

$C^*$ 接合積の双対性と CAR-代数上の  
ゲージ作用について

高井博司(都立大理)

§0. 序論

$W^*$ -カテゴリーに於いて接合積の双対性は Takesaki, Nakagami, Landstad etc の人達によって展開されているが、一方  $C^*$ -カテゴリーに対するそれは Fukaï, Landstad, Imai-Fukaï etc が考察している。ここでは Nakagami 流の方法を  $C^*$ 接合積に用いて特に簡約された接合積の双対性を論じ、その後で可換群の場合の結果を導く。更に具体的事例に移り、最近特に議論の対象になっている CAR-代数のゲージ作用による  $C^*$ 接合積の性質を述べ、最後にその上の状態についても触れる。

§1.  $C^*$ 接合積の双対性

$C^*$ -カテゴリー  $(\mathcal{A}, \varphi, \alpha)$  に対して、簡約された  $C^*$ 接合積を  $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$  で表わす。そのときこの代数は  $L^2(\mathcal{A}; \varphi)$  上に次の方法で忠実に表現される:

$$(X\xi)(g) = \int_{\mathcal{A}} \alpha_g^*[x(h)]\xi(hg) dh$$

$x \in L^2_{\alpha}(\mathcal{A}; \mathcal{A})$ ,  $\xi \in L^2(\mathcal{A}; \mathcal{A})$ .  $W^*$ -カテゴリーについての Nakagami の方法より  $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$  から  $C^*(\mathcal{A}; \alpha) \hat{\otimes}_{*} C^*(\mathcal{A})$  への同型写像  $\beta$  が存

在して

$$(\beta(x)\xi)(g, h) = \int_G \alpha_g^{-1}[x(g)] \xi(g^{-1}g, gh) dg$$

$x \in L'_\alpha(G; \mathcal{A})$ ,  $\xi \in L^2(G \times G; \mathcal{B})$  が成立する。  $C_0(G)$  で  $G$  上の複素数値連続関数で無限遠点で零になるもの全体とし、  $L$  を  $C_0(G)$  の  $L^2(G)$  上への自然な表現とする。  $f \in C_0(G)$ ,  $x \in C^*(\mathcal{A}; \alpha)$  に対して  $f *_\beta x = (1 \otimes L_f)\beta(x)$  とおき、その全体で生成された  $C^*$ -代数を  $C^*_\beta[C^*(\mathcal{A}; \alpha); \beta]$  とおく。我々は以下この代数(双対接合積と云うことにする)が  $\pi \hat{\otimes} C(L^2(G))$  に同型になることを示す。ただし  $C(L^2(G))$  は  $L^2(G)$  上の完全連続作用素全体の成す  $C^*$ -代数である。

$L \otimes L$  は  $\pi \hat{\otimes} C_0(G)$  上の忠実表現だから  $Ind(L \otimes L)$  は  $C^*(\pi \hat{\otimes} C_0(G); \alpha \otimes \tau)$  上の忠実表現となる。ただし  $\tau$  は  $C_0(G)$  の移動作用である。  $(W\xi)(g, h) = \xi(g, gh)$ ,  $\xi \in L^2(G \times G; \mathcal{B})$  なるユニタリ作用素  $W$  を用いると  $C^*_\beta[C^*(\mathcal{A}; \alpha); \beta] = Ad(W) \cdot Ind(L \otimes L)[C^*(\pi \hat{\otimes} C_0(G); \alpha \otimes \tau)]$  となるので

$$\text{補助定理 1. } C^*_\beta[C^*(\mathcal{A}; \alpha); \beta] \simeq C^*(\pi \hat{\otimes} C_0(G); \alpha \otimes \tau)$$

を得る。

更に  $\tilde{\pi}(x)(g) = \alpha_g^{-1}[x(g)]$  ( $x \in \pi \hat{\otimes} C_0(G)$ ),  $\tilde{\xi}(x)(g) = \tilde{\pi}[x(g)]$   $x \in L'_{\alpha \otimes \tau}(G; \pi \hat{\otimes} C_0(G))$  とおくと容易に  $\tilde{\xi}[C^*(\pi \hat{\otimes} C_0(G); \alpha \otimes \tau)] = C^*(\pi \hat{\otimes} C_0(G); L \otimes \tau)$  となるから

$$\text{補助定理 2. } C^*(\pi \hat{\otimes} C_0(G); \alpha \otimes \tau) \simeq C^*(\pi \hat{\otimes} C_0(G); L \otimes \tau)$$

