数理解析研究所講究録
第 321 巻 1978 年 1-33

幾何学における大域的解析学*

東京工大 理　志賀 浩二

「幾何学における大域的解析学」と題するこのシンポジウムの公示で，私の講演が Main events と書かれたことに，実は大変困惑しております。この間の事情について，まず少しお話したい。七月に，森川先生の方からこのシンポジウムで何か話すようにとのお誘いがありましたが，私は特に話すこともないので，お断りしておきました。ところが九月になって，森川先生から御連絡頂いたところによると，私は話すことに決まっており，既に‘Main events’としてプログラムに印刷され，各大学に配布されているということで，驚いてしまいました。こうなっては致し方ないことでありますから，森川先生のところに，話す内容について御相談に伺いました。私はそのとき，私が現在もっている数学に対する一

* 本稿は，昭和52年11月11日 に解析研で行なった講演の要旨に，多少の補筆を加えてなったものである。

つの展望のようなものをお話すればよいのだろうと考えていたのですが，森川先生からは，回顧も話してほしいと頼まれてしまいました。これもはじめはお断りしていたのですが，森川先生の御希望が強く，結局，お断りするより，一切のことをお引きうけする方が遥かに困難が少ないと思えて参りました。

このような経過がありましたので，ここでは次のような話をする。最初に「幾何学における大域的解析学」という標題の下で，私が思いつく何人かの数学者について，その仕事に関し，私自身の回顧も加えながら，多少のコメントをする。私が話の軸として考えているのは，次のような数学者です。

Whitney ; de Rham, Hodge ; Atiyah, Singer ; Gelfand ; Nash.

この部分で森川先生から要請のあった回顧の方を済ませて，次に私が現在関心をもっていることを話したい。それは，今までは孤立した形をとっていた von Neumann algebra の，幾何学における重要性を指摘することです。

(I)

多様体の一般的な概念の導入に最も貢献したのは，Riemann, Poincaré, Whitney であると思います。この中で Riemann

は微分幾何の中で，Poincaréは微分位相幾何学または最近の力学系に至る多様体の系譜の中でしばしば登場し論じられているが，Whitneyについては余り触れられていないようです。

Whitneyの'Differentiable manifolds'は1936年に発表されましたが，もうこの論文に溯って読むような機会は殆どないと思います。私が東大の大学院に入ったのが1953年ですが，当時でもWhitneyを読んだという人は，余りいなかったように思います。その頃は，Pontrjaginの'Topological groups'を読む風潮が一段落して，Chevalleyの'Theory of Lie groups I'が，それに代って，よく読まれていました。その影響からか，私達の間では，多様体の一般論は，Lie群への序章としてあると考えられていたようでした。実際，振り返ってみますと，当時の私には，Lie群または均質空間と全く離れた場所に，多様体の理論があろうなどということは夢にも考えられないことでした。

私が必要あってWhitneyの一連の論文を読んでみたのは，かなり後になってからのことですが，Whitneyの多様体論における重要さは，Whitneyの仕事の発端が抽象数学の中にあったという点にあると思います。Whitneyには，1936年の論文の前に，近似定理を論じた1934年の論文がある。

この論文を著す直接の動機は，位相空間論における有名な Urysohn の定理にあった。Urysohn の定理が発表されたのは，ちょうどこの十年前の1924年のことですから，Whitney にとっては，私達が現在 Atiyah-Singer の定理や BΓ-空間を感ずる位の近さの所に，Urysohn の定理があったわけである。

Whitney は，Urysohn の定理と同値な Tietze の拡張定理を微分可能な関数の中で論じてみようと考えました。すなわち，ユークリッド空間の閉集合上で定義された微分可能な関数は，ユークリッド空間全体で定義された微分可能な関数にまで拡張されるかを問題とした。ここで有名な，閉集合上で定義された可微分関数に関する Whitney の定義が登場します。一度この定義が確定しさえすれば，拡張問題は既に連続関数のレベルで解かれていますから，問題は，連続関数をどのように可微分関数によって近似するかということに変貌して来ます。Whitney はここで近似の意味するところを深く考察したに違いないと思われます。この考察の過程で得られた高い視点は，二年後に，'Differentiable manifolds' という見かけ上全く異った形の中で実ったといってもよいでしょう。

Urysohn の定理が，抽象的な位相空間の概念から出発し

て，具体的な連続関数の存在へと辿りついた一つの道程を示すとすれば，Whitneyは，いわば，この道をdifferentiableなカテゴリーの中で，逆の方向に歩き出した。近似という，今となっては象徴的とも思える一つの原理を頼りとしながら，この道を逆に歩き続けて行くことにより，関数の近似から，場の存在へとWhitneyは辿りつくことに成功した。ここに‘Differentiable manifolds’が提示した深いオリジナリティーがあります。しかし，抽象数学の強い影響を受けながら辿りついたDifferentiable manifoldsという場は，抽象数学の言葉で語れる場所ではなかった。そこにはユークリッド空間という枠が明確な形で登場して来ます。

