数理解析研究所講究録
第 319 巻 1978 年 84-99

Equivariant S-duality

阪市大理　村山光孝

Gを有限群とするとき，G-equivariant stable homotopyに対して，Spanier[12]と同様の議論ができ，それによってG-homologyとG-cohomologyの間のdualityについて論じることを目的とする。

§1では，その準備として，unstable G-homotopyの性質，特にBlakers-Masseyの定理，suspension同型について調べる。§2では，Equivariant S-dualityについて，[12]，[1]に従って論じる。

§1　G-homotopy groups

GをCompact Lie groupとする。G-CW complex([9])は同変写像に対して，CW-complexと同様の構成が可能である。例えば，G-H.E.Pをもち，G-胞体近似，J.H.C Whiteheadの定理，等が成立する。(c.f.[9])　さらに次の命題が成り立つ。

以下簡略化の為に G-space で pointed G-space を表わし、G-map は基点を保つものとする。又 $\mathcal{S}(G)$ は G の閉部分群全体からなる集合、とする。

<u>命題1.1</u>　X を G-space，(K, L) を G-CW complex pair とする。$\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し $X^H = \{x \in X \mid gx = x, g \in H\}$ は n_H-connected，かつ $\dim_G(K^H - L^H) \leq n_H + 1$，$n_H \geq -1$ ならば，任意の G-map $f: L \to X$ は K 上に (G-map として) 拡張可能である。

[証明]　K の s-skelton K^s に f が帰納的に拡張されることを示す。K^{s-1} まで拡張されたと仮定する。$e^s \subset K - L$ を s-cell で isotropy subgroup が H であるものとすれば，$s \leq n_H + 1$，$f(\partial e^s) \subset X^H$ であるから，f は e^s に，$f(e^s) \subset X^H$ をみたすように拡張できる。これを G-action で拡張すれば，f は $K^{s-1} \cup Ge^s$ 上に G-map として拡張される。これを続ければよい。　(終)

<u>命題1.2</u>　(X, A) を G-space pair，(K, L) を G-CW complex pair とする。$\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し，(X^H, A^H) は n_H-connected，かつ $\dim_G(K^H - L^H) \leq n_H$，$n_H \geq 0$ ならば，任意の (pair の) G-map $f: (K, L) \to (X, A)$ は，A への G-map に G-homotopic relative A，である。

証明は 1.1 と同様にすればよい。

写像の n-equivalence の定義は [13] p404 を参照する。上の命題により，[13] Theorem 7.6.22，[8] 4章，定理 2.15 と同様にして

次の命題を得る。

命題 1.3　X, Y を G-space, $f: X \to Y$ を G-map とする。$f^H = f|_{X^H}: X^H \to Y^H$ が n_H-equivalence, $n_H \geq 0$, $\forall H \in \mathscr{A}(G)$ ならば、G-CW complex K に対して、

$$f_*: [K, X]^G \to [K, Y]^G$$

は、すべての $H \in \mathscr{A}(G)$ に対して、$\dim_G K^H < n_H$ のとき同型、$\dim_G K^H \leq n_H$ のとき全射、である。

この relative form として次を得る。

命題 1.4　(X, A), (Y, B) を G-space pair で $\forall H \in \mathscr{A}(G)$ に対し (X^H, A^H), (Y^H, B^H) は 1-connected とする。$f: (X, A) \to (Y, B)$ は G-map で、$\forall H \in \mathscr{A}(G)$ に対し

$$f_*^H: \pi_i(X^H) \to \pi_i(Y^H)$$

は $i < n_H$ のとき同型、$i = n_H$ のとき全射、であるものとする。このとき、G-CW complex K に対して

$$f_*: [CK, K; X, A]^G \to [CK, K; Y, B]^G$$

は、$\forall H \in \mathscr{A}(G)$ に対して、$\dim_G K^H + 1 < n_H$ のとき同型、$\dim_G K^H + 1 \leq n_H$ のとき全射である。（ここで CK は K の cone。）

上の命題と Blakers-Massey [5] を組み合わせて次の命題を得る。

命題 1.5　(X, A) は次をみたす G-space pair とする。A は X の closed G-subspace。$\forall H \in \mathscr{A}(G)$ に対して、

(i) (X^H, A^H) は m_H-connected, $m_H \geq 1$, (ii) A^H は n_H-connected, $n_H \geq 1$

