、

$$D_1 \cup \{\text{fixed points of A.P.T. of } G_1 \text{ on } \partial D_1\} \big/ G_1$$

は nodes をもった type (g, n) の Riemann 面であって、かつ、S_0 と analytically isomorphic である。ここで、$D_1 = \Omega(G_1) - \Delta(G_1)$, $\Omega(G_1)$ は G_1 の不連続領域, $\Delta(G_1)$ は G_1 の不変成分である。

§2、$(\mathfrak{S}, \pi, \mathfrak{D}^*)$ の completion $(\hat{\mathfrak{S}}, \hat{\pi}, D)$ の構成.

そのために、まずいくつかの準備をする。

1) $\mathfrak{J}(0) = [S_0]$ に対して、S_0 の1つの deformation space を $X(S_0)$ とする。deformation $\alpha : S \longrightarrow S_0$ を適当にとれば、$[S, f_{\tilde{\varepsilon}}, S_{\tilde{\varepsilon}}] \in T(S)$ を $\varphi_{\tilde{\varepsilon}} \in T(G)$ に対応するものとするとき、$\langle S_{\tilde{\varepsilon}}, \alpha \circ f_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}, S_0 \rangle \in X(S_0)$ は、$\tilde{\varepsilon} \to 1$ のとき $\langle id \rangle$ に収束するようにできる。

ここでちょっと工夫をして、type (g, n) の Riemann 面 S' の各 puncture にそれぞれ1つの terminal な Riemann 面をくっつけて nodes をもつ compact な Riemann 面 $a(S')$ を一定の手続で作る。(詳しくは Bers [3] を見よ。そこでの記号は $\alpha(S')$ である。)

このとき、$\forall\tilde{\varepsilon}\in\tilde{D}$ に対して、$\langle S_{\tilde\varepsilon}, \alpha\circ f_{\tilde\varepsilon}^{-1}, S_0\rangle \in X(S_0)$ は parametrization space $X_\alpha(a(S_0))$ の点 $(\tau(\tilde\varepsilon), t(\tilde\varepsilon))$ で表わされるが、これから induced される deformation を $\langle S_{\tau(\tilde\varepsilon),t(\tilde\varepsilon)}, \alpha_{\tau(\tilde\varepsilon),t(\tilde\varepsilon)}, S_0\rangle$ と書く。また、各 j $(j=1,\cdots,r)$ に対して、$\tau_j(\tilde\varepsilon)$ に対応する $T(\Sigma_j)$ の点を $[\Sigma_j, F_{j,\tilde\varepsilon}, \Sigma_{j,\tilde\varepsilon}]$ と表わす。

$\tilde{H}_j$ $(j=1,\cdots,r)$ を Σ_j の universal covering から決まる Fuchs群とし、$[\Sigma_j, F_{j,\tilde\varepsilon}, \Sigma_{j,\tilde\varepsilon}]$ に対応する $T(\tilde H_j)$ の点を $\phi_{j,\tilde\varepsilon}$ で表わす。
$\langle a(S_{\tilde\varepsilon}), a(\alpha\circ f_{\tilde\varepsilon}^{-1}), a(S_0)\rangle$ は $X_\alpha(a(S_0))$ において $\langle id\rangle$ に収束するから、
$\phi_{j,\tilde\varepsilon} \longrightarrow 0$ in $T(\tilde H_j)$ as $\tilde\varepsilon\to 1$ through Δ である。

一方、$\langle S_{\tilde\varepsilon}, \alpha\circ f_{\tilde\varepsilon}^{-1}, S_0\rangle = \langle S_{\tau(\tilde\varepsilon),t(\tilde\varepsilon)}, \alpha_{\tau(\tilde\varepsilon),t(\tilde\varepsilon)}, S_0\rangle$ であるから、定義によって、位相写像 $g_{\tilde\varepsilon}: S_{\tau(\tilde\varepsilon),t(\tilde\varepsilon)} \longrightarrow S_{\tilde\varepsilon}$ が存在して、$\alpha_{\tau(\tilde\varepsilon),t(\tilde\varepsilon)} = \alpha\circ f_{\tilde\varepsilon}^{-1}\circ g_{\tilde\varepsilon}$, かつ、$g_{\tilde\varepsilon}$ は $\alpha_{\tau(\tilde\varepsilon),t(\tilde\varepsilon)}$ によって S_0 の nodes に写される Jordan curves のまわりの ν 回の Dehn twists のある積 $d_{\tilde\varepsilon}$ に、ある analytic isomorphism を合成したものと homotopic である。従って、$T(S)$ において、$[S, f_{\tilde\varepsilon}, S_{\tilde\varepsilon}] = [S, d_{\tilde\varepsilon}\circ g_{\tilde\varepsilon}^{-1}\circ f_{\tilde\varepsilon}, S_{\tau(\tilde\varepsilon),t(\tilde\varepsilon)}]$ である。

ところで、上記の deformation $\alpha: S\longrightarrow S_0$ は $S-\alpha^{-1}(\text{nodes})$ において locally quasiconformal であるとしてよい。また S_0 の各 node p_i $(i=1,\cdots,k)$ の任意の十分小さな近傍 δ_i に対して、quasiconformal mapping $h_{\tilde\varepsilon}: S\longrightarrow S_{\tau(\tilde\varepsilon),t(\tilde\varepsilon)}$ で、$[S, f_{\tilde\varepsilon}, S_{\tilde\varepsilon}] = [S, h_{\tilde\varepsilon}, S_{\tau(\tilde\varepsilon),t(\tilde\varepsilon)}]$, かつ、$h_{\tilde\varepsilon} = d_{\tilde\varepsilon}\circ g_{\tilde\varepsilon}^{-1}\circ f_{\tilde\varepsilon}$ on $S-\alpha^{-1}(\delta)$ なるものが存在する。ここで $\delta=\bigcup_{i=1}^{k}\delta_i$。