多様体の埋めこみの問題は，Whitneyのすぐれた着想でしたが，たとえば当時なお強く浸透していた位相空間の距離づけの問題を，位相空間の単位区間の直積の中への埋めこみの問題といい直してしまえば，多様体の埋めこみの問題は本来距離づけの問題と非常に近い場所にあったことに気がつきます。これらはともに，適当な可算性と，連続関数または可微分関数が十分多くあることの帰結として得られますが，Whitneyの提示したDifferentiable manifoldsは既にその概念の中に十分多くの関数を含んでいましたから，定理は一般的命題の形をとり，抽象的な位相空間の中から距離空間を特性づ

ける問題とは，全く異った性格を帯びるに至ったと考えられます。この異った性格は1936年の論文の中に示された，2n＋1次元の中への埋めこみでは，まだ十分明らかにされなかったとしても，八年後，2n次元への埋めこみを示す段階では，*general position* の原理 —— それは抽象数学との最後の接点のようなものであったが —— は完全に捨て去られ，微分位相幾何学の最初の萌芽を見出すことになる。ここで多様体は，抽象数学の中で得られた場とは全く異る道を進むことになりました。

しかし，Whitney 自身の関心は，一貫して differentiability にありました。したがって多様体という場がしだいに確定してくると，Whitney 自身は幾何学な場そのものより，可微分写像の特異性や，'Geometric integration' にみられるような PL-多様体上の可微分性の考察，また 'Tangent cone' 等の特異点をもつ多様体上の接空間等への深い問題へと入って行くことになります。

このような Whitney の仕事が普遍化するのに，時間がかかったことは，ごく当然のことに思われます。Whitney の，抽象数学を背景として得られた多様体は，本来，*Riemann* とか *Poincaré* の導入したものとは違った場所にあったと思われます。それは，接続，または三角形分割等の幾何学的考察

より，その上の関数，または解析的な考察に適したところがある．たとえば一般の複素多様体の概念は，Weylから直接生まれたものではなく，Whitneyの多様体の概念を模しながら生まれて来ました。この概念が，最も有効に働き出してくるのは，層の概念が確定してからだったということは，よく知られています。

1950年以降，種々の概念が多様体上に導入されて来て，Riemann，Poincaré，Whitneyの観点の違いなど，余り問題とされなくなって来ましたが，多様体の中から，無限次元多様体とか，関数解析的なものが背景にあると感じさせる一面には，Whitneyによる，多様体の或る抽象的な，自由な考え方が底流としてあると思われます．

de Rham の Thèse が1932年，Hodge の‘Harmonic integrals’が1940年，小平先生の Harmonic integral の論文が1948年に刊行されましたが，Weil の二重複体による de Rham の定理の証明が1952年に出，同じ頃，層とかスペクトル系列による証明も出て，急にこの定理も現実に私達の前に登場して来ました。どうもこの辺りの歴史的配列というものはわからない所がある。当時の私達には，Hodge 理論を学ぶのに，Hodge や小平先生のオリジナルを読もう

とする空気は余りありませんでした。この理論がポピュラーになったのは，やはり秋月先生の‘調和積分論’に負う所が大きかったのだと思います。

de Rhamの定理からHodgeの定理に移る所に，Global Analysisの発祥の地があるのでしょうが，同時にまたここにGlobal Analysisの或る基本的な役割を示すところもあるようなので，そのことについて少し触れます。

多様体は，その概念構成からも明らかなように，localからglobalへ移る過程が重要であって，そこに，層またはスペクトル系列等の極限操作が必要となる。しかしこの極限操作はすべてコホモロジー・レベルで論ぜられるものであって，コホモロジーの代表元をcanonicalにとることについては，何の情報も与えてくれません。Hodgeの定理は，Riemann計量さえあれば調和形式によって，それは可能であるといっているのですが，その間の事情は今となっても，十分わかり易いとはいえないように思います。多分，解析学の中にあるinfinitesimalな方法が，コホモロジー・レベルでの極限過程よりも，さらに内部に立ち入ることを可能にしたのでしょう。もう少しはっきりいえば，Global Analysisの意味は，Laplacianが定義されたという点にあるのではなくて，parametrixの存在にあるのだろうと思ってい

ます。(もちろん parametrix の存在は，à priori estimate に形を変えることもあります。) parametrix のもつ'semi-local' な性質が，単なる local から global への極限過程よりも，遥かに深いものを生む契機を与えているのではないかと想像しています。その意味では，多様体を三角形分割し，その分割をどんどん細かくして行く過程の中で，どの程度 parametrix の構成に近づくような操作が位相的に構成可能かを問うてみることは，Global Analysis の意味を知る上では重要なことかもしれないと思われます。しかしこのことについては，既に Patodi あたりが考えていた　のかもしれません。

Atiyah-Singer の定理が最初にアメリカ数学会の Bulletin に発表されたのは 1963 年のことですが，私は早速，当時東大におられた竹内勝さん達と何人かで，それを読もうと試みました。しかし，symbol map の定義も，Fredholm 作用素の指標に関する基本的ないくつかの性質もわからない，まして特異積分作用素など，Calderón の論文を見ても，少しも要領を得ないという有様でした。結局 Atiyah-Singer の理論が一まず読めるようになったのは，Palais と Cartan による，それぞれのセミナー・ノートが手に入るようにな