$i : (X, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$, $i' : (CA, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$ を

inclusion とするとき，G-CW complex K に対し

$$i_* : [CK, K ; X, A]^G \longrightarrow [CK, K ; X \cup CA, CA]^G ,$$

$$i'_* : [CK, K ; CA, A]^G \longrightarrow [CK, K ; X \cup CA, CA]^G$$

は $\forall H \in \mathcal{J}(G)$ に対して，$\dim_G K^H + 1 \leq m_H + n_H$ のとき同型，

$\dim_G K^H + 1 \leq m_H + n_H + 1$ のとき全射，である。

G-CW complex pair (X, A) は G-HEP をもつので $X \cup CA \underset{G}{\simeq} X/A$

が成り立つ。従って上の命題を次の様に書き直せる。

<u>定理 1.6</u>　(X, A) は G-CW complex pair で，$\forall H \in \mathcal{J}(G)$ に対し

(i) (X^H, A^H) は m_H-connected, $m_H \geq 1$, (ii) A^H は n_H-connected, $n_H \geq 1$,

とする。このとき G-CW complex K に対して

$$p_* : [CK, K ; X, A]^G \longrightarrow [\Sigma K, X/A]^G$$

は $\forall H \in \mathcal{J}(G)$ に対して，$\dim_G K^H + 1 \leq m_H + n_H$ のとき同型，

$\dim_G K^H + 1 \leq m_H + n_H + 1$ のとき全射である。

G を有限群とするとき，G-CW complex は G-complex (Bredon[6])

になる。G-spectrum $\mathbb{E} = \{E_n, \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ を次の様に定義する。(cf.[1])

W を，同値でない既約 G-module を 1 つずつ含む G-module と

する。E_n は G-complex の G-homotopy type をもつ G-space とし，

$\varepsilon_n : \Sigma^W E_n \to E_{n+1}$ を G-map とする。ここで Σ^W は W の 1点 compact

化である。smooth G-manifold は G-CW complex structure をもつ

（G が compact Lie group のとき，[10]）ので，Σ^W は G-CW complex structure を（従って G-complex structure を）もつ。

G-spectrum $\mathbb{E}$，G-space X, Y，$\alpha = \overline{V} - \overline{W} \in RO(G)$, $\overline{V}, \overline{W}$ G-module に対し $[X, \mathbb{E} \wedge Y]^G$ を

$$[X, \mathbb{E} \wedge Y]^G = \varinjlim_n [\Sigma^{nU + \overline{V}} X, E_n \Sigma^{\overline{W}} \wedge Y]^G$$

（$\Sigma^{\overline{V}} X = \Sigma^{\overline{V}} \wedge X$, $E_n \Sigma^{\overline{W}} = E_n \wedge \Sigma^{\overline{W}}$）と定義する。$X$ を fixed finite G-complex とするとき，上の定理が適用できて，$[X, \mathbb{E} \wedge (\ )]^G_\alpha$ は G-complex の category 上の half exact functor であることが示される。

次に写像空間 $F(X, Y)$ について論じる。G-space X, Y に対して $F(X, Y)$ は，G-action を，$g(f)(x) = gf(g^{-1}x)$ で定義して G-space になる。このとき，$F(X, Y)^G$ は G-map 全体になる。特に，$F(X^G, Y)^G = F(X^G, Y^G)$ となる。X，Y を locally compact G-space，X, Z を G-space とすると，

$$[X \wedge Y, Z]^G \cong [X, F(Y, Z)]^G$$

が成立する。このとき次が成り立つ。

<u>補題 1.7</u>　X を locally compact G-CW complex，Y を G-space とする。r；$F(X, Y)^G \longrightarrow F(X^G, Y)^G = F(X^G, Y^G)$ を制限写像とする。$\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し，Y^H は n_H connected, $n_H \geq 0$ とするとき

$$r_*；\pi_j(F(X, Y)^G) \longrightarrow \pi_j(F(X^G, Y^G))$$

は $\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し，$j \leq N_H$ のとき同型，$j \leq N_H + 1$ のとき全射

である。ここで

$$N_H = \begin{cases} n_H - \dim_G (X^H - X^G) & \text{if } X^H \neq X^G \\ \infty & \text{if } X^H = X^G \end{cases}$$

。

[証明] $\pi_j(F(X,Y)^G) = [\Sigma^j, F(X,Y)^G] \cong [\Sigma^j \wedge X, Y]^G$

であるから

$(1\wedge i)^* : [\Sigma^j \wedge X, Y]^G \longrightarrow [\Sigma^j \wedge X^G, Y]^G$

を考えればよい。命題1.1を用いて，$1\wedge i$ に対して[8],4章定理2.15と同様な議論を行なえば，この命題を得る。 終

X, Yを G-space とする。G-module ∇に対し Σ^∇-suspension

$$\Sigma^\nabla_* : [X, Y]^G \longrightarrow [\Sigma^\nabla X, \Sigma^\nabla Y]^G$$