そこで、$W_{\tilde{\tau}}$は$[S, f_{\tilde{\tau}}, S_{\tau(\tilde{\tau})}, \epsilon(\tilde{\tau})]$から canonically に定まる$\hat{\mathbb{C}}$の quasiconformal automorphism で、下半平面Lでは等角であって、$z=-i$の近くでは、$W_{\tilde{\tau}}(z)=\dfrac{1}{z+i}+O(|z+i|)$を満たすものとする。

$\pi_0 : U \longrightarrow S=U/G$ を natural projection とし、$U_1 = U - \pi_0^{-1}\circ\alpha^{-1}(P_1 \cup \cdots \cup P_k)$ とおく。このとき、$\tilde{\tau}=1$を cusp にもつ任意の cusp region Δに対して、族$\{W_{\tilde{\tau}}\}_{\tilde{\tau}\in\Delta}$は、$\tilde{\tau}\longrightarrow 1$ through Δのとき、U_1上において、U_1上の locally quasiconformall mapping W_1に広義一様収束し、このW_1は一意的に定まることが証明される。

2) 各$\tilde{\tau}\in\tilde{D}$に対して、$\phi_{\tilde{\tau}}=\tilde{\Phi}(\tilde{\tau})$, $G_{\tilde{\tau}}=G_{\phi_{\tilde{\tau}}}$, $D_{\tilde{\tau}}=\Omega(G_{\tilde{\tau}})-\Delta(G_{\tilde{\tau}})$ とおく。ここで$\Omega(G_{\tilde{\tau}})$は$G_{\tilde{\tau}}$の不連続領域，$\Delta(G_{\tilde{\tau}})$は下半平面Lに対応する$\Omega(G_{\tilde{\tau}})$の不変成分である。同様に、$\phi_1=\lim\limits_{\tilde{\tau}\to 1}\tilde{\Phi}(\tilde{\tau})$, $G_1=G_{\phi_1}$, $D_1=\Omega(G_1)-\Delta(G_1)$とおく。$G_1$は quasi-Fuchsian group か又は regular b-group である。

各$\tilde{\tau}\in\tilde{D}$に対して、$P_{\tilde{\tau}}$を$\partial D_{\tilde{\tau}}$上の$G_{\tilde{\tau}}$の parabolic transformations の fixed points 全体の集合とし、$\tilde{D}_{\tilde{\tau}}=D_{\tilde{\tau}}\cup P_{\tilde{\tau}}$ とおく。また、P_1'は∂D_1上のG_1の non-accidental parabolic transformations の fixed points 全体の集合とし，P_1''は∂D_1上のG_1の accidental parabolic transformations の fixed points 全体の集合とする。そして、$P_1=P_1'\cup P_1''$, $\tilde{D}_1=D_1\cup P_1$ とおく。

以下のような集合達を考えよう。

$$\mathfrak{D}=\{(\tilde{z},w)\mid \tilde{z}\in\tilde{D},\ w\in D_{\tilde{z}}\},$$
$$\tilde{\mathfrak{D}}=\{(\tilde{z},w)\mid \tilde{z}\in\tilde{D},\ w\in\tilde{D}_{\tilde{z}}\},$$
$$\mathfrak{D}_1=\{(1,w)\mid w\in D_1\},$$
$$\tilde{\mathfrak{D}}_1=\{(1,w)\mid w\in\tilde{D}_1\},\ \text{及び}$$
$$\hat{\mathfrak{D}}=\tilde{\mathfrak{D}}\cup\tilde{\mathfrak{D}}_1 .$$

3) $\hat{\mathfrak{D}}$ に Hausdorff topology を自然に導入しよう。次のように基本近傍系を定める。

Case 1. $a=(\tilde{z}_0,w_0)\in\mathfrak{D}$、 $z_0=W_{\tilde{z}_0}^{-1}(w_0)$ とおき、$\tilde{D}$ における $\tilde{z}_0$ 中心の円板 $\mathcal{E}$ と、U における z_0 中心の円板 K をとる。このとき、$\{(\tilde{z},w)\mid \tilde{z}\in\mathcal{E},\ w\in W_{\tilde{z}}(K)\}$ が点 a における基本近傍系 $\mathfrak{U}_a$ の元である。

Case 2. $a=(\tilde{z}_0,w_0)\in\tilde{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}$、 $z_0=W_{\tilde{z}_0}^{-1}(w_0)$ とおき、$\tilde{D}$ における $\tilde{z}_0$ 中心の円板を $\mathcal{E}$ とする。U 内の点 z_0 における horocycle C をとる。つまり、C は実軸に点 z_0 で接する、$\bar{U}$ 内の Euclidian circle である。$K=\mathrm{Int}\,C\cup\{z_0\}$ とおく。ここで、$\mathrm{Int}\,C$ とは、円周 C の囲む円板のことである。このとき、$\{(\tilde{z},w)\mid \tilde{z}\in\mathcal{E},\ w\in W_{\tilde{z}}(K)\}$ が $\mathfrak{U}_a$ の元である。

以下、$\mathcal{C}$ は、$\tilde{D}$ 内の点 $z=1$ における horocycle である。つまり、$\mathcal{C}$ は circle $(|z|=1)$ に点 $z=1$ で接する $(|z|\leqq 1)$ 内の Euclidian circle である。$\mathcal{K}=\mathrm{Int}\,\mathcal{C}\cup\{1\}$ とおく。

