数理解析研究所講究録
第 319 巻 1978 年 9-19

MR-theory の問題点

大阪市大・理　荒木捷朗

MR-theory について，二つの問題点を指摘したい．
$MR^{*,*}(pt)$ を決定する過程において，$MR^{*,*}(pt)$ に associate された Forgetful spectral sequence を計算することが問題になる．こゝで Forgetful spectral sequence とは，τ-cohomology $h^{*,*}$ [2] において，τ-cofibration $S^{1,0}_+ \to B^{1,0}_+ \to \Sigma^{1,0}$ は任意の finite τ-complex X に対して natural な完全列

$$\cdots \to h^{p-1,q}(X) \xrightarrow{\chi} h^{p,q}(X) \xrightarrow{\alpha} h^{p,q}(S^{1,0}\times X) \xrightarrow{\delta} h^{p-1,q+1}(X) \to \cdots$$

が定まり，一方，自然な同型 $\beta : h^{p,q}(S^{1,0}\times X) \approx \psi h^{p+q}(X)$ もあり，$\beta\circ\alpha = \psi : h^{p,q}(X) \to \psi h^{p+q}(X)$ は忘却準同型になる．そこで上の完全列は忘却完全列と呼ばれるが，こゝで

$$D_1^{p,q}(X) = h^{p,q}(X), \qquad E_1^{p,q}(X) = h^{p,q}(S^{1,0}\times X)$$

とおけば，上の完全列は完全対 (bigraded) を与え，従ってスペクトル系列 $E_r^{p,q}(X)$ が定まる．これを $h^{*,*}(X)$ に associate された forgetful spectral sequence と呼んでいる．

所で，一般の forgetful spectral sequence の E_r-項は次のような periodicity をもつ．今，$h^{*,*}$ は乗法的であるとすれば，

$$u_r \in E_r^{a_r,-a_r}(pt)$$

で u_r は乗法逆元をもつものがある．そこで同型

$$\varpi_r : E_r^{p,q}(X) \approx E_r^{p+a_r,q-a_r}(X), \quad \varpi_r(x) = u_r\cdot x,$$

が成立つ．これを $E_r^{p,q}(X)$ の periodicity 同型という．ここで，

$$a_r = 2^{\varphi(r-1)},$$

$$\varphi(k) = \#\{ s \in \mathbb{Z} ;\ 0 < s \leq k,\ s \equiv 0, 1, 2, 4 \mod 8 \}$$

である．実際 u_r は既約な Clifford 加群を用いて作られる．

一般に，全射

$$\lambda_r : h^{p,q}(S^{r,0} \times X) \longrightarrow E_r^{p,q}(X)$$

が存在し [1]，一方既約な Clifford 加群を用いて τ-同相

$$S^{r,0} \times (B^{a_r,0}, S^{a_r,0}) \approx S^{r,0} \times (B^{0,a_r}, S^{0,a_r})$$

が得られ，これと懸垂同型より，元

$$\bar{u}_r \in E_r^{a_r,-a_r}(S^{r,0})$$

が得られ，$\lambda_r(\bar{u}_r) = u_r$ とおく。u_r の可逆性は $\bar{u}_r$ のそれから従い，$\bar{u}_r$ の逆元はその定義を逆向きにして考えれば得られる．

一般には $(a_r, -a_r)$ が最小周期のように思われ（証明はな

い)，この一般的周期性は $h^{*,*}(S^{r,0})$ の乗法可逆元 $\overline{w}_r$ から得られたことを先ず注意しておく。

所で，$MR^{*,*}(X)$ に associate された forgetful spectral sequence においては，より小さな周期をもつ周期性同型が成立つ。即ち，乗法的可逆元

$$w_r \in E_r^{b_r,-b_r}(pt)$$

がある。こゝで

$$b_r = 2^s \quad , \quad 2^s \le r < 2^{s+1} \text{ のとき},$$

である。一般には $b_r \le a_r$ で

$$a_r = b_r \iff r = 1,2,4,8$$

となることは容易にわかる。又，この現象は MR-theory に限らず，一般に real-complex vector bundle (Atiyah の意味での real vector bundle) に対して自然且つ乗法的な orientations をもつ τ-cohomology ならこのような小さな周期をもつ周期性同型が成りたつ。従って，$S^{r,0}$ 上の real-complex vector bundles の Thom class を用いて w_r が実現出来るように思われるが，この点は一般には明らかでない。そこで