を考える。これは adjoint isomorphism

$$[\Sigma^\nabla X, \Sigma^\nabla Y]^G \cong [X, \Omega^\nabla \Sigma^\nabla Y]^G$$

を通して次の写像に移して考えることができる。

$$i_* : [X, Y]^G \longrightarrow [X, \Omega^\nabla \Sigma^\nabla Y]^G$$

ここで $\Omega^\nabla \Sigma^\nabla Y = F(\Sigma^\nabla, \Sigma^\nabla Y)$，$i : Y \hookrightarrow \Omega^\nabla \Sigma^\nabla Y$ は $i(y)(t) = (t, y)$ で定義される inclusion である。Σ^∇は compact G-CW complex と考えられるので，i_*に上の命題を適用して次を得る。

<u>定理1.8</u> Xは G-CW complex，Yは G-space with non-degenerate base point とする。$^\forall H \in \mathcal{S}(G)$に対し Y^Hは n_H-connected, $n_H \geq 0$ ならば，

$$\Sigma^\nabla_* : [X, Y]^G \longrightarrow [\Sigma^\nabla X, \Sigma^\nabla Y]^G$$

は，$\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対して，$\dim_G X^H \leq \min_{H' \in \mathcal{S}(H)} N^H_{H'}$ のとき同型，$\dim_G X^H \leq \min_{H' \in \mathcal{S}(H)} N^H_{H'}+1$ のとき全射である。ここで

$$N^H_{H'} = \begin{cases} 2n_H & \text{if } H'=H \text{ かつ } V^H \neq \{0\} \\ n_{H'}-1+\dim V^{H'} - \dim_H (V^{H'}-V^H) & \text{if } V^{H'} \neq V^H \\ \infty & \text{others} \end{cases}$$

注意．$\dim V^{H'}$ は，一般には $\dim_H V^{H'}$ とは異なるが，G が有限群（$\dim G = 0$）のときは一致する。（$\dim_G X^H$ は $G\cdot X^H$ の G-CW complex としての次元を表わす。）従って，G が有限群のとき，上の $N^H_{H'}$ で $V^{H'} \neq V^H$ の部分は $(n_{H'}-1)$ と書き直される。

[証明]　次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} \pi_j(Y^H) \arrow[r, "i^H_*"] \arrow[dr, "i_{H*}"'] & \pi_j((\Omega^V \Sigma^V Y)^H) \arrow[d, "r_{H*}"] \\ & \pi_j(\Omega^{V^H}(\Sigma^V Y)^H) \end{tikzcd}$$

ここで，i，i_H は inclusion，r_H は restriction である。i_H は suspension theorem により $(2n_H+1)$-equivalence である。特に $V^H=\{0\}$ のときは $\Omega^{V^H}\Sigma^{V^H}Y^H = Y^H$ となるので i_H は ∞-equivalence である。又，r_H は補題1.7により $(\min_{H' \in \mathcal{S}(H)} M^H_{H'}+1)$-equivalence である。ここで

$$M^H_{H'} = \begin{cases} n_{H'} + \dim V^{H'} - \dim_H (V^{H'}-V^H) & \text{if } V^{H'} \neq V^H \\ \infty & \text{if } V^{H'} = V^H \end{cases}$$

である。今 i^H_* が単射であるのは i_{H*} が単射のとき，又全射

であるのは i_{H*} が全射かつ γ_{H*} が同型のときである。

これらを組み合わせて i^H が $(\min_{H'\in\mathscr{S}(H)} N^H_{H'}+1)$-equivalence であることがわかる。これに命題1.3を適用すればよい。 終

注意 $^\forall H\in\mathscr{S}(G)$ に対して，$V^H\neq\{0\}$ となる（既約）G-module が存在する。従って G を有限群とするとき，ω はこの様なものをすべて含んでいるので $H'\subsetneqq H$ なる部分群 H, H' に対して $\dim V^{H'}\geqq\dim V^H+1$ となる。$\pi^G_V(X)=[\Sigma^V, X]^G$ とするとき，上の定理より，$\Sigma^\omega_*:\pi^G_{n\omega}(\Sigma^{n\omega}X)\to\pi^G_{(n+1)\omega}(\Sigma^{(n+1)\omega}X)$ は $n\geqq 2$ のとき同型，$n\geqq 1$ のとき全射である。