ってからのことでした。1964年，京都で日米合同の微分幾何のシンポジゥムが開かれ，Singerも参加しましたが，Singerはそのときしきりに，底空間とファイバーに楕円型作用素が与えられたとき，ファイバー・バンドルの全空間上にどうやって楕円型作用素を定義したらよいのか；かんたんの場合にやってみると，どうもindexと構造群の表現が関係するようだといっていました。やがてそれが，equivariant K-理論を背景とした，第2証明の主軸として育って行ったことは，今となってはよく知られていることです。

Thom，Hirzebruch，Atiyah-Singerと続く仕事によって，多様体の理論の枠が拡がり，Weilが'数学の将来'の中で予想していたより遥かに早く，É. Cartanの影響は薄れてしまいました。これは私達が1950年代に学んでいた頃には夢にも考えられなかった状況である。

Atiyah-Singerのおかげで，私は随分いろいろのことを学ぶことができました。しかし第2証明によって，Atiyah-Singerの定理が結局はBott periodicityの中にあると明らかにされると，私がそれまで開いた世界だと思って学んでいたAtiyah-Singerの理論が，このことによって何か予想もしなかった場所に収束し，完結してしまったと見えるようになって来て，今度はこの世界から，どのようにして抜け出

そうかと考えるようになりました。

その頃からロシヤの数学に関心が湧いて来ました。実際，今まで数学上の重要な思想のいくつかはロシヤから生まれて来ましたが，私達がそれを見るのは，ヨーロッパまたはアメリカを経由してからであって，いわば篩にかけられ精選された形でしかなかった，今度こそ自分自身の眼で直接ロシヤ数学を見てみたいと思いはじめました。

たまたま，図書室で偶然手にした雑誌の中に，Gelfand-Fuks のベクトル場のリー環に関する最初の論文を見出しました。この論文を見たとき私を動かしたのは，この仕事に盛られているオリジナリティーであったというよりは，もう少し単純に，何度読んでもわからないし，またどう判断してよいかもわからない，これは一体どのような数学なのかという疑問と驚きでした。これを何とか理解しようとかなり長い間努めました。今から考えてみて多少後悔されるのは，この論文を私自身の勉強の中に閉じこめておかなくて，何人かの若い人達と一諸にもっと積極的に学ぶべきことだったのかもしれないということです。私が読み出したのは非常に早い時機でしたから，もし何人かの若いトポロジストがこれに関心をもてば，或いは Bott や Haefliger のした仕事は，日本人

の手で成し遂げられたかもしれません。

Gelfand-Fuks理論は，ベクトル場の双対空間を問題とするという意味で，Gelfandが長い間育てて来たGeneralized Functionの思想の上にあるといってもよいと思います。Gelfand-Fuks理論の一つの重要性は，Generalized Functionを媒介として，具体的な多様体と，代数的位相幾何のアブストラクト・ナンセンスな手法で得られたBΓのような空間とを結びつけた点にあると思われます。しかし，Sullivan-Haefligerの結果によれば，Gelfand-Fuksコホモロジーは，結局は或るファイバー・バンドルのcross-section spaceのコホモロジーに他ならないことが分かりました。このことは，多様体上のベクトル場のような所から量を導いても，本質的に新らしい幾何学的量を見出すことはできなかったという，Gelfand-Fuksコホモロジーに対する期待に，否定的な答であったともいえます。

ベクトル場のリー環のコホモロジーという観点に限れば，最近のFuks，辻下氏等の仕事によって，大体Gelfand-Fuksコホモロジーも一まず終ったと考えてよいのではないかと思います。Gelfand-Fuks理論の方向がさらに進むためには，何か今まで知られていなかった新らしい概念と結びつくことが必要と思われます。そしてまだそのような可能性は十分あ

るだろうと思っております。

Nash および非線型のことについても少し触れておきます。1956年に，Nash の Riemann 多様体の isometric imbedding の論文が発表されたとき，大結果だが，Riemann 多様体は既に埋めこみを用いなくとも intrinsic に論ぜられるようになっているから，これはもはや孤立した意味しかないだろうという意見が多かったようでした。私も読み出して，途中で止めてしまった記憶があります。Nash の仕事の重要さは，結果ではなくてむしろその証明にあると考えたのは，私は Moser あたりが最初かと思っておりましたが，阪大の村上先生にお聞きしたところによると，Malgrange は，Nash の論文が出るとすぐにゼミをつくって，丹念に読んでいたそうです。当時は，今ほど解析学は幾何学の中に入って来ていなかったから，Nash の論文に対する評価も，幾何学者と解析学者とでは，大分違っていたのかもしれません。

非線型については，この春亡くなった伊勢君が，1970年頃から微分幾何学におけるその重要性を強調し，Weyl または Minkowski の問題の高次元への一般化，また Monge-Ampère 型の方程式の一般化など，いろいろな問題を示していました

が，アメリカの若手の幾何学者の精力的な仕事で，この方面はこの数年間で随分開発されて来ました。最近は日本でも，非線型の空気がかなり広く浸透して来ましたが，これからというときに伊勢君を失ったことは，まことに残念に思います。