を得る。

今  $(A, G, \alpha)$ ,  $(B, H, \beta)$  を  $C^*$ -力学系とし  $\pi, \rho$  をそれぞれ  $A, B$  の忠実表現とすると  $\text{Ind}(\pi \otimes \rho)$ ,  $(\text{Ind}\pi) \otimes (\text{Ind}\rho)$  はそれぞれ  $C_r^*(A \hat{\otimes}_* B; \alpha \otimes \beta)$ ,  $C_r^*(A; \alpha) \hat{\otimes}_* C_r^*(B; \beta)$  の忠実表現となり  $\text{Ind}(\pi \otimes \rho) [C_r^*(A \hat{\otimes}_* B; \alpha \otimes \beta)] = (\text{Ind}\pi) \otimes (\text{Ind}\rho) [C_r^*(A; \alpha) \hat{\otimes}_* C_r^*(B; \beta)]$  が云えるので、特別な場合として

補助定理 3.  $C_r^*(A \hat{\otimes} C_0(G); \lambda \otimes \tau) \simeq A \hat{\otimes}_* C_r^*(C_0(G); \tau)$

を得る。

$d(f) = f(e)$  ( $f \in C_0(G)$ ) とおくと  $d$  は  $C_0(G)$  上の指標になり  $\sum_{g \in G} \tau_g \circ d$  は  $C_0(G)$  の忠実表現となるので  $\text{Ind} d$  は  $C_r^*(C_0(G); \tau)$  の忠実表現になる。そして  $(\text{Ind} d) [C_r^*(C_0(G); \tau)] = C(L^2(G))$  が成り立つので

補助定理 4.  $C_r^*(C_0(G); \tau) \simeq C(L^2(G))$

を得る。

上で得られた補助定理 1~4 を組み合わせると求める結果を得る。

定理 5. [双対定理]  $C^*$ -力学系  $(A, G, \alpha)$  に対して  $C_r^*(A; \alpha)$  から  $C_r^*(A; \alpha) \hat{\otimes}_* C_r^*(G)$  への同型写像  $\beta$  が存在して、 $C_r^*(A; \alpha)$  の  $\beta$  による双対  $C^*$ -積  $C_r^*[C_r^*(A; \alpha); \beta]$  は  $A \hat{\otimes} C(L^2(G))$  に同型になる。更に  $\beta$  の双対写像  $\hat{\beta}$  は  $\alpha \otimes \text{Ad}(\lambda)$  に移される。

今  $G$  を可換群としたとき

$$(F\xi)(g, h) = \int_{\hat{G}} \overline{\langle \lambda, P \rangle} \xi(g, P) dP$$

$\xi \in L^2(G \times \hat{G}; \mathfrak{A})$ ,  $g, h \in G$  とおく。ただし  $\hat{G}$  は  $G$  の双対群とする。そのとき  $F$  は  $L^2(G \times \hat{G}; \mathfrak{A})$  から  $L^2(G \times G; \mathfrak{A})$  へのユニタリ作用素になり  $C_*^*[C^*(\mathcal{A}; \alpha); \beta] = \text{Ad}(F) \circ (\text{Ind } L)[C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha})]$  となる。ただし  $\hat{\alpha}$  は  $\alpha$  の双対作用である。更に  $\hat{\beta} = \text{Ad}(F) \circ (\text{Ind } L) \circ \hat{\alpha} \circ (\text{Ind } L)^{-1} \circ \text{Ad}(F^*)$  が成り立つ。 $G$  が可換より  $C_*^*(\mathcal{A}; \alpha)$  は  $C^*$ -接合積  $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$  に一致するので

系 6.  $G$  が可換のとき、 $C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha}) \simeq \mathcal{A} \hat{\otimes} C(L^2(G))$  を得る。更に  $\hat{\alpha}$  は  $\alpha \otimes \text{Ad}(\lambda)$  と同値になる。