§2 Equivariant S-duality

G は有限群とする。α-th stable G-homotopy group を

$$\{X, Y\}^G_\alpha=\varinjlim_n\,[\Sigma^{n\omega+V}X, \Sigma^{n\omega+W}Y]^G$$

と表わす。ここで $\alpha=V-W\in RO(G)$。$\mathcal{C}\mathcal{F}^G_*$ を $^\forall H\in\mathscr{S}(G)$ に対して X^H が path-connected である様な ~~(finite)~~ G-complex X の category とする。$X, X'\in\mathcal{C}\mathcal{F}^G_*$ に対し G-map $u: X\wedge X'\to\Sigma^V$ を，$^\forall H\in\mathscr{S}(G)$ に対し $u^H: X^H\wedge X'^H\to\Sigma^{V^H}$ が duality map であるとき([12])，V-duality G-map と呼ぶ。又このとき X' を X の V-dual と呼ぶ。$u: X\wedge X'\to\Sigma^V$ に対し，$\bar{u}: X'\wedge X\overset{T}{\simeq}X\wedge X'\xrightarrow{u}\Sigma^V$，

$$u_{V_1,V_2}:\Sigma^{V_1}X\wedge\Sigma^{V_2}X'\overset{1\wedge T\wedge 1}{\simeq}\Sigma^{V_1}\wedge\Sigma^{V_2}\wedge X\wedge X'\xrightarrow{1\wedge u}\Sigma^{V_1+V_2}\Sigma^V=\Sigma^{V_1+V_2+V}$$

も又 duality G-map である。

Yを finite G-complex, $u: X\wedge X' \to \Sigma^{\bar V}$ を duality G-map とする。準同型 $\Gamma_u^\alpha : \{Y, X\}_\alpha^G \to \{Y\wedge X', \Sigma^{\bar V}\}_\alpha^G$, $\bar\Gamma_u^\alpha : \{Y, X'\}_\alpha^G \to \{X\wedge Y, \Sigma^{\bar V}\}_\alpha^G$ を次の様に定義する。G-map $f: \Sigma^{n\omega+\bar V}Y \to \Sigma^{n\omega+\bar W}X$ に対し、$\Gamma_u^\alpha\{f\} \in \{Y\wedge X', \Sigma^{\bar V}\}_\alpha^G$ は、次の写像の合成で代表される。

$$\Sigma^{n\omega+\bar V}Y\wedge X' \xrightarrow{f\wedge 1} \Sigma^{n\omega+\bar W}X\wedge X' \xrightarrow{1\wedge u} \Sigma^{n\omega+\bar W}\Sigma^{\bar V}$$,即ち $\Gamma_u^\alpha\{f\} = \{u_{n\omega+\bar W,0}\circ f\}$

又 G-map $f': \Sigma^{n\omega+\bar V}Y \to \Sigma^{n\omega+\bar W}X'$ に対し $\bar\Gamma_u^\alpha\{f'\} \in \{X\wedge Y, \Sigma^{\bar V}\}_\alpha^G$ は次の写像の合成で代表される。

$$\Sigma^{n\omega+\bar V}X\wedge Y \overset{T\wedge 1}{\cong} X\wedge \Sigma^{n\omega+\bar V}Y \xrightarrow{1\wedge f'} X\wedge\Sigma^{n\omega+\bar W}X' \xrightarrow{u_{0,n\omega+\bar W}} \Sigma^{n\omega+\bar W}\Sigma^{\bar V}$$

即ち、$\bar\Gamma_u^\alpha\{f'\} = \{u_{0,n\omega+\bar W}\circ(1\wedge f')\circ(T\wedge 1)\}$

<u>定理2.1</u> $u: X\wedge X' \to \Sigma^{\bar V}$ を duality G-map とする。このとき finite G-complex Y, $\alpha\in RO(G)$ に対して $\Gamma_u^\alpha, \bar\Gamma_u^\alpha$ は同型である。

$$\Gamma_u^\alpha : \{Y, X\}_\alpha^G \cong \{Y\wedge X', \Sigma^{\bar V}\}_\alpha^G \quad , \quad \bar\Gamma_u^\alpha : \{Y, X'\}_\alpha^G \cong \{X\wedge Y, \Sigma^{\bar V}\}_\alpha^G$$

[証明] Γ_u^α のみを考える。$\bar\Gamma_u^\alpha$ も同様にすればよい。

次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
{[\Sigma^{n\omega+\bar V}Y, \Sigma^{n\omega+\bar W}X]^G} \arrow[rr, "u_{n*}"] \arrow[dr, "\lambda_{n*}"'] & & {[\Sigma^{n\omega+\bar V}Y\wedge X', \Sigma^{n\omega+\bar W}\Sigma^{\bar V}]^G} \arrow[dl, "\mu_{n*}"] \\
& {[\Sigma^{n\omega+\bar V}Y, F(X', \Sigma^{n\omega+\bar W}\Sigma^{\bar V})]^G} &
\end{tikzcd}$$