<u>問題</u> 1. MR-理論において，乗法的可逆元

$$\overline{w}_r \in MR^{b_r,-b_r}(S^{r,0})$$

があるか？（あれば必然的に $\lambda_r(\overline{w}_r) = \pm w_r$ となる）

上の ϖ_r を探す問題は，$MR^{*,*}(S^{r,0})$ を計算するためにも重要である．次に $MR^{*,*}(S^{r,0})$ を計算することと，それがどんな意味をもつかを考えていく．

$r>0$，$s>0$ に対して，自然な包含

$$S^{r,0}\subset S^{r+s,0}$$

を考える．簡単な考察で，τ-同相

$$S^{r+s,0}/S^{r,0}\approx\Sigma^{r,0}(S^{s,0}_+)$$

が得られる．従って，τ-cofibration

$$S^{r,0}_+\xrightarrow{\eta_{r,r+s}}S^{r+s,0}_+\xrightarrow{\xi_{r+s,s}}S^{r+s,0}/S^{r,0}$$

は，X について自然な完全列

$$\cdots\to MR^{p-r,q}(S^{s,0}\times X)\xrightarrow{\xi^*_{r+s,s}}MR^{p,q}(S^{r+s,0}\times X)$$
$$\xrightarrow{\eta^*_{r,r+s}}MR^{p,q}(S^{r,0}\times X)\xrightarrow{\delta_{s,r}}MR^{p-r,q+1}(S^{s,0}\times X)\to\cdots$$

が得られる．特に $X=pt$ のとき，この完全列を利用して $MR^{*,*}(S^{r,0})$ を計算することを考える．$r=1,2,\cdots$，と次々に計算して行くのである．

$a_1=b_1$，$a_2=b_2$ であったから，$\overline{w}_1=\overline{u}_1$，$\overline{w}_2=\overline{u}_2$ としてよいことに先づ注意する．

殆んど自明な同型

$$MR^{p,q}(S^{1,0}\times X)\approx MU^{p+q}(X)$$

(このことは $\psi MR^* = MU^*$ であることを示している)より，

$$MR^{*,*}(S^{1,0}) = MR^*(pt)[\bar{w}_1, \bar{w}_1^{-1}]$$

であることがわかる．但し

$$MR^*(pt) = \sum_n MR^{n,n}(pt) \approx MU^{ev}(pt).$$

次に $MR^{*,*}(S^{2,0})$ を計算するのに，前の完全列を $r=s=1$ として用いる．$MR^{*,*}(pt)$ の forgetful spectral sequence の計算(の生成元)より，

$$\delta_{1,1}\bar{w}_1 = \pm 2, \qquad \delta_{1,1}\bar{w}_1^{2} = 0$$

がわかる．又 $\eta_{1,2}^{*}\bar{w}_2 = \pm \bar{w}_1^{2}$ である(この種の関係は周期性元については常に成立つ．するとこの完全列が計算され，次の定理を得る

<u>定理</u> 1. $MR^{*,*}(S^{2,0}) = MR^*(pt)[\bar{w}_2, \bar{w}_2^{-1}][\xi_{2,1}^{*}\bar{w}_1, \alpha]/I$,

但し，$I = ((\xi_{2,1}^{*}\bar{w}_1)^2, 2\alpha, \alpha^2, (\xi_{2,1}^{*}\bar{w}_1)\alpha)$，$\xi_{2,1}^{*}\bar{w}_1 \in MR^{2,-1}(S^{2,0})$，$\alpha = \chi(1)\cdot 1 \in MR^{1,0}(S^{2,0})$.

次に $MR^{*,*}(S^{3,0})$ を計算するのであるが，$\bar{w}_3$ がまだわかっていない．先ず $\bar{w}_3$ を作る．

$CP_1 = S^2$ 上の Hopf bundle を考えるのに，その principal $\mathbb{C}^*$-bundle は

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 - \{0\} & \longrightarrow & CP_1 \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\;\; & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\;\; \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & [z_1, z_2] \end{array}$$

で与える．こゝで $\mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$，4元数体，と同一視するとき，