Atiyahとか Singerは，最近理論物理学に強い関心を示しています。それとともに，この十数年間，漠然と数学の指導原理となっていた K-theory とか，elliptic geometry とか Bott periodicity とかの枠組から，数学が再び抜け出そうとしているように見えて来ました。

或る少数の全く個人的な話し合いの中で，Atiyah は質問に答えて，最近の数学を見ると，本当に面白い論文は，出版される論文の量に較べれば，以前より減ったような感じもつが，数学は，物理学とか生物学とか，今まで殆ど関係しなかった分野へどんどん展開しているから，全体としては発展していると思うという意味のことを答えておりました。

Atiyahの数学教育に関する論説または話の中で，Euclid幾何学も，Newton力学も同じ場所にあるという意見を述べているということを聞いたことがあります。前後のことがわかりませんので，Atiyah のこの意見について，あとは全く勝手に私なりの推測をしてみます。

幾何学も物理学も，本来は時間，空間に関する深い直観に支えられ，それをいかに表現するかという同じ自覚から出発したのだと思います。しかし長い歴史の過程の中で，二つの学問は分かれ，表現および研究の方法も全く異なる形をとるに至った．物理は，直観を，観測されたものの正確な記述へと高め，数学は，直観を表現する形式　の完成を論理の中に求めた。

だが，数学に限れば，空間の直観を強めれば，幾何学の場が浮かび上り，時間の直観を強めれば，解析の形式が浮かび上ってくるようであります．確かに，Euclid幾何や射影幾何の中には，時間の直観の入る余地は，全くといってよいほどありませんでした。しかしいつの間にか，時間がパラメーターの形をとって幾何学に取り入れられ，このシンポジウムの主題となっておりますような「幾何学における大域的解析学」が自然に論ぜられるようになって来たということは，歴史的に見ても非常に興味あることに思います。そしてまた幾何学がそのように変容しつつあることによって，Atiyahがいうように，数学が外の世界へと展開する可能性を，しだいに強めて来たともいえるのではないかと思います．

（II）

次に私が最近関心をもっていることについてお話し致します。私は，von Neumann algebra が幾何学に適用され，重要な応用をもつ時機に来たのではないかと思います。von Neumann algebra については，Murray と von Neumann が，1936年に最初の論文を発表してから，沢山の研究が積み重ねられて来ました。1936年とは，一方では抽象数学からの転換を示唆する Whitney の論文が出たり，他方では抽象数学の極限とも思える Murray - v. Neumann の深い論文が出たりした重要な年です。

---

von Neumann algebra は次のように定義される．

H : separable complex Hilbert space

B(H) : H上の有界作用素全体のつくる $*$-algebra（$*$は adjoint をとる演算であって，したがって involutive に働く。）

とする．そのとき

定義．B(H) の $*$-subalgebra M が 1 を含み，かつ弱位相に関して閉じているとき，M を von Neumann algebra という．

ここで B(H) の弱位相とは, semi-norm の系 $|(Ax, y)|$ $(x, y \in H)$ から決まる線型位相空間としての位相である.
B(H) の任意の部分集合 S に対し

$$S' = \{ X \mid AX = XA \quad \text{for } \forall A \in S \}$$

とおき, S' を S の commutant という。そのとき B(H) の *-subalgebra M が, von Neumann algebra となる必要十分条件は, $M = M''$ が成り立つことである。 このような von Neumann algebra の研究には, factor とよばれるものの研究が重要である。

定義 von Neumann algebra M が

$$M \cap M' = (\alpha I)$$

をみたすとき, M を factor という (ここで右辺は, スカラー作用素からなることを示す略記法である).

すなわち, factor は, その center がスカラー作用素からなり, したがって'既約性'の条件が成り立っている。

Murray と v. Neumann によると, factor は次の三つの基本的な type にまず分類される。

(I_n) $(n = 1, 2, \cdots, \infty)$; (II_1), (II_∞) ; (III).

この分類に対する基本的な考えは 'dimension' であって,

$\mathbb{M}$ に属する射影 P, Q に対し，或る partial isometry $U\in\mathbb{M}$ が存在して，U が P を Q に移すとき（正確には，$P=U^*U$, $Q=UU^*$ と表わされるとき），P と Q は同値であるといい，$P\sim Q$ と表わす。この同値類の集合から，次元とよばれる $[0,\infty]$ への対応が canonical に構成される。次元は，或る基本的な性質（たとえば，直交している射影の次元は，それぞれの次元の和である等）によって，正の定数をかける任意性を除いて，一意的に決まる。次元を適当に normalize しておくことにより，その次元の値域が

(I_n) :	$\{0,1,2,\cdots,n\}$	$(0\leqq n\leqq\infty)$
(II_1) :	$[0,1]$	（単位区間！）
(II_∞) :	$[0,\infty]$	（無限遠を加えた半直線）
(III) :	$\{0,\infty\}$	（0 と ∞ だけ）

であることにより，それぞれの factor が特性づけられる。

(I_n)-型の factor $\mathbb{M}$ は，n 次の複素行列環 $M_n(\mathbb{C})$ と同型である。（$n=\infty$ のとき $\mathbb{M}\cong B(H)$。）