ここで、$u_{n*}[f] = [u_{n\omega+\bar W,0}\circ f\wedge 1]$, $\lambda_n(x)(x') = u_{n\omega+\bar W,0}(x, x')$ $x\in\Sigma^{n\omega+\bar W}X$, $x'\in X'$, μ_{n*} は adjoint isomorphism である。又、$\varinjlim_n u_{n*} = \Gamma_u^\alpha$ であるから、十分大なる n に対して λ_{n*} が同型であれば Γ_u^α が同型になる。従って λ_n を考えればよい。

次の可換図式を考える。　$(H \in \mathcal{A}(G))$

$$\begin{tikzcd} \pi_j((\Sigma^{n\omega+\overline{\omega}}X)^H) \arrow[rr, "\lambda^H_{n*}"] \arrow[dr, "\psi_{H,n*}"'] & & \pi_j(F(X', \Sigma^{n\omega+\overline{\omega}}\Sigma^{\nabla})^H) \arrow[dl, "r_{H*}"] \\ & \pi_j(F(X'^H, (\Sigma^{n\omega+\overline{\omega}}\Sigma^{\nabla})^H)) & \end{tikzcd}$$

ここで r_H は restriction，$\psi_{H,n}(x)(x') = u^H_{n\omega+\overline{\omega},0}(x, x')$ である。[12] により $\psi_{H,n*}$ は $(\Sigma^{n\omega+\overline{\omega}}X)^H, F(X'^H, (\Sigma^{n\omega+\overline{\omega}}\Sigma^{\nabla})^H)$ が 1-connected なら，$j < 2(k - \dim X'^H)$，$k = \dim(n\omega+\overline{\omega}+\nabla)^H$ のとき同型であり r_{H*} は補題 1.7 より $j \leqq \min_{H' \in \mathcal{A}(H)} N^H_{H'}$，のとき同型である。

ここで

$$N^H_{H'} = \begin{cases} n\dim \omega^{H'} + \dim(\overline{\omega}+\nabla)^{H'} - 1 - \dim(X'^{H'} - X'^H) & \text{if } X'^{H'} \neq X'^H \\ \infty & \text{if } X'^{H'} = X'^H \end{cases}$$

従って λ^H_{n*} は $j \leqq (n-1) + \dim(n\omega+\overline{\omega}+\nabla)^H - 2\dim X'$ のとき同型，従って命題 1.3 より λ_{n*} は，$n \geqq 2\dim X' + \dim Y + \dim \nabla + 2$ のとき同型，即ちこのとき u_{n*} も同型であるから P^{α}_{u} は同型である。

終

<u>命題 2.2</u>　X, X' を $\Sigma^{\nabla+1}(\Sigma^{\nabla+\mathbb{R}})$ の G-subcomplex で $X, X' \in \mathcal{C}\mathcal{F}^G_*$，$X \wedge X' = \phi$，かつ inclusion $X' \hookrightarrow \Sigma^{\nabla+1} - X$ が G-homotopy equivalence であるものとする。このとき ∇-duality G-map $u: X \wedge X' \to \Sigma^{\nabla}$ が存在する。

u の構成は [11] と同様にすればよい。このとき再び [11] により u^H が duality map となり命題を得る。

<u>定理 2.3</u>　任意の finite G-complex X には S-dual が存在する。

[証明] もし, $X \notin \mathcal{C}\mathfrak{F}^G_*$ なら, $\Sigma X \in \mathcal{C}\mathfrak{F}^G_*$ をとることにより $X \in \mathcal{C}\mathfrak{F}^G_*$ と仮定してよい。$X \simeq_G K$ なる *finite simplicial G-complex* が存在するのでこれにおきかえて考える。適当な Σ^{V+1} をとり K を Σ^{V+1} に(単体的に) *G-subcomplex* としてうめこみ, その補複体 X' が $X' \in \mathcal{C}\mathfrak{F}^G_*$ となる様にできる。従って上の命題より結果を得る。 終

<u>定理 2.4</u> X を *compact smooth G-manifold* とする。ν をある(同変)うめこみ $(X, \partial X) \subset (B(V+\mathbb{R}), S(V+\mathbb{R}))$ の *normal bundle* とすると, *Thom space* $T(\nu)$ は $X/\partial X$ の *S-dual* である。ここで $B(V+\mathbb{R})$, $S(V+\mathbb{R})$ は $V+\mathbb{R}$ の *unit ball* と *unit sphere* である。

これは Atiyah [4] proposition (3.2) の *equivariant version* であり, 証明も同様にすればよい。又上の $V+\mathbb{R}$ は, $V^G \neq \{0\}$ なら V でおきかえてもよい。

例. $G/H^+ = G/H \cup \{pt\}$ は G/H^+ の S-dual である。(G: finite に注意)