$\mathbb{C}^2 - \{0\} = \mathbb{H}^*$ で，Hopf principal $\mathbb{C}^*$-bundle は

$$h : \mathbb{H}^* \xrightarrow{\pi} CP_1$$

となり，right $\mathbb{C}^*$-action は "$q \longmapsto q z$" でなえられ，

$$\eta^* = \mathbb{H}^* \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}$$

が Hopf line bundle である．

$$J : \eta^* \longrightarrow \eta^*$$

を $J(q, \zeta) = (-q \cdot j, \bar{\zeta})$, $q \in \mathbb{H}^*$, $\zeta \in \mathbb{C}$，と定義すると，
J は η^* の fibers を fibers に移し，CP_1 の involution $\tilde{J}$
を induce する．て-同相 $(CP_1, \tilde{J}) \approx S^{3,0}$ は容易に得られる．又，J は η^* の各 fiber 上で conjugate linear に作用し，$J^2 = -1$ である．即ち symplectic-complex line bundle

$$(\eta^*, J) \longrightarrow S^{3,0}$$

が得られた．この bundle は，かって Dupont [3] が KR-theory の研究に用いた．

$(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, J \otimes j)$ を考える．但し j は $\mathbb{H}$ への left multiplication とすると，$(J \otimes j)^2 = 1$ であるから，

$$(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, J \otimes j) \longrightarrow S^{3,0}$$

は $S^{3,0}$ 上の real-complex 2-vector bundle になる．この MR-Thom class を

$$t_{MR}(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}) \in \widetilde{MR}^{2,2}(M(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}))$$

とする．

$$\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H} = (\mathbb{H}^\dagger \times_{\mathbb{C}^\dagger} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H} = \mathbb{H}^\dagger \times_{\mathbb{C}^\dagger} \mathbb{H}$$

となることに注意し，

$$\chi : \mathbb{H}^\dagger \times_{\mathbb{C}^\dagger} \mathbb{H} \longrightarrow S^{3,0} \times \mathbb{H}$$

を $\chi(q, q') = (\pi(q), qq')$ と与える．χは実 vector bundle の同型で，$S^{3,0} \times \mathbb{H}$ の $\mathbb{H}$ には自明な involution を与えると χは τ-map である．即ち

$$\chi : (\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H},\ J \otimes j) \approx S^{3,0} \times \mathbb{R}^{0,4},$$

involution をもつ real vector bundles の同型．従に

$$\tilde{\chi} : M(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}) \approx S^{3,0}_+ \wedge \Sigma^{0,4},$$

τ-同相，が導かれる．すると

$$\begin{aligned} \widetilde{MR}^{2,2}(M(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H})) &\overset{\tilde{\chi}^*}{\approx} \widetilde{MR}^{2,2}(S^{3,0}_+ \wedge \Sigma^{0,4}) \\ &\overset{\sigma^{0,-4}}{\approx} \widetilde{MR}^{2,-2}(S^{3,0}_+) = MR^{2,-2}(S^{3,0}). \end{aligned}$$

この同型の合成による $t_{MR}(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H})$ の像を

$$\varpi_3 \in MR^{2,-2}(S^{3,0})$$

とおく．

次の同型の合成

$$\begin{aligned} MR^{p,q}(S^{3,0} \times X) &\approx \widetilde{MR}^{p+2,q+2}(M(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}) \wedge X_+) \\ &\overset{\tilde{\chi}^*}{\approx} \widetilde{MR}^{p+2,q+2}(S^{3,0}_+ \wedge \Sigma^{0,4} \wedge X_+) \\ &\overset{\sigma^{0,4}}{\approx} MR^{p+2,q-2}(S^{3,0} \times X) \end{aligned}$$

（但し初めの同型は $\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H} \times 1$ の Thom 同型）により，同

型

$$MR^{p,q}(S^{3,0}\times X)\approx MR^{p+2,q-2}(S^{3,0}\times X)$$

が常に成立つが，この同型は $\bar{\omega}_3$ との積で得られることは容易にわかる．よって $\bar{\omega}_3$ は乗法可逆元でこれが求めるものである．

そこで，前にのべた完全列を $r=2$，$s=1$ のとき計算する．$\eta_{2,2}^{*}\bar{\omega}_1=\pm\bar{\omega}_2$，となり，又，forgetful spectral sequence より $\delta_{1,2}^{*}\xi_{2,1}^{*}\bar{\omega}_1=\pm 2$ となる．これで $MR^{*,*}(S^{3,0})$ が計算出来る．