## §2. コンパクト接合積

ここでは  $G$  をコンパクト可換群とする。 $\alpha$  の代数的不変量  $\Gamma(\alpha)$  を  $\mathcal{A}$  の  $\alpha$ -不変な遺伝的な  $C^*$ 部分代数  $\mathcal{B} \neq (0)$  に  $\alpha$  を制限した作用  $\alpha^{\mathcal{B}}$  のスペクトル  $\text{Sp}(\alpha^{\mathcal{B}})$  の共通部分  $\bigcap_{\mathcal{B}} \text{Sp}(\alpha^{\mathcal{B}})$  で定義すると  $\hat{G}$  の部分群になる。今  $\mathcal{A}$  を素な  $C^*$ 代数とすると

命題 1.  $\mathcal{A}$  の  $\alpha$  による不動点全体  $\mathcal{A}^{\alpha}$  が素になる為の必要十分条件は  $\Gamma(\alpha) = \text{Sp}(\alpha)$  となることである。

という Connes の結果の  $C^*$ 代数に於ける解釈を得る。 $G$  は離散群なのでフーリエ展開を使うと  $C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha})^{\hat{\alpha}}$  は  $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$  に同型になるので、§1 の系 6 を使うと

命題 2.  $C^*(\mathcal{A}; \alpha) \simeq (\mathcal{A} \hat{\otimes} C(L^2(G)))^{\alpha \otimes \text{Ad}(\lambda)}$

を得る。  $\alpha$  が素であるとき  $\alpha \otimes C(L^2(G))$  も素であるので、 $\Gamma(\alpha)$   
 $= \Gamma(\alpha \otimes Ad(\lambda))$ ,  $Sp(\alpha \otimes Ad(\lambda)) = \hat{G}$  を使うと命題 1 から

命題 3.  $G$  がコンパクト可換群で  $\alpha$  が素のとき、 $C^*(\alpha; \alpha)$  が  
 素になる為には  $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$  が成り立つことが必要十分である。

更に一般的に  $\alpha$ -不変な自明でないイデアルを持たない時  $\alpha$   
 $\alpha$  が  $G$ -素であるということにすると

命題 4.  $C^*(\alpha; \alpha)$  が素である為の必要十分条件は  $\alpha$  が  $G$ -素  
 で  $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$  であることである。

単純環に関しては、 $C^*(\alpha; \alpha)$  が単純ならば  $\alpha$  が  $G$ -単純で  
 $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$  が云えるが、逆は必ずしも真でないことを次節で示  
 す。

命題 5.  $G$  が離散可換群のとき、 $C^*(\alpha; \alpha)$  が素である為  
 には  $\alpha$  が  $G$ -単純で  $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$  であることである。

### §3. CAR-代数上のゲージ作用

可算無限次元ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の CAR-代数  $\mathcal{O}(\mathcal{H})$  は  $(2^{\mathbb{N}})$   
 型の UHF-代数になることは知られているが  $\alpha_t(a(f)) = e^{it} a(f)$   
 $(f \in \mathcal{H}, t \in \mathbb{T}')$  で  $\mathbb{T}'$  の  $\mathcal{O}(\mathcal{H})$  上の作用を定めると  $\mathcal{O}(\mathcal{H})$  の  $\alpha$  によ  
 る不動点代数  $\mathcal{O}(\mathcal{H})^\alpha$  は UHF-代数ではないが AF-代数となる。  
 更に  $\mathcal{O}(\mathcal{H})^\alpha$  は素になるので §2 命題 1 により  $\Gamma(\alpha) = Sp(\alpha)$  が云  
 える。  $\alpha$  の定義より  $1 \in Sp(\alpha)$  は容易に成り立つので  $\Gamma(\alpha) = \mathbb{Z}$   
 が云える。 よって §2. 命題 4 より  $C^*(\mathcal{O}(\mathcal{H}); \alpha)$  は素である。

一方  $\alpha_t(\alpha(\xi_n)) = \alpha(\xi_n) \quad (n \geq 1, t \in T')$ ,  $C^*(\alpha(\xi_n); \alpha) \simeq \alpha(\xi_n) \hat{\otimes} C_0(\mathbb{Z})$  となる。ただし  $(\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \text{CONS}(\xi)$  に対して  $\xi_n = [\xi_i; 1 \leq i \leq n]$  である。よって  $C^*(\alpha(\xi); \alpha)$  は AF-代数になる。更にそのダイアグラム  $\mathcal{D}[C^*(\alpha(\xi); \alpha)]$  を考えることにより単純にはならないことが分かる。更に  $\mathcal{D}[C^*(\alpha(\xi); \alpha)] \neq \mathcal{D}[\alpha(\xi)^\alpha]$  より  $C^*(\alpha(\xi); \alpha) \not\cong \alpha(\xi)^\alpha \hat{\otimes} C(L^2(T'))$  を得る。よって