以下の結果 2.5 ～ 2.8 は Spanier [12] P365 以下に対応し, 証明も同様にできる。(又は [12] の結果を使えばよい。)

<u>定理 2.5</u> $u: X \wedge X' \to \Sigma^V$, $v: Y \wedge Y' \to \Sigma^V$ を *duality* とすると同型 $D^\alpha_V(u, v) = (\Gamma^\alpha_u)^{-1} \circ \Gamma^\alpha_v : \{X, Y\}^G_\alpha \cong \{Y', X'\}^G_\alpha$ が存在して, $D^\alpha_V(\bar{u}, \bar{v})$ が逆写像であり, 又十分大なる n と $f: \Sigma^{nW+\bar{U}} X \to \Sigma^{nW+\bar{W}} Y$, $f': \Sigma^{nW+\bar{U}} Y' \to \Sigma^{nW+\bar{W}} X'$ に対し, $D^\alpha_V(u, v)\{f\} = \{f'\}$ となるのは, 次の図式が *G-homotopy* 可換であるときに限る。

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{n\omega+\nabla}X\wedge Y' & & = & & X\wedge\Sigma^{n\omega+\nabla}Y' \\ \downarrow f\wedge 1 & & & & \downarrow 1\wedge f' \\ \Sigma^{n\omega+\overline{\nabla}}Y\wedge Y' & \xrightarrow{v_{n\omega+\overline{\nabla},0}} & \Sigma^{n\omega+\overline{\nabla}}\Sigma^{\nabla} & \xleftarrow{u_{0,n\omega+\overline{\nabla}}} & X\wedge\Sigma^{n\omega+\overline{\nabla}}X' \end{array}$$

。

suspension 同型 $\sigma^{\nabla}: \{X, Y\}^G_{\alpha} \to \{\Sigma^{\nabla}X, \Sigma^{\nabla}Y\}^G_{\alpha}$ を $\{f\}\in\{X,Y\}^G_{\alpha}$

$f: \Sigma^{n\omega+\nabla}X \to \Sigma^{n\omega+\overline{\nabla}}Y$ に対し，写像の合成

$$\Sigma^{n\omega+\nabla}\Sigma^{\nabla}X \overset{T\wedge 1}{\approx} \Sigma^{\nabla}\Sigma^{n\omega+\nabla}X \xrightarrow{1\wedge f} \Sigma^{\nabla}\Sigma^{n\omega+\overline{\nabla}}Y \overset{T\wedge 1}{\approx} \Sigma^{n\omega+\overline{\nabla}}\Sigma^{\nabla}Y$$

で定義する。　このとき，次が成立する。 //

<u>命題 2.6</u>　$u: X\wedge X' \to \Sigma^{\nabla}$, $v: Y\wedge Y' \to \Sigma^{\nabla}$ を duality とする。

このとき次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \{X, Y\}^G_0 & \xrightarrow{D^0_{\nabla}(u,v)} & \{Y', X'\}^G_0 \\ \downarrow\sigma^{\nabla} & \nearrow_{D^0_{\nabla+\nabla}(u_{\nabla,0}, v_{\nabla,0})} & \\ \{\Sigma^{\nabla}X, \Sigma^{\nabla}Y\}^G_0 & & \end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{ccc} \{X, Y\}^G_0 & \xrightarrow{D^0_{\nabla}(u,v)} & \{Y', X'\}^G_0 \\ & \searrow^{D^0_{\nabla+\nabla}(u_{0,\nabla}, v_{0,\nabla})} & \downarrow\sigma^{\nabla} \\ & & \{\Sigma^{\nabla}Y', \Sigma^{\nabla}X'\}^G_0 \end{array}$$

<u>命題 2.7</u>　$u: X\wedge X' \to \Sigma^{\nabla}$, $v: Y\wedge Y' \to \Sigma^{\nabla}$, $w: Z\wedge Z' \to \Sigma^{\nabla}$ を duality とする。$\alpha\in\{X, Y\}^G_0$, $\beta\in\{Y, Z\}^G_0$ とするとき，$\beta\alpha\in\{X, Z\}^G_0$ で

$D^0_{\nabla}(u,w)\beta\alpha = (D^0_{\nabla}(u,v)\alpha)\circ(D^0_{\nabla}(v,w)\beta)$ である。 //

$u: X\wedge X' \to \Sigma^{\nabla}$, $v: Y\wedge Y' \to \Sigma^{\nabla}$ を duality とする。