<u>Case 3</u>. $a=(1,w_0)\in\mathfrak{D}_1$, $z_0=W_1^{-1}(w_0)$ とおき、U 内の z_0 中心の円板 K をとる。そのとき、$\{(z,w)\mid z\in\mathcal{K},\ w\in W_z(K)\}$ が $\mathfrak{U}_a$ の元である。

<u>Case 4</u>. $a=(1,w_0)\in\tilde{\mathfrak{D}}_1-\mathfrak{D}_1$ with $w_0\in\gamma_1'$, $z_0=W_1^{-1}(w_0)$ とおく。C は U 内の点 z_0 における horocycle とし、$K=\mathrm{Int}\,C\cup\{z_0\}$ とおく。(この case のときは、W_1, W_1^{-1} はそれぞれ点 z_0, w_0 まで連続的に拡張できることに注意せよ。) このとき、$\{(z,w)\mid z\in\mathcal{K},\ w\in W_z(K)\}$ が $\mathfrak{U}_a$ の元である。

<u>Case 5</u>. $a=(1,w_0)\in\tilde{\mathfrak{D}}_1-\mathfrak{D}_1$ with $w_0\in\gamma_1''$. 点 w_0 に対応する S_0 上の node を p_0 とする。S_0 における点 p_0 の十分小さな近傍 δ_0 をとり、K は $\pi_0^{-1}\circ\alpha^{-1}(\delta_0)$ の一つの連結成分であって、$W_1(K\cap U_1)$ の境界点に点 w_0 があるものとする。このとき、$\{(z,w)\mid z\in\mathcal{K},\ w\in W_z(K)\}\cup\{a\}$ が $\mathfrak{U}_a$ の元である。

以上のように $\{\mathfrak{U}_a\}_{a\in\mathfrak{A}}$ を定めれば、これは基本近傍系の公

理を満し、$\hat{\mathfrak{D}}$上に Hausdorff topology を induce する。以後、$\hat{\mathfrak{D}}$には、このtopologyが入っているものとする。

4) 次に$\widetilde{m}$とGが生成する$\mathfrak{D}$の analytic automorphism group $\mathcal{G}$を考えよう。

$w \in N(G)$は$\widetilde{m} \in Mod(G)$を induce するものとし、各自然数nと各$g \in G$に対して、$w_0 = g \circ w^n$とおく。各$\tau \in \widetilde{D}$に対して、$w_\tau \in Q_{norm}(G)$は$[S, R_\tau, S_{t(\tau)}, t(\tau)]$から定まる$U$の quasiconformal automorphism とする。そして、$\widetilde{w}_\tau = (w_0)_*(w_\tau) = \alpha_\tau \circ w_\tau \circ w_0^{-1}$とおく。ここで、$\alpha_\tau \in SL'(2, \mathbb{R})$は、$\widetilde{w}_\tau \in Q_{norm}(G)$となるようにとる。このとき、$[\widetilde{w}_\tau] = [w_{\gamma^n(\tau)}]$ in $T(G)$である。

また、W_τ, $\widetilde{W}_\tau$ はそれぞれw_τ, $\widetilde{w}_\tau$から定まる$\hat{\mathbb{C}}$の quasiconformal automorphism で、下半平面では conformal なものとする。そして、

$$H_\tau(w) = [w_0]_*(w) = \widetilde{W}_\tau \circ w_0 \circ W_\tau^{-1}(w)$$

とおけば、これはD_τから$D_{\gamma^n(\tau)}$の上への等角写像である。

g_nは(τ, w)を$(\gamma^n(\tau), [w_0]_*(w))$に写す$\mathfrak{D}$の analytic automorphism とすれば、$\mathcal{G} = \{ g_n \mid g \in G, n \in \mathbb{Z} \}$ は fixed-point-free な discrete subgroup of Aut$(\mathfrak{D})$である。

5) 各$g_n \in \mathcal{G}$は、自然に次のようにして、$\hat{\mathfrak{D}}$の homeomorphic automorphism $\hat{g}_n$に拡張される。

$\{W_\tau\}_{\tau\in\Delta}$のときと同様にして、$\{\widetilde{W}_\tau\}_{\tau\in\Delta}$も、$\tau\to 1$ through Δのとき、$\widetilde{U}_1=w_0(U_1)$上で、$\widetilde{U}_1$上の locally quasiconformal mapping $\widetilde{W}_1$に広義一様収束し、また、$\{H_\tau\}_{\tau\in\Delta}$は、$\tau\to 1$ through Δのとき、D_1上で、D_1の conformal automorphism H_1に広義一様収束することが、それぞれ証明される。

ところで、G_1は a quasi-Fuchsian group, 又は、a regular b-group であるから、D_1の各 component は、a quasi-circle で囲まれる。従って、Carathéodory の定理より、D_1上の conformal automorphism H_1は、$\overline{D}_1$上の homeomorphic automorphism $\hat{H}_1$に拡張される。

そこで、$\mathfrak{g}_n$の$\hat{\mathfrak{D}}$上への拡張$\hat{\mathfrak{g}}_n$として、各$(1,w)\in\hat{\mathfrak{D}}_1$に対して、$\hat{\mathfrak{g}}_n(1,w)=(1,\hat{H}_1(w))$とおく。

このとき、$\hat{\mathfrak{g}}_n$は、$\hat{\mathfrak{D}}$の homeomorphic automorphism であることが、証明できる。

6) ここで、商空間$\hat{\mathfrak{S}}=\hat{\mathfrak{D}}/\mathfrak{g}$に normal complex structure を導入したい。(この$\hat{\mathfrak{S}}$が、$\mathfrak{S}$の completion になるべきものである。)

homotopical monodromy $\mathfrak{m}\in Mod(G)$に対応する元$f_*\in Mod(S)$をとる。

正則写像$J: D^*\to R_{(g,n)}$, $J(t)=[S_t]$が、正則拡大$\hat{J}: D\to M_{(g,n)}$ with $\hat{J}(0)=[S_0]$をもち、$X(S_0)$における$\langle id\rangle$の近傍Nで、Nは有