(II_1), (II_∞)-型では，次元は‘連続次元’の様相をもって現われる。

(II)型，(III)-型の場合，次元によるこの分類はなお一次的なものであって，実際それぞれの型の中には，互に代数的に同型でないような連続濃度の factor が存在する。このよう

な factor の存在およびその分類の問題（それはまだ殆ど未解決といってよい状態のようであるが）が，作用素環の理論の最も深い部分を形成している．

ここでは，von Neumann algebra そのものの理論を話すよりは，この理論が，どのような場所で幾何学と関連してくるかを述べてみたい．

（1）可算無限群

可算無限群は，すぐあとで述べるように，基本群との関係で幾何学にも非常に重要である．しかし自由群，または無限アーベル群等に関するいくつかの研究はあるとしても，一般の可算無限群に対しては，有限群のような詳しい研究は行なわれていないようである．私の感じている所を述べれば，可算無限群は，代数と解析との深い谷間にあって，殆ど窺い知れないような深さをたたえている．

有限生成的な可算群については，Milnor, Wolf 等により，有限生成集合 S が与えられたとき，growth function

$$g_S(n) = \#\{x \mid x \text{ は，} S,\ S^{-1} \text{ に属する高々 } n \text{ 個の元の積で表わされる}\}$$

が導入され，$n \to \infty$ のときの order に注目することにより，polynomial growth, exponential growth 等の概念

が与えられた．アーベル群は polynomial growth であり，自由群は exponential growth である．これに関し代数的に重要な結果は，Wolf の

‘有限指数の巾零部分群をもつ有限生成的な可算群は，polynomial growth である’

で与えられている．この逆も予想されているが，解決されていない．

一般には，有限生成的でない可算群は非常な複雑な構造をもつと考えられる．そこでは asymptotic な記述では，記述することのできないような，無限，または非常に大きな有限量のもつ本質的な難かしさが，群の元の間の relation にしたがって，出現してくることになるだろう．また一方では，可算群を研究するとき，有限生成的なものに限るということも，余り意味のあることではないのである．たとえば G(2) により，二つの生成元をもつ自由群とすると，この交換子群 [G(2), G(2)] は，無限個の生成元をもつ自由群となっている。

このような可算群に対して，比較的取扱いやすい類を規定するものとして‘amenable’という概念がある．

G を可算群（次の定義は discrete 群でよい）とし，B(G) により，G 上の有界な実数値関数全体のつくるベクトル空間

を表わす.

定義 $B(G)$ から $\mathbb{R}$ への線型写像 ℓ で,

$\ell(1)=1$; $\ell(\varphi)\geqq 0$ $(\varphi\geqq 0)$; $\ell(g^{-1}\varphi)=\ell(\varphi)$ $(g\in G)$ $(\varphi\in B(G))$ をみたすものが存在するとき, G を amenable という.

一般に amenable 群の部分群は amenable であり, また可解群は amenable である. $G(2)$ は amenable でなく, したがって $G(2)$ を部分群にもつ群は amenable でない.

可算無限群と von Neumann algebra との関係は次のようになる. G を可算無限群とし, ℓ^2 により, G の元で index のつけられた自乗総和可能な複素数列全体のつくる Hilbert 空間を表わす:

$$\ell^2=\{\{x_g\} \mid \textstyle\sum_{g\in G}|x_g|^2<+\infty\}.$$

G の ℓ^2 上への左からの正則表現 U_ℓ と, 右からの正則表現 U_r はそれぞれ

$$U_\ell(g)\{x_h\}=\{x_{gh}\}, \qquad U_r(g)\{x_h\}=\{x_{hg^{-1}}\}$$

で定義される. U_ℓ, U_r は G の unitary 表現を与えている. $\{U_\ell(g)\,;\,g\in G\}$ から生成された von Neumann algebra

を $R(G)$ とおく. $R(G)$ の commutant は, $U_x(g)$ $(g\in G)$ から生成された von Neumann algebra で与えられる. $R(G)$ は群 G の'群環'と考えられる.

群 G に次の条件をおく:

(*) 単位元以外の元の共役類に含まれる, 元の個数は ∞.

この条件の下で, $R(G)$ はつねに (II_1)-型の factor となる. 1969年に McDuff は, (*) をみたす可算無限群を適当にとることにより, $R(G)$ の形の (II_1)-型の factor で, 代数的に同型でない連続濃度の (II_1)-型の factor の存在することを証明した. このことからも, 可算無限群を一般的に取扱うためには, 連続濃度の量を用意しておくことが必要なことがわかる.

特に G が (*) をみたす amenable 群とする. そのとき $R(G)$ は, (II_1)-型の factor の中で最も取扱いやすい hyperfinite とよばれるものとなる. hyperfinite とは, 有限次元の行列環 (type (I_n), $n<\infty$) の増加系列から生成されるような von Neumann algebra である.