$f: X \to Y$, $f': Y' \to X'$ に対し，次の図式は G-homotopy 可換

$$\begin{array}{ccc} X\wedge Y' & \xrightarrow{1\wedge f'} & X\wedge X' \\ f\wedge 1\downarrow & & \downarrow u \\ Y\wedge Y' & \xrightarrow{v} & \Sigma^{\nabla} \end{array}$$

とする。このとき $w: C_f\wedge C_{f'} \to \Sigma\Sigma^{\nabla} = \Sigma^{1+\nabla}$ を [12] p374 と同様に定義する。(但し parameter の位置は逆)　C_f は f の mapping cone である。

<u>定理 2.8</u>　上に定義した w は $(\nabla+\mathbb{R})$-duality G-map であり，

次の$(\bar V+\mathbb{R})$-duality の G-homotopy 可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X\wedge\Sigma Y' \arrow[d, "1\wedge\Sigma f'"'] \arrow[dr, "f\wedge 1"] & Y\wedge C_{f'} \arrow[d, "1\wedge p'"'] \arrow[dr, "i\wedge 1"] & C_f\wedge X' \arrow[d, "1\wedge i'"'] \arrow[dr, "p\wedge 1"] & \Sigma X\wedge Y' \arrow[d, "1\wedge f'"'] \arrow[dr, "\Sigma f\wedge 1"] & \\
X\wedge\Sigma X' \arrow[d, "u_{0,1}"] & Y\wedge\Sigma Y' \arrow[d, "v_{0,1}"] & C_f\wedge C_{f'} \arrow[d, "w"] & \Sigma X\wedge X' \arrow[d, "u_{1,0}"] & \Sigma Y\wedge Y' \arrow[d, "v_{1,0}"] \\
\Sigma^{1+\bar V} \arrow[r, equal] & \Sigma^{1+\bar V} \arrow[r, equal] & \Sigma^{1+\bar V} \arrow[r, equal] & \Sigma^{1+\bar V} \arrow[r, equal] & \Sigma^{1+\bar V}
\end{tikzcd}$$
//

duality G-map $u: X\wedge X'\to\Sigma^{\bar V}$, finite G-complex Y, G-complex Z に対し，準同型 $\Gamma_u^\alpha(Y,Z): \{Y, X\wedge Z\}_\alpha^G \to \{Y\wedge X', \Sigma^{\bar V}Z\}_\alpha^G$ を，次の写像の合成で定義する。

$$\{Y, X\wedge Z\}_\alpha^G \xrightarrow{(1\wedge X')_*} \{Y\wedge X', X\wedge Z\wedge X'\}_\alpha^G \xrightarrow{(1\wedge T)_*} \{Y\wedge X', X\wedge X'\wedge Z\}_\alpha^G \xrightarrow{(u\wedge 1)_*} \{Y\wedge X', \Sigma^{\bar V}Z\}_\alpha^G$$

<u>定理 2.9</u>　上の $\Gamma_u^\alpha(Y,Z)$ は，同型である。 //

Z が finite G-complex の場合は [12] と同様にできる。Z が G-complex の場合，$\{Y, X\wedge(\ )\}_\alpha^G$, $\{Y\wedge X', \Sigma^{\bar V}(\ )\}_\alpha^G$ は共に加法性公理をみたす G-complex 上の reduced G-homology theory になり，比較定理により，$Z=G/H^+$, $H\in\Phi(G)$ の場合に $\Gamma_u^\alpha(Y,Z)$ が同型であるから，Z が G-complex のときにも同型である。

$\mathbb{E}$ を G-spectrum とする。G-complex X に対し

$$[X,\mathbb{E}]_\alpha^G = \varinjlim_n [\Sigma^{nW+\bar V}X, \Sigma^{\bar W}E_n]^G = \varinjlim_m \varinjlim_n [\Sigma^{mW}\Sigma^{nW+\bar V}X, \Sigma^{mW}\Sigma^{\bar W}E_n]^G$$

であるから，　$[X,\mathbb{E}]_\alpha^G = \varinjlim_n \{\Sigma^{nW+\bar V}X, \Sigma^{\bar W}E_n\}_0^G$　である。

<u>定理 2.10</u>　$u: X\wedge X'\to\Sigma^{\bar V}$ を duality，$\mathbb{E}$ を G-spectrum，Y を finite G-complex とする。このとき同型

$$\Gamma_u^\alpha(Y,\mathbb{E}): [Y, X\wedge\mathbb{E}]_\alpha^G \cong [Y\wedge X', \Sigma^{\bar W}\mathbb{E}]_\alpha^G \overset{(\sigma_*^{\bar W})^{-1}}{\cong} [Y\wedge X', \mathbb{E}]_{\alpha-\bar W}^G$$