限群$\Gamma_0(S_0)$について stable で、かつ、$N/\Gamma_0(S_0)$が$M(g,n)$における$[S_0]$の近傍になることから、ある正整数ρが存在して、f^ρはαによってS_0上のnodesに写されるS上のJordan curvesのまわりのν回のDehn twistsのある積とhomotopicである。

ここで、ζ-平面において、$E=\{|\zeta|<1\}$, $E^*=\{0<|\zeta|<1\}$とおく。写像$\kappa : E \longrightarrow D$は$\kappa(\zeta)=\zeta^\rho$とする。

$(\mathbb{S},\pi,D^*)$から relation $t=\zeta^\rho$によって作られる正則族$(\mathcal{S},\Pi,E^*)$を考える。すると、各$\zeta\in E^*$を$\langle a(S_\zeta), a(\alpha\circ f_\zeta^{-1}), a(S_0)\rangle$に写す写像$K : E^* \longrightarrow X_\alpha(a(S_0))$は一価正則であるから、$K$は正則拡大$\hat{K} : E \longrightarrow X_\alpha(a(S_0))$ with $\hat{K}(0)=\langle id\rangle$をもつ。

各$\zeta\in E$に対して、点$\hat{K}(\zeta)$によって定まるKleinian groupを$H(\zeta)$とし、その不連続領域のうちで、S_ζに対応する部分を$\Omega(\zeta)$と書く。

以下の集合を考えよう。

$$\mathcal{S}_1=\{(\zeta,[z]) \mid \zeta\in E^*,\ [z]\in\Omega(\zeta)/H(\zeta) \text{ with the images of all elliptic vertices removed}\},$$

$$\hat{\mathcal{S}}_1=\{(\zeta,[z]) \mid \zeta\in E^*,\ [z]\in\Omega(\zeta)/H(\zeta) \text{ with the images of all elliptic vertices identified}\}.$$

このとき、作り方より、$\mathcal{S}_1$, $\hat{\mathcal{S}}_1$はともに2次元複素多様体であって、$\mathcal{S}_1$は$\hat{\mathcal{S}}_1$の Zariski open subset である。さらに、$\Pi_1 : \mathcal{S}_1 \longrightarrow E^*$, $\hat{\Pi}_1 : \hat{\mathcal{S}}_1 \longrightarrow E^*$を projections とすれば、$(\mathcal{S}_1,\Pi_1,E^*)$は type (g,n)の正則族になり、$(\hat{\mathcal{S}}_1,\hat{\Pi}_1,E^*)$は type $(g,0)$の正則族になる。

§1と同様にして、$(\mathcal{S}, \Pi, E^*)$ 及び $(\mathcal{S}_1, \Pi_1, E^*)$ の $T(G)$ への analytic embedding (many-valued) をそれぞれ Φ 及び Ψ とする。そのとき、適当な $\rho = \rho_1$ をとれば、$\Phi = \Psi$ on E^* で、かつ、$(\mathcal{S}, \Pi, E^*)$ と $(\mathcal{S}_1, \Pi_1, E^*)$ とは同じ homotopical monodromy $\hat{\mathcal{M}}_1$ をもつとしてよい。従って、このとき、$(\mathcal{S}, \Pi, E^*)$ と $(\mathcal{S}_1, \Pi_1, E^*)$ は同値なものになる。

さらに、次のような集合を考えよう。

$\mathcal{S}_0 = \hat{\mathcal{S}}_1 \cup \{ (0, [z]) \mid [z] \in \Omega(0)/H(0)$ with the images of all elliptic vertices of $H(0)$ corresponding to the fixed points of non-accidental parabolic transformations$\}$,

$\hat{\mathcal{S}}_0 = \hat{\mathcal{S}}_1 \cup \{ (0, [z]) \mid [z] \in \Omega(0)/H(0)$ with the images of all elliptic vertices of $H(0)$, where related elliptic vertices are identified. $\}$.

このとき、$\mathcal{S}_0$ は2次元複素多様体になり、Imayoshi [6], Theorem 4 の証明と同様にして、$\hat{\mathcal{S}}_0$ 上に自然に normal complex structure $\mathcal{R}$ が入り、$\mathcal{R}|_{\mathcal{S}_0}$ は、$\mathcal{S}_0$ 上にもともと与えられている complex structure と一致し、$\mathcal{S}_0$ は $\hat{\mathcal{S}}_0$ の Zariski open subset になる。
$\hat{\Pi}_0 : \hat{\mathcal{S}}_0 \longrightarrow E$ を natural projection とする。

ここで、$\hat{\mathcal{M}}$ に対応する $w \in N(G)$ に対して、$w_1 = w^{\rho}$ とおけば、w_1 は $\hat{\mathcal{M}}_1$ を induce する。さらに、G の単位元 I に対して、$\hat{\mathcal{G}}$ の元 $\hat{I}_{\rho_1}$ は $\hat{\mathcal{G}}_1$ に制限したとき、その action が trivial であること

に注意せよ。

また、ω と G から生成される $\mathcal{G}$ の subgroup を g_1 とし、g_1 に対応する $\hat{\mathcal{G}}$ の subgroup を $\hat{g}_1$ とする。