命題 1.  $\alpha \otimes \text{Ad}(\lambda) \not\cong \alpha \otimes \text{id} \quad (on \quad \alpha \hat{\otimes} C(L^2(T')))$

を得る。

一方  $\theta$  を  $T'$  の無理数の角度とし  $\beta_n = \alpha_{n\theta} \quad (n \in \mathbb{Z})$  で  $\mathbb{Z}$  の  $\alpha(\xi)$  上への作用  $\beta$  を定めると  $C^*(\alpha(\xi); \beta)$  は単純になる。何故なら  $\beta_k \quad (k \neq 0)$  は  $\alpha(\xi)$  の外部自己同型写像より  $\Gamma(\beta)^\perp = \{0\}$  となるので  $\Gamma(\beta) = \mathbb{Z}$  を得る。よって §2 命題 5 より結論を得る。

#### §4. ゲージ不変擬自由状態

この節では §3 の記号をそのまま使うことにする。  $0 \leq A \leq 1$  なる  $\xi$  上の作用素  $A$  に対して

$$\omega_A [a(\xi_m)^* \cdots a(\xi_1)^* a(\xi_1) \cdots a(\xi_m)] = d_{m,m} \det [\langle A \xi_i | \xi_j \rangle]$$

$(\xi_i, \xi_j \in \xi)$  で定義すると、 $\omega_A \circ \alpha_t = \omega_A$  なる  $\alpha(\xi)$  上の状態になる。今  $L_\alpha(T'; \alpha(\xi))$  上の状態  $\bar{\omega}_A$  を

$$\bar{\omega}_A(x) = \int_{T'} \omega_A[x(t)] dt$$

で定義すると実際に  $C^*(\alpha(\xi); \alpha)$  上に拡張でき、それを同じ  $\bar{\omega}_A$

で表わすことにする。以後  $A$  は射影作用素に限る。そのとき

$\bar{\omega}_A$  は  $C^*(\mathcal{O}(g); \alpha)$  上の純粋状態になる。実際  $\pi_{\omega_A}, \pi_{\bar{\omega}_A}$  をと

れぞれ  $\omega_A, \bar{\omega}_A$  の GNS-表現とする。  $\omega_A \circ \alpha_t = \omega_A$  より  $\pi_{\omega_A}$  に随伴

したユニタリ表現  $U^A$  を考えると  $\pi_{\omega_A}[C^*(\mathcal{O}(g); \alpha)]' \simeq \pi_{\omega_A}[\mathcal{O}(g)]'$

$\cap U^A(T)'$  が云えるので  $\pi_{\omega_A}[\mathcal{O}(g)]' = \mathbb{C}I_{\mathcal{O}}$  と合わせると結論を得

る。  $\alpha_t|_{\mathcal{O}(g_n)} = Ad(U_t^{(n)})$  なるユニタリ表現  $U_t^{(n)}$  で  $U_t^{(n)} \in \mathcal{O}(g_n)$

( $t \in T'$ ) なるものが存在するので  $(e_{ab}^{(n)})_{a,b \in \{1,2\}^n}$  を  $\mathcal{O}(g_n)$  の単位

マトリックス系とすると  $f_{ab}^{(n,k)}(t) = e_{ab}^{(n)} U_t^{(n)*} e^{ikt} t$  と定義す

ると  $f_{ab}^{(n,k)} f_{cd}^{(n,l)} = \delta_{kl} \delta_{ac} f_{ad}^{(n,k)}$ ,  $f_{ab}^{(n,k)*} = f_{ba}^{(n,k)}$  が成り立つ。よ

って  $C^*(f_{ab}^{(n,k)}; a,b \in \{1,2\}^n)$  を  $\mathcal{B}_k^{(n)}$  とおくと  $C^*(\mathcal{O}(g_n); \alpha) = C^*(\omega) \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_k^{(n)}$  となる。

今  $f_{ab}^{(n,k)}$  に対して  $\bar{\omega}_A[f_{ab}^{(n,k)}] = \delta_{ab} \delta_{kn_a} \omega_A(e_{ab}^{(n)})$  となる。