が成り立つ。ここで $\sigma_*^{\bar W}$ は G-homology の suspension 同型である。

特に $\tilde{h}_G^\alpha(X;\mathbb{E}) = [X, \mathbb{E}]_{-\alpha}^G$, $\tilde{h}_\alpha^G(X;\mathbb{E}) = [\Sigma^0, \mathbb{E}\wedge X]_\alpha^G$ とおくと、$\tilde{h}_G^*$は reduced G-cohomology theoryに、$\tilde{h}_*^G$ は reduced G-homology theory になる。従って定理2.10より次を得る。

<u>系2.11</u> $\Gamma(\Sigma^0,\mathbb{E})$; $\tilde{h}_\alpha^G(X;\mathbb{E}) \cong \tilde{h}_G^{V-\alpha}(X;\mathbb{E})$

$\tilde{h}_*^G$を finite G-complex の category $\mathcal{C}\mathcal{F}_0^G$ 上の G-homology theory とする。finite G-complex X に対し S-dual X' が存在するから、u ; $\Sigma^{V_1}X\wedge\Sigma^{V_2}X' \to \Sigma^V$ をこの duality G-map とする。$\alpha\in RO(G)$に対し、$\tilde{h}_G^\alpha(X) = \tilde{h}_{V-V_1-V_2-\alpha}^G(X')$ と定義し、[1] p250と同様の考察を行なえば、$\tilde{h}_G^*$ が $\mathcal{C}\mathcal{F}_0^G$ 上の reduced G-cohomology theory になることが分かる。又[2]により $\tilde{h}_G^*$ は Ω-G-spectrum で表現される。従って次を得る。(これは、G.W. Whitehead[14] の方法である。)

<u>定理2.12</u> $\mathcal{C}\mathcal{F}^G$ 上の G-homology theory は Ω-G-spectrum で表現される。又 G-complex の category $\mathcal{C}\mathcal{W}^G$ 上の G-homology theory (加法性公理をみたす) はΩ-G-spectrumで表現される。

$G = \mathbb{Z}_2$ の場合, MR-theory を考える。[7] Cf.[3]. smooth $\mathbb{Z}_2$-manifold M の normal bundle ν が[7] の意味の 'real' vector bundleになるとき、Mを weakly 'real-complex' manifold と呼ぶことにする。このとき Thom class $t(\nu)\in MR^{n,n}(T(\nu))$ $(n = \dim\nu)$ と Thom 同型 $\Phi(\nu)^*$; $MR^{p,q}(M) \cong \widetilde{MR}^{p+n,q+n}(T(\nu))$, $\Phi(\nu)_*$; $\widetilde{MR}_{p+n,q+n}(T(\nu)) \cong MR_{p,q}(M)$, が存在する。[7] 又 $\Phi M = M^{\mathbb{Z}_2}$ は uniform dimensionをもつ。 定理2.4 とこれを組み合わせ

て次を得る。

定理 2.13 Mを $\dim M = m+n$, $\dim \Phi M = n$ なる compact weakly 'real complex' manifold とする。このとき (Poincare) duality 同型

$$D_M : MR_{p,q}(M) \cong MR^{m-p,n-q}(M, \partial M),$$

$$D'_M : MR_{p,q}(M, \partial M) \cong MR^{m-p,n-q}(M) \quad , \quad p,q,m,n \in \mathbb{Z}$$

が存在する。

参考文献

[1] 荒木捷朗. 一般コホモロジー. 紀伊国屋書店 1975

[2] S. Araki, M. Murayama G-homotopy types of G-complex and representations of G-cohomology theories. to appear Pull. R.I.M.S Kyoto Univ.

[3] S. Araki, M. Murayama τ-cohomology theories to appear Japanese J. of Math.

[4] M.F Atiyah Thom complexes Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961) 291-310

[5] A.L. Blakers, W.S. Massey The homotopy groups of a triad I, II. Ann. of Math 53 (1951) 161-205, 55 (1952) 192-201

[6] G. Bredon. Equivariant cohomology theories Lect. Note in Math 34. 1967

[7] M. Fujii Cobordism theory with reality Math J. Okayama Univ. 18 (1976) 171-188

[8]. 小松. 中岡. 菅原. 位相幾何学 I. 岩波書店 1967

[9] T. Matumoto. On G-C_W complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I. 18 (1971) 363-374.

[10] T. Matumoto Equivariant stratification of a differentiable transformation

group (to appear)

[11] E. H Spanier Infinite symmetric product, function spaces, and duality Ann. of Math. 69 (1959) 142-198

[12] E. H Spanier Function spaces and duality. Ann. of Math 70 (1959) 338-378

[13] E. H. Spanier Algebraic topology Mc Graw-Hill 1966.

[14] G. W Whitehead Generalized homology theories Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962) 227-283