正則写像 $P_1 : \tilde{D} \longrightarrow E^*$ は $P(\tilde{z}) = P_1(\tilde{z})$ for $\forall \tilde{z} \in \tilde{D}$ となるものとする。各 $s \in E^*$ に対して、$A_s = \Pi_1^{-1}(s) = \Omega(s)/H(s)$ とおき、その compact 化を $\hat{A}_s$ とすれば、$\hat{A}_s = \hat{\Pi}_0^{-1}(s)$ である。同様に、$A_0 = \Omega(0)/H(0)$ with the images of all related elliptic vertices identified とおき、その compact 化を $\hat{A}_0$ とすれば、$\hat{A}_0 = \hat{\Pi}_0^{-1}(0)$ である。

7) 双正則写像 $F : \mathcal{D}/g_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ が次のように canonically に構成される。

各 $\tilde{z} \in \tilde{D}$ と各 $[z] \in D_{\tilde{z}}/G_{\tilde{z}}$ に対して、

$$F_{\tilde{z}}([z]) = h_{\tilde{z}} \circ \pi_0 \circ W_{\tilde{z}}^{-1}(z)$$

とおく。ここで、$h_{\tilde{z}} : S \longrightarrow S_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})} = A_{P_1(\tilde{z})}$, $\pi_0 : U \longrightarrow S$, $W_{\tilde{z}} : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は以前の通りとする。このとき、$F_{\tilde{z}} : D_{\tilde{z}}/G_{\tilde{z}} \longrightarrow A_{P_1(\tilde{z})}$ は等角同値である。さらに、$(\tilde{z}, z)$ と $(\tilde{z}', z')$ が g_1 で同値ならば、$F_{\tilde{z}}([z]) = F_{\tilde{z}'}([z'])$ となる。従って、$\{F_{\tilde{z}}\}$ は双正則写像 $F : \mathcal{D}/g_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ を induce する。

そして、この F は topological homeomorphism $\hat{F} : \hat{\mathcal{D}}/\hat{g}_1 \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}_0$ に拡張されることが証明される。

8) 一方、$\mathfrak{G}$ の fiber space $F(\mathfrak{G})$ の analytic automorphism $[\omega]_*$ は、a finite subgroup Γ of the analytic automorphism group $\mathfrak{D}/\mathfrak{g}_1$ を induce する。そして、各元 $\gamma\in\Gamma$ は、$\hat{\mathfrak{D}}/\hat{\mathfrak{g}}_1$ の homeomorphic automorphism $\hat{\gamma}$ に拡張される。$\hat{\Gamma}=\{\hat{\gamma}\mid\gamma\in\Gamma\}$, $\Gamma_0=\mathfrak{F}_1\circ\Gamma\circ\mathfrak{F}_1^{-1}$, $\hat{\Gamma}_0=\hat{\mathfrak{F}}_1\circ\hat{\Gamma}\circ\hat{\mathfrak{F}}_1^{-1}$ とおく。$\hat{\mathfrak{A}}_0$ は normal complex space であるから、各元 $\hat{\mathfrak{F}}_1\circ\hat{\gamma}\circ\hat{\mathfrak{F}}_1^{-1}\in\hat{\Gamma}_0$ は、$\hat{\mathfrak{A}}_0$ の analytic automorphism である。従って、Cartan の定理より、$\hat{\mathfrak{A}}_0/\hat{\Gamma}_0$ は、normal complex space になり、$\mathfrak{F}_1$ は、biholomorphic mapping of $\mathfrak{S}_1=(\mathfrak{D}/\mathfrak{g}_1)/\Gamma=\mathfrak{D}/\mathfrak{g}$ onto $\mathfrak{A}_0/\Gamma_0$ を induce し、この mapping は $\hat{\mathfrak{S}}=(\hat{\mathfrak{D}}/\hat{\mathfrak{g}}_1)/\hat{\Gamma}=\hat{\mathfrak{D}}/\hat{\mathfrak{g}}$ から $\hat{\mathfrak{A}}_0/\hat{\Gamma}_0$ の上への homeomorphism に拡張される。この同一視によって、$\hat{\mathfrak{S}}=\hat{\mathfrak{D}}/\hat{\mathfrak{g}}$ 上に a normal complex structure が入る。

そして、$\pi_1:\mathfrak{S}_1\longrightarrow D^*$, $\hat{\pi}:\hat{\mathfrak{S}}\longrightarrow D$ を natural projections とすれば、$(\mathfrak{S},\pi,D^*)$ と $(\mathfrak{S}_1,\pi_1,D^*)$ は equivalent で $(\hat{\mathfrak{S}},\hat{\pi},D)$ は $(\mathfrak{S}_1,\pi_1,D^*)$ の completion になっている。

故に、$\hat{\mathfrak{S}}=\hat{\mathfrak{D}}/\hat{\mathfrak{g}}$ は a normal complex space になり、$\hat{\pi}:\hat{\mathfrak{S}}\longrightarrow D$ を natural projection とすれば、$(\hat{\mathfrak{S}},\hat{\pi},D)$ は $(\mathfrak{S},\pi,D^*)$ の completion である。

以上によって、次の定理を得る。

<u>Theorem 2.</u> type(g,n) の Riemann 面達の正則族 $(\mathfrak{S},\pi,D^*)$ が

与えられたとき、この正則族の completion $(\hat{\mathfrak{S}}, \hat{\pi}, D)$ が canonically に構成できて、$\hat{\mathfrak{S}}$ は 2-dimensional normal complex になる。

各 $t \in D^*$ に対して、$\hat{S}_t = \hat{\pi}^{-1}(t)$ は nonsingular な type $(g, 0)$ の compact Riemann 面であり、$\hat{S}_0 = \hat{\pi}^{-1}(0)$ は singular fibre になる可能性がある。

§3. An extension Theorem.