ただし  $n_a$  は  $a(i)=1$  なる  $1 \leq i \leq n$  の個数を表わす。実際、

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_A[f_{ab}^{(n,k)}] &= \int_{T'} e^{ikt} \omega_A \left[ \prod_{l=1}^n e_{a_l b_l}^{(l)} (e^{-it} e_{11}^{(l)} + e_{22}^{(l)}) \right] dt \\ &= \int_{T'} e^{ikt} \prod_{l=1}^n \omega_A [e^{-it} \delta_{a_l 1} e_{a_l 1}^{(l)} + \delta_{a_l 2} e_{a_l 2}^{(l)}] dt \\ &= \int_{T'} \delta_{ab} e^{ikt} \prod_{l=1}^n [\delta_{a_l 1} \omega_A(e_{11}^{(l)}) + \delta_{a_l 2} \omega_A(e_{22}^{(l)})] dt \\ &= \int_{T'} e^{ikt} e^{-inat} \delta_{ab} \prod_{j=1}^{n_a} \omega_A(e_{11}^{(j)}) \prod_{j=n_a+1}^n \omega_A(e_{22}^{(j)}) dt \\ &= \delta_{ab} \delta_{kn_a} \omega_A(e_{ab}^{(n)}) \end{aligned}$$

となる。よって  $\bar{\omega}_A|_{\mathcal{B}_k^{(n)}} = 0$  ( $k \leq -1, k \geq n+1$ ) を得る。  $0 \leq k \leq n$

ならば  $\|\bar{\omega}_A|_{\mathcal{B}_k^{(n)}}\| \leq \|\omega_A|_{\mathcal{O}_k^{(n)}}\|$  を得る。ただし  $\Lambda_k = \{a \in \{1,2\}^n;$

$n_a = k\}$ ,  $\mathcal{O}_k^{(n)} = C^*(e_{ab}^{(n)}; a,b \in \Lambda_k)$  とする。  $\alpha_t(e_{ab}^{(n)}) = e^{it \sum_{i=1}^n a(i)}$

$-a(n)$   $e_{\alpha}^{(n)}$  より  $\sigma_k^{(n)} \subset \sigma(\frac{b}{\sigma_n})^\alpha$  を得る. 更に  $\sigma(\frac{b}{\sigma_n})^\alpha = \bigoplus_{k=0}^n \sigma_k^{(n)}$  が成り立つので  $\|\bar{\omega}_A|_{\bigoplus_{k=0}^n B_k^{(n)}}\| \leq \|\omega_A|_{\sigma(\frac{b}{\sigma_n})^\alpha}\|$  ( $n \geq 1$ ) が云える.  $C^*(\sigma(\frac{b}{\sigma_n}); \alpha) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} B_k^{(n)}$  より  $\|\bar{\omega}_A|_{C^*(\sigma(\frac{b}{\sigma_n}); \alpha)}\| \leq \|\omega_A|_{\sigma(\frac{b}{\sigma_n})^\alpha}\|$  ( $n \geq 1$ ) となる.  $C^*(\sigma(\frac{b}{\sigma}); \alpha) = \overline{[U_{n=1}^\infty C^*(\sigma(\frac{b}{\sigma_n}); \alpha)]}$ ,  $\sigma(\frac{b}{\sigma})^\alpha = \overline{[U \sigma(\frac{b}{\sigma_n})^\alpha]}$  であるから  $\|\bar{\omega}_A\| \leq \|\omega_A|_{\sigma(\frac{b}{\sigma})^\alpha}\|$  を得る.  $\|\omega_A\| \leq \|\bar{\omega}_A\|$  は容易であるので  $\|\bar{\omega}_A\| = \|\omega_A\|$  となる. よって次の結果を得る.

命題 1.  $\bar{\omega}_A \simeq \bar{\omega}_B$  なる為の必要十分条件は  $\omega_A \simeq \omega_B$  である. ただし  $A, B$  は上の射影作用素とする.

一般の正值作用素に対する問題は今後の興味ある課題の一つである.

### 参考文献

- [1] Y. Nakagami: Dual action of a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Vol. 12, (1977), 727-775.
- [2] H. Takai: On a duality for crossed products of  $C^*$ -algebras, Jour. Func. Anal. 19 (1975), 25-39.
- [3] H. Takai and S. Imai: On a duality for  $C^*$ -crossed products by a locally compact group, Jour. Math. Soc. Japan., No. 2 (1978)