(II_1)-型の hyperfinite な factor は, 代数的同型を除いて一意的に決まる. A. Connes の1975年の結果によれば, 連結, 局所コンパクトな位相群の正則表現から生成される von Neumann algebra も, hyperfinite なカテゴリーの中におさまっている. 一方 Connes は, $R(G)$ が hyperfinite

となるのは，Gが(*)をみたすamenable群であるときに限ることも示した．このことは，局所コンパクトな位相群と類似の性質をもつ可算無限群は，amenable群に限るということを示しているともみられる．実際，Gがamenableでなければ，R(G)の構造は，単なる有限次元の近似によっては得られないだろう．

一方，曲率が負のコンパクトRiemann多様体の基本群は(*)をみたし，かつamenableではない．したがってこのような多様体の基本群を詳しく調べるためには，今まで幾何学に登場しなかったような，全く新らしい考えを導入する必要が生ずるだろう．ここに，幾何学がvon Neumann algebraに注目する必要があると私が考えている，一つの理由がある．

Connesが，Thèseで(III)-型の分類理論を確立して以来，しだいに明らかにしている所によると，与えられたfactor M を詳しく調べるには，Mの自己同型群Aut(M)の考察が重要な意味をもっているようである．Mの内部自己同型は，Mに属するユニタリー作用素Uによって$A \to U^*AU$ $(A \in M)$で与えられるものである．内部自己同型全体のつくる群をInn(M)とおき，次に

$$\mathrm{Out}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Inn}(M)$$

とおいて，Out(M)を，Mの外部自己同型群という．

$\mathbb{M}$が(I)-型のときには，$\mathrm{Aut}(\mathbb{M}) = \mathrm{Inn}(\mathbb{M})$だから，$\mathrm{Out}(\mathbb{M})$はtrivialである．しかし，一般には，(II)-型，(III)-型のとき，$\mathrm{Out}(\mathbb{M})$はnon-trivialである．

したがって(II)-型，(III)-型のfactorが現われるような幾何学的対象に対しては，$\mathrm{Out}(\mathbb{M})$から，今までの線型代数((I)-型！)を背景とした理論からは決して得られなかったような，全く新しいinformationを導き出せる可能性がある．

一般に，$\mathrm{Out}(\mathbb{M})$の決定は難かしい問題のようである．しかし，Connesによると，$\mathbb{M}$が(II_1)-型のhyperfiniteの場合，$\mathrm{Out}(\mathbb{M})$は単純群であって，その共役類は可算個からなり，(p, γ) $(p = 0, 1, 2, \cdots ; \gamma^p = 1\ (\gamma \in \mathbb{C}))$によりcanonicalに，parametrizeされることが知られている．

$\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$には，適当な位相をいれて，位相群とすることができる．$\mathbb{M}$が(II_1)-型のhyperfiniteのときには，$\overline{\mathrm{Inn}(\mathbb{M})} = \mathrm{Aut}(\mathbb{M})$であるが，自由群$G(2)$の'群環'$R(G(2))$に対しては，$\mathrm{Inn}(\mathbb{M})$は閉じていて，$\mathrm{Inn}(\mathbb{M}) \subsetneq \mathrm{Aut}(\mathbb{M})$となっている．

(2) <u>無限被覆空間</u>

Xを連結な多様体，$\pi_1(X) = G$とする．Xの普遍被覆$\tilde{X}$

は，X上のG-主バンドルの構造をもつ：$\widetilde{X} \xrightarrow[G]{\pi} X$

いまGが条件(*)をみたす無限群とする．$H = \ell^2$とおき，Gのℓ^2上への正則表現をU_Gとすると，$\widetilde{X}$の associated bundle

$$E = X \times_{U_G} H$$

が得られる．EはX上の Hilbert bundle であるが，この変換関数がR(G)に属しているという意味で，(II_1)型の Hilbert bundle である．

$\mathbb{M} = R(G)$とおく．このとき，構造群が$\mathbb{M}$に含まれているような Hilbert bundle のカテゴリーを考察することが重要となる．この種の bundle に対して，或る種の量，たとえば$\widetilde{X}$のL^2-コホモロジー等を対応させることは，可能であろうか．

$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M})$を一つとる．そのときX上の任意の$\mathbb{M}$-bundle Eが与えられたとき，Eの各変換関数$\varphi_{\alpha\beta}$に対し，σを適用することにより，新らしい$\mathbb{M}$-bundle E^σが得られる．（E^σは変換関数$\varphi_{\alpha\beta}^\sigma$をもつ．）もし$\sigma \in \mathrm{Inn}(\mathbb{M})$ならば，$E \cong E^\sigma$（$\mathbb{M}$-bundleとして）は自明である．しかし，$\sigma \notin \mathrm{Inn}(\mathbb{M})$ならば，一般には$E^\sigma$はEと同型でない．したがって，$\mathrm{Out}(\mathbb{M})$は，$\mathbb{M}$-bundle の変換を惹き起す．$\sigma, \tau \in \mathrm{Out}(\mathbb{M})$が，互いに$\mathrm{Out}(\mathbb{M})$の中で共役な

とき，E^{σ} と E^{τ} は同型であろうか。同型でないとすると，この場合，E^{σ} と E^{τ} が同型となるような，$\mathbb{M}$-bundle の間の自然な同型の定義を，新しく与える必要があるかもしれない。これはどのようにしたらよいのだろう．