<u>Theorem 3.</u> $\tilde{\mathfrak{S}}$ を2次元複素多様体、$\tilde{\pi}$ を $\tilde{\mathfrak{S}}$ から単位円板 D の上への proper holomorphic mapping とし、$\tilde{\mathfrak{S}}$ の1次元 analytic subset C があって、$\tilde{S}_0 = \tilde{\pi}^{-1}(0)$, $\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{S}} - \tilde{S}_0 \cup C$, $\pi = \tilde{\pi}|\mathfrak{S}$ とおくとき、$(\mathfrak{S}, \pi, D^*)$ は、type (g, n) の Riemann 面達の正則族になるものとする。　ただし、$3g-3+n \geq 0$、

$(\hat{\mathfrak{S}}, \hat{\pi}, D)$ は Theorem 2 において、canonically に構成された $(\mathfrak{S}, \pi, D^*)$ の completion とする。

そのとき、すべての正則写像 $f : \mathfrak{S} \longrightarrow \hat{\mathfrak{S}}$ with $\pi = \hat{\pi} \circ f$ は、有理写像 $\tilde{f} : \tilde{\mathfrak{S}} \longrightarrow \hat{\mathfrak{S}}$ に拡張され、$\tilde{f}$ の不確定点は $\tilde{S}_0 \cup C$ の特異点達のなかに存在する可能性がある。

この定理の証明は、$\hat{\mathfrak{S}}$ の構成法から、Imayoshi [6] のなかで、

Kobayashi's extension theorem を用いたのと同様の議論によって得られる。

§4、代数曲面の一意化への応用.

まず、Griffiths [5] による代数多様体の一意化定理を述べよう。ここでは、特に、Bers [1], [4] に従って、代数曲面の一意化について説明する。

1) X を $\mathbb{C}$ 上の2次元，既約，非特異な射影的代数多様体とする。以下このようなものを代数曲面と呼ぶ。X_1 は X の空でない Zariski open subset とする。X は適当な射影空間 $\mathbb{P}_N$ に埋めこまれているものとする。このとき、同じ次数の，$N+1$ 変数の2つの斉次多項式 P_0, P_1 と、non-empty Zariski open subsets $Y \subset X_1$, $Z \subset \mathbb{P}_1$ が存在して、各点 $s \in \mathbb{P}_N$ に対して、$\pi(s) = (P_0(s), P_1(s))$ とおけば、π は Y から Z の上への正則写像であって、Y の各点で maximal rank，かつ，$\forall z \in Z$ に対して、$S_z = \pi^{-1}(z) \cap Y$ は a Riemann surface of (fixed) finite type (g, n) with $3g-3+n \geq 0$ とできる。Z の universal covering space $\tilde{Z}$ は、単位円板としてよい。

2) さて、G は elliptic transformations を含まない、第一種有限生成 Fuchs 群で、$S=U/G$ は type (g,n) になるものとする。

一点 $z_0\in Z$ に対して、$p_0\in T(G)$ は、$D_{p_0}/G_{p_0}\cong S_{z_0}$ なるものとする。Z における z_0 の十分小さな近傍 δ をとれば、一意的に正則写像 $\Phi_0 : \delta \longrightarrow T(G)$ があって、$\Phi_0(z_0)=p_0$ かつ $D_{\Phi_0(z)}/G_{\Phi_0(z)}\cong S_z$ for $\forall z\in\delta$ となる。そして、Φ_0 は、Z 内の任意の曲線に沿って解析接続可能である。

$p : \tilde{Z}\longrightarrow Z$ を covering map とし、点 $\tilde{z}_0\in\tilde{Z}$ で $p(\tilde{z}_0)=z_0$ なるものをとる。$\tilde{Z}$ は単連結であるから、正則写像 $\Phi : \tilde{Z}\longrightarrow T(G)$ で、$\Phi(\tilde{z}_0)=p_0$ かつ、$\forall\tilde{z}\in\tilde{Z}$ に対して、$D_{\Phi(\tilde{z})}/G_{\Phi(\tilde{z})}\cong S_{p(\tilde{z})}$ となるものが存在する。

そこで、

$$\mathcal{D}=\{(\tilde{z},w)\,|\,\tilde{z}\in\tilde{Z},\ w\in D_{\Phi(\tilde{z})}\}$$

とおけば、$\mathcal{D}$ は $\mathbb{C}^2$ 内の単連結な bounded Bergmann domain になる。($\mathcal{D}$ は位相的には cell と同値である。)

群 G は、$\mathcal{D}$ 上に次の rule によって、a discrete fixed-point-free group of analytic automorphisms を induce する；

$$g(\tilde{z},w)=(\tilde{z},\ W_{\Phi(\tilde{z})}\circ g\circ W^{-1}_{\Phi(\tilde{z})}(w)),\quad g\in G.$$

商空間 $\mathcal{D}/G$ は、2-dim. complex manifold であって、canonical projection $\Pi : \mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{D}/G$ は universal covering である。

$\mathcal{D}$ の各点は、a pair $(\tilde{z},a)$ with $\tilde{z}\in\tilde{Z}$, $a\in S_{p(\tilde{z})}\subset Y$ such that

$\pi(a)=p(\tilde{z})$ とみなすことができる。このような pair $(\tilde{z}, a)$ に対して、$\tilde{\pi}(\tilde{z}, a)=a$ とおけば、$\tilde{\pi}\circ\Pi : \mathfrak{D}\longrightarrow Y$ は universal covering である。

そこで、§2 における Riemann 面の正則族の完備化の議論を用いて、この Griffiths' uniformization theorem of algebraic surfaces を精密化することを考える。以下では、§2 における記号をそのまま用いることにする。