定理 2．$MR^{*,*}(S^{3,0})=MR^{*}(pt)[\bar{\omega}_3,\bar{\omega}_3^{-1}][\xi_{3,1}^{*}\bar{\omega}_1,\beta]/J$，但し $J=((\xi_{3,1}^{*}\bar{\omega}_1)^2,2\beta,\beta^3,(\xi_{3,1}^{*}\bar{\omega}_1)\beta)$，$\beta=\chi(1)\cdot 1\in MR^{1,0}(S^{3,0})$，$\xi_{3,1}^{*}\bar{\omega}_1\in MR^{3,-1}(S^{3,0})$．

有限 CW 複体 X に対し，自明な involution を与え

$$L^{*}(X)=MR^{*,*}(S^{3,0}\times X)/\sim$$

とおく．但し，$\sim$ は周期性同型（$\bar{\omega}_3$ との積）で同一視した relation．すると，$\sim$ は bidegree の異なるものを同一視するから，L^{*} は half-exact functor で，$\deg(\bar{\omega}_3)=(2,-2)$ で，この $\sim$ は total degree を変えないから，L^{*} は total degree で graded．容易にわかるように，L^{*} は (-3)-connected な multiplicative cohomology theory になる．

X 上の $\mathbb{H}$-vector bundle E に対し，同相 χ が拡張定義さ

れ，involution をもった 実 vector bundle の同型

$$\chi_E : \eta^*\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} E \approx S^{3,0}\times E$$

が得られる．但し，左辺の E には j が左から act し，右辺の E は trivial involution をもつ．すると，て-同相

$$\widetilde{\chi}_E : M(\eta^*\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} E) \approx S^{3,0}_+\wedge ME$$

が得られ，元

$$(\widetilde{\chi}_E^*)^{-1}(t_{MR}(\eta^*\hat{\otimes}_{\mathbb{C}} E)) \in MR^{2n,2n}(S^{3,0}_+\wedge ME)$$

を $L^{4n}(ME)$ におとしたものを E の L^*-Thom class と見ることが出来る．これにより，L^* は symplectic-oriented．よって multiplicative, orientation-preserving natural transformation

$$\nu : MSp^* \longrightarrow L^*$$

が得られる．$KR^{*,*}(S^{3,0}\times X)$ と $KO^*(X)$ との関係，及び Fujii [4] の natural transformation

$$\gamma : MR^{*,*} \longrightarrow KR^{*,*}$$

を調べて次の定理を得る．

<u>定理</u> 3．ν は Conner-Floyd map : $MSp^*\longrightarrow KO^*$ 及び 忘却写像 $MSp^*\longrightarrow MU^*$ を factorise する．

よって，L^* は MSp^* をしらべるための有力手段たり得るものであろう．

<u>問題</u> 2．$\nu(pt) : MSp^*(pt) \longrightarrow L^*(pt)$ を調べる方法をみつけよ．

$L^*(pt)$ は定理2からすぐわかることを注意しておく. その形からみて, L^* は $KO\wedge MU$ にかなり近いようにも見える. L^* からの MSp についての information が $KO\wedge MU$ 以上のものが得られないときは, 更に $MR^{*,*}(S^{p,0})$, $p\geq 4$, を計算してみると, L^* よりもっと MSp に近いものが得られるであろうか? $a_4=b_4$ であるから, $\overline{w_4}=\overline{u_4}$ で, $MR^{*,*}(S^{4,0})$ の計算はそれ程困難でない筈である.

最後に, L^* を KO^* のある種の cobordism analogue とみたい. そのとき, $MR^{*,*}(S^{2,0}\times X)$ を periodicity で同一視して得られる cohomology は, KSC^* のある種の cobordism analogue とみられるものである. ($MR^{*,*}$ を $KR^{*,*}$ の cobordism analogue とみると同様な意味で).

以上.

文献

[1] S. Araki, Forgetful spectral sequences (to appear in Osaka J. Math.)

[2] S. Araki and M. Murayama, τ-cohomology theories, Japanese J. of Math., N.S., 4 (1978) (to appear).

[3] J. L. Dupont, Symplectic bundles and KR-theory, Math. Scand. 24 (1969), 27–30.

[4] M. Fujii, On the relation of real cobordism to KR-theory, Math. J. Okayama Univ., 19 (1977), 147–158.