$\mathbb{M}$ のユニタリー作用素全体のつくる群を $\mathbb{M}^{u}$ とすると，正則表現によって，$G \subset \mathbb{M}^{u}$ となっている．したがって分類空間へ移って，写像 $BG \longrightarrow B\mathbb{M}^{u}$ が得られる．群 $\mathbb{M}^{u}$ の連続コホモロジー $H_c^*(B\mathbb{M}^{u})$ はどのような意味をもつか．また合成写像

$$H_c^*(B\mathbb{M}^{u}) \longrightarrow H^*(B\mathbb{M}^{u}) \longrightarrow H^*(BG)$$

の像はどのようなものだろうか．

$Aut(\mathbb{M})$ は自然に $H_c^*(B\mathbb{M}^{u})$，$H^*(B\mathbb{M}^{u})$ の上に働いている．これは $Aut(\mathbb{M})$ のどのような表現を与えているのだろうか．

（3） K-理論

主に，M. Breuer により (II)-型の factor 上の K-理論がつくられた．$\mathbb{M}$ を (II_1)-型の factor とし

$$\overline{\mathbb{M}} = \mathbb{M} \otimes I_\infty$$

とおく．ここで I_∞ は，(I_∞)-型の factor を表わし，$\mathbb{M} \otimes I_\infty$ は作用素環としてのテンソル積である（この正確な定義はこ

こでは省略する）．$\overline{M}$ は (II_∞) 型の factor となる．

n が有限のとき，(I_n)-型の factor は $M_n(\mathbb{C})$ と同型であることに注意して，$\overline{M}$ の部分環の増加列

$$M \subset M\otimes I_2 \subset \cdots \subset M\otimes I_n \subset \cdots\cdots \subset M\otimes I_\infty = \overline{M}$$

を考える．$\sigma\in Aut(M)$ は，$\sigma\otimes id$ により，自然に $M\otimes I_n$ 上の自己同型写像を導く．X上の Hilbert bundle で，その変換関数が $M\otimes I_n$ $(n=1,2,\cdots)$ に属しているものを，$\overline{M}$ の中で考えることにより，普通のように Whitney 和を用いて，K-群が定義される．これを

$$K_M(X)$$

とおく．

$K_M(X)$ は，コンパクト空間上（または一般にして，局所コンパクト空間上）の一般コホモロジーを与える．$\overline{M}$ に属する作用素Tが，$\overline{M}$-Fredholm であるとは，$T^{-1}(0)$ が $\overline{M}$ に属する有限次元の射影作用素の値域で与えられ，また $\exists P\in\overline{M}$ があって $\dim_{\overline{M}} P < +\infty$，$\mathrm{range}\,(1-P)\subset \mathrm{range}\,T$ をみたすことである．$\overline{M}$-Fredholm 作用素全体は一様位相で閉じている．この空間を $\mathcal{F}(\overline{M})$ で表す．そのとき，$K_M(X)$ は表現可能なコホモロジー群であって，実際

$$K_M(X) = [X, \mathcal{F}(\overline{M})]$$

となる．この定理の証明には，$\overline{M}$ の正則元全体のつくる空間

が可縮であるという，Kuiper 型の定理が成り立つことが，本質的に用いられる．さらに Bott 周期定理

$$K_{\overline{M}}(X) \cong K_{\overline{M}}(X \times \mathbb{R}^2)$$

が成り立つ．このことから

$$K_{\overline{M}}(X) \cong H^{even}(X ; \mathbb{R})$$

であることが結論される．

$\sigma \in \mathrm{Aut}(M)$ は，functorial な $K_{\overline{M}}(X)$ の自己同型を惹き起し，したがってまた上の同型を通して，コホモロジー作用素

$$\sigma^{\#} : H^{even} \longrightarrow H^{even}$$

を導く．

このコホモロジー作用素は，trivial だろうか．M が hyperfinite のときには trivial かもしれない．しかし，一般の (II)-型の factor の場合には，今の段階では何の予想もつかない．もし $\sigma^{\#}$ が一般には non-trivial であったとすれば，それは今まで知られなかった全く新らしいコホモロジー作用素を与える可能性がある．

また，逆に $\sigma^{\#}$ が常に trivial であるという否定的な結果に対する一般的な証明が得られれば，その証明は $\mathrm{Aut}(M)$ に関する或る information を与えるかもしれない．

(4) Huge space

foliation の分類空間 BΓ は，huge spaceである．huge space は，普通は或る topological category から，geometric realization を行なって得られる空間から生じて来る．

しかしたとえば，Sullivan の有理ホモトピー型の理論を実ホモトピー型にまで拡張することが重要な問題として残されている現状を考えると，huge space を単なるカテゴリーの realization space として考えるより，もっと積極的に，トポロジーの研究対象となる空間と考えた方がよい時機になったのかもしれない．

huge space の取扱いには，新らしいトポロジーの手段，または概念が必要とされるかもしれない．完備な huge space のような概念があるのかもしれない．或いは，chain また cochain space に位相を入れ，それに関する completion space，または本質的な意味での連続コホモロジーの考察も必要になってくるのではないかという気もしている．