3) Γ を universal covering $p: \tilde{Z}\longrightarrow Z$ の covering transformation group とすれば、Γ は単位円板 $\tilde{Z}$ 上の、有限生成第一種 Fuchs 群である。$\mathcal{E}$ を Γ の parabolic elements の fixed points 全体の集合とする。各 $\tilde{z}_0\in\mathcal{E}$ に対して、$\Phi(\tilde{z}_0)=\lim_{\tilde{z}\to\tilde{z}_0}\Phi(\tilde{z})$ とおく。ここで、極限は、$\tilde{z}_0$ に cusp をもつ $\tilde{Z}$ 内の cusp region においてとるものとする。各 $\tilde{z}\in\tilde{Z}\cup\mathcal{E}$ に対して、$D_{\Phi(\tilde{z})}=\Omega(G_{\Phi(\tilde{z})})-\Delta(G_{\Phi(\tilde{z})})$, $\mathcal{P}_{\Phi(\tilde{z})}=$ the set of all fixed points of parabolic elements of $G_{\Phi(\tilde{z})}$ on $\partial D_{\Phi(\tilde{z})}$ とおく。

そして、

$$\hat{\mathfrak{D}}=\{(\tilde{z}, w)\mid \tilde{z}\in\tilde{Z}\cup\mathcal{E},\ w\in D_{\Phi(\tilde{z})}\cup\mathcal{P}_{\Phi(\tilde{z})}\}$$

とおく。$\hat{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}$ の各点を cusp point と呼ぶ。§2 で述べたように、$\hat{\mathfrak{D}}$ には自然に Hausdorff topology が入る。

4) Γ 又は G の各元は、$\mathfrak{D}$ の analytic automorphism を induce し、$\hat{\mathfrak{D}}$ の homeomorphic automorphism に拡張される。 このようにして、Γ と G から生成される discrete fixed-point-free group of analytic automorphisms of $\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{G}$ とし、$\mathfrak{G}$ の各元を $\hat{\mathfrak{D}}$ 上に拡張して得られる group of homeomorphic automorphisms of $\hat{\mathfrak{D}}$ を $\hat{\mathfrak{G}}$ とする。

そのとき、$\mathfrak{S} = \mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ は、a two dimensional complex manifold で、Y と canonically に biholomorphically equivalent である。この identification によって、$\mathfrak{S} = Y$ と思えば、$\mathfrak{D}$ が Y の universal covering space で、$\mathfrak{G}$ がその covering transformation group である。

さらに、$\hat{\mathfrak{S}} = \hat{\mathfrak{D}}/\hat{\mathfrak{G}}$ は、a two dimensional compact normal complex space になり、Theorem 3 より、$\hat{\mathfrak{S}}$ と X は双有理型同値である。

以上によって、次の定理を得る。

<u>Theorem 4.</u> X を代数曲面とし、X_1 は X の non-empty Zariski open subset とする。そのとき、non-empty Zariski open subset $Y \subset X_1$ があって、Y の universal covering space $\mathfrak{D}$ が canonically に構成できて、$\mathbb{C}^2$ 内の bounded Bergman domain になり、位相的

には、a cell である。

さらに、$\mathfrak{H}$ にすべての cusp points を付加した集合を $\hat{\mathfrak{H}}$ とし、$\mathfrak{G}$ を covering transformation group とすれば、$\hat{\mathfrak{H}}$ には自然に Hausdorff topology が入り、$\mathfrak{G}$ の各元は、$\hat{\mathfrak{H}}$ の位相自己同型写像に拡張でき、それらから作られる群を $\hat{\mathfrak{G}}$ とすれば、$\hat{\mathfrak{S}} = \hat{\mathfrak{H}}/\hat{\mathfrak{G}}$ は a two dimensional compact normal complex space になり、X と $\hat{\mathfrak{S}}$ は双有理型同値である。

§5. 2次元 Stein 多様体の compactification への応用

一般に、compact complex space M が、complex manifold X の compact化であるとは、analytic subset T of M があって、X と $M-T$ が双正則になるときを云う。

ここでは、一定の holomorphic fibering をもつ 2次元 Stein 多様体の compact化について考える。

<u>Theorem 5</u> $\mathfrak{S}$ を2次元 Stein 多様体, R を compact Riemann 面, R_0 を a Zariski open subset of R とする。正則写像 $\pi: \mathfrak{S} \longrightarrow R_0$ があって、

1) $\mathfrak{S}$ の各点において π は maximal rank,

2) $^{\forall}t \in R_0$ に対して、$S_t = \pi^{-1}(t)$ は、a Riemann surface of fixed finite type (g, n) with $3g-3+n \geqq 0$.
とする。

このとき、$\mathfrak{S}$ の compactification $\hat{\mathfrak{S}}$ が canonically に構成できて、$\hat{\mathfrak{S}}$ は 2-dim. normal complex space で、かつ、代数曲面と双有理型同値になる。さらに、$\mathfrak{S}$ の任意の compactification は、$\hat{\mathfrak{S}}$ と双有理型同値である。

この $\hat{\mathfrak{S}}$ の構成は Theorem 2 で与えられ、$\hat{\mathfrak{S}}$ が代数曲面と双有理型同値であることは、Kodaira の分類理論（解析曲面についての）から得られる。また、$\mathfrak{S}$ の任意の compactification が $\hat{\mathfrak{S}}$ と双有理型同値になることは、Theorem 3 から示される。

<u>Notice</u>

1) $3g-3+n<0$ ならば、$\mathfrak{S}$ の compact 化で、代数曲面とは、けっして双有理型同値にならないものがある。その例として、$\mathfrak{S} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ を考える。

$\mathbb{C}^2$ の点 (z, w) を $(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}w)$ に写す linear automorphism of $\mathbb{C}^2$ から生成される群を G とする。そして、Hoph 曲面

$\hat{S} = \mathbb{C}^2 - \{0\}/G$ を考えれば、これは $S^1 \times S^3$ と diffeomorphic になるので、その first Betti number は 1（奇数）となって、Kähler manifold ではありえない。従って、$\hat{S}$ は代数曲面ではありえない。さらに、$\hat{S}$ 上には有理型函数は定数しかなく、non-singular elliptic curve $C = \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{C}^*\}/G$ 以外には、$\hat{S}$ 上に analytic curve が存在しないことがわかる。また、$S = \hat{S} - C$, $\pi([z], [w]) = \exp\left(2\pi i \frac{z}{w}\right)$ for $(z, w) \in \mathbb{C}^2 - \{w = 0\}$ とおけば、対応 $([z], [w]) \longmapsto \left(\exp\left(2\pi i \frac{z}{w}\right), w \exp\left(\frac{z}{w} \log 2\right)\right)$ によって、S と $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ は双正則であり、$(S, \pi, \mathbb{C}^*)$ は type $(0,2)$ の holomorphic fibering になる。

従って、$S \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ の compactification として、代数曲面と双有理型同値でない Hopf 曲面が存在することになる。

2) Theorem 3 と 5 の応用として、Kizuka による $\mathbb{C}^2$ の analytic automorphism が polynomial map になるための定理 (to appear) を得ることができることを述べる。

$P(x, y)$ を定数でない、2変数 x, y の多項式とする。$^{\forall} c \in \mathbb{C}$ に対して、$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x, y) - c = 0\}$ の各既約成分 S_c を P の prime surface と呼ぶ。S_c の desingularization が type (g, n) のとき、S_c は type (g, n) であると云う。すると、有限個の c を除いて、すべての S_c は fixed finite type (g_0, n_0) になる。$3g_0 - 3 + n_0 \geq 0$

のとき、Pは一般型であると云う。

このとき、Kizuka による、$\mathbb{C}^2$の analytic automorphism が、polynomial map になるための定理として次のものがある。

<u>Theorem (Kizuka)</u> Tを$\mathbb{C}^2$の analytic automorphism とする。ある general type の polynomial Pがあって、$P\circ T$もまた、polynomial になれば、Tは polynomial map である。

Theorem 3, 5 の応用として、この定理が得られることを述べる。

任意の polynomial map Pに対して、適当に polynomial P_0と一変数の polynomial φをとれば、$P=\varphi(P_0)$、かつ、有限個のcを除いて、P_0の任意の定数面$\{P_0-c=0\}$は既約になるようにできる。従って、もともと、有限個のcを除いて、Pの任意の定数面$\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid P(x,y)-c=0\}$が既約としてよい。

$Q=P\circ T$とおく。このとき、$\mathbb{P}_2$内の analytic curves C_1, C_2があって、$S_1=\mathbb{P}_2-C_1$, $S_2=\mathbb{P}_2-C_2$, $\pi_1=P|S_1$, $\pi_2=Q|S_2$, $R=\mathbb{P}_1-$ a set of finite points とおけば、(S_1,π_1,R), (S_2,π_2,R)は、holomorphic family of Riemann surfaces of type (g_0,n_0)

with $3g_0-3+n_0 \geq 0$ となる。そして、Tは$\pi_1=\pi_2 \circ T$となる biholomorphic mapping T_0 of S_1 onto S_2 を induce する。

$(\hat{S}_1, \hat{\pi}_1, \mathbb{P}_1)$ 及び $(\hat{S}_2, \hat{\pi}_1, \mathbb{P}_1)$ をそれぞれ (S_1, π_1, R) 及び (S_2, π_2, R) の Theorem 5 において構成した completions とする。

$j_1 : S_1 \longrightarrow \hat{S}_1$, $j_2 : S_2 \longrightarrow \hat{S}_2$ を inclusion maps とすれば、Theorem 3 より、j_1, j_2 はそれぞれ、bimeromorphic extensions $\hat{j}_1 : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \hat{S}_1$, $\hat{j}_2 : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \hat{S}_2$ を induce する。同様に、biholomorphic mapping $j_2 \circ T_0 \circ j_1^{-1} : j_1(S_1) \longrightarrow j_2(S_2)$ は、$\hat{S}_1$ から $\hat{S}_2$ の上への bimeromorphic extension をもつ。従って、analytic automorphism $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は bimeromorphic extension $\hat{T} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ をもつ。故に $\hat{T}$ は rational map であり、$T = \hat{T}|\mathbb{C}^2$ が holomorphic であるから、T は polynomial map になる。

References

[1] L. Bers, Uniformization, Moduli and Kleinian groups, Bull. of London Math. Soc. 4 (1972), 257-300.

[2] ——— , Spaces of degenerating Riemann surfaces, in "Discontinuous groups and Riemann surfaces", Ann. of Math. Studies 79, Princeton Univ. Press, (1974), 43-55.

[3] ——— , Deformations and Moduli of Riemann surfaces with nodes and signatures, Math. Scand. 36 (1975), 12-16.

[4] ——— , On Hilbert's 22nd problem, proceedings of Symposia in pure mathematics, Volume 28 (1976), 559-609.

[5] P. A. Griffiths, Complex analytic properties of certain Zariski open subsets on algebraic varieties, Ann. of Math. 94 (1971), 21-55.

[6] Y. Imayoshi, Holomorphic families of Riemann surfaces and Teichmüller spaces, to appear.

[7] ————— , Applications of Teichmüller spaces to uniformization of algebraic surfaces and compactification of two dimensional stein manifolds, to appear.