このような huge space を調べる手がかりを与える例を構成する場として，(II)-型 または (III)-型 の factor がある．

たとえば，(II_1)-型の factor M に属する射影作用素全体

のつくるGrassmann多様体$Gr(M)$のホモトピー型はどのようなものであろうか。この場合，次元がたとえば有理数の射影作用素だけを集めて得られる部分空間$Gr^{rat}(M)$は，$Gr(M)$の中にどのように入っているのだろうか．また，Mのユニタリー作用素全体のつくる空間M^uのホモトピー型はどのようなものであろうか．

このような空間のホモトピー型は，Mの代数的な型の違いを反映しないで，決まってしまうものだろうか。$Aut(M)$は，これらの空間のコホモロジー環に，環同型として働くが，一般に*huge space*の場合，コホモロジー環の同型群を調べることは意味のあることだろうか．

なお，特にMが*hyperfinite*の場合，Mの有限次元からの近似は，$Gr(M)$の中で，どのような形の近似として記述されるかを知ることは，非常に興味ある問題のように思われる．

(5) 解空間の次元

関数方程式で，その解空間が有限次元でないような場合，その大きさを測るため，von Neumann algebraの議論が有効に用いられることがある．このような方向で最初に現われた論文としては，1972年に，差分方程式にvon Neumann algebra を適用した D. G. Shaeffer の論文がある．これと類似の適用例は，今後もいろいろ有り得ると思われる．

Astérique に出た Atiyah の論文は，コンパクト多様体 X 上の無限被覆 $\tilde{X}$ で，離散群 Γ によって，$X = \tilde{X}/\Gamma$ と表わされる場合を取扱う．$\tilde{X}$ に Γ-不変な測度 $d\tilde{\mu}$ を導入しておく．$d\tilde{\mu}$ は X 上の測度 $d\mu$ によって一意的に決まる．基本領域を用いることにより，

$$L^2(\tilde{X}, d\tilde{\mu}) = L^2(\Gamma) \otimes L^2(X, d\mu)$$

と表わされる．$L^2(\tilde{X}, d\tilde{\mu})$ の Γ-不変な作用素全体を $\mathbb{M}$ とすると，$\mathbb{M}$ は，上の分解では，Γ の $L^2(\Gamma)$ 上への左からの正則表現と可換なものとして得られるから，von Neumann algebra となって

$$\mathbb{M} = R_r(\Gamma) \otimes B(L^2(X, d\mu))$$

となる．ここで R_r は，Γ の右正則表現から生成される von Neumann algebra である．群 Γ が条件 (*) をみたしていれば，$\mathbb{M}$ は (II_∞) 型の factor である．説明を簡単にするために，ここでは Γ は (*) をみたしているとする．$\tilde{X}$ 上で定義された楕円型の 0 次の pseudo-differential operator $\tilde{D}$ で，Γ-不変なものが与えられたとする．そのとき $\tilde{D} \in \mathbb{M}$ である．$\tilde{D}$ は X 上の楕円型の 0 次の pseudo-differential operator の lifting として得られる．

Atiyah の結果は，$\widetilde{D}$ は M-Fredholm 作用素であって，

$$\mathrm{index}_{M}\widetilde{D} = \mathrm{index}\, D$$

となることを述べている．この結果から，$\mathrm{index}\, D > 0$ ならば $\mathrm{index}_{M}\widetilde{D} > 0$ が得られる．特にこの場合，$\widetilde{D}\varphi = 0$ は non-trivial な解をもつ．Atiyah は，さらにこの考察を一般にして，半単純 Lie 群の discrete series の表現の構成に適用し，見事な成果を得た．

von Neumann algebra は，foliation，dynamical system の理論にも，これから本質的な応用を見出して行くことになるだろう．最初の手がかりを得るためには，ホロノミー群が amenable であるような foliated bundle に対して，von Neumann algebra の適用を考えてみるのがよいと思う．このことについて，私自身まだここで述べるほど考えが熟していない．

これに関連して，最近 Connes が，von Neumann algebra を foliation に用いようと，積極的に試みているということが伝えられていることだけを述べておこう．

最後に私の感想を述べれば，幾何学もますます深い対象を取扱うようになって来て，それとともに，その用いる方法の

上にも，一つの転機が訪れようとしているのではないかということである．

文献（特に(II)に関連して）

M.F. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, Astérique 32-33 (1976), 43-72.

M. Breuer, Theory of Fredholm operators and vector bundles relative to a v. Neumann algebra, Rocky Mountain J, 3 (1973), 383-429.

A. Connes, Outer conjugacy of automorphisms of factors, Symposia Mathematica vol XX (1976), 149-159.

———, On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms, Ibid, 435-478

S. Sakai, C*-algebras and W*-algebras, Erg. Math. 60 (1971).

D.G. Shaeffer, An application of v. Neumann algebras to finite difference equations, Ann. Math. 95 (1972), 117-129.

I.M. Singer, Some remarks on operator theory and index theory, Springer Lecture Notes 575 (1977), 128-138

（これらの文献の中にある文献表が，周辺の論文を示してくれる．）