数理解析研究所講究録
第321巻 1978年 60-78

不変式論的方法

森川寿（名大理）

射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ 内の解析曲線の射影同値類と，ある２階非線型微分方程式系の正則解との１対１対応についてのべる．飯高氏によって用いられた記号法を適用すれば，多変数（部分解析多様体）の場合にもそのまゝ適用出来る部分が多い。

1. 関数系のみたす holonomic system

多変数の Wronskian を定義するため，飯高氏の用いた記号を説明する．独立変数 $z_1, \cdots, z_n$ に対して更に互に独立な変数 $d^\ell z_j \quad (\ell=1,2,3,\cdots;\ j=1,2,\cdots,n)$
を考え，収束級数環 $\mathbb{C}\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上の可換な多項式環 $\mathbb{C}\{z_1,\cdots,z_n\}[\cdots, d^\ell z_j, \cdots]$ を考える．微分 d を次のように定義する

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i ,$$

$$d(d^\ell z_j) = d^{\ell+1} z_j \quad (\ell=1,2,3,\cdots;\ 1\leq j\leq n),$$

原点のまわりで正則な、1次独立な関数系

$(\varphi_1(z_1,\cdots,z_n),\ \cdots,\ \varphi_n(z_1,\cdots,z_n))$

に対して

$$(*)\quad \begin{vmatrix} y, & \varphi_1 & \cdots, & \varphi_n \\ dy, & d\varphi_1, & \cdots, & d\varphi_n \\ d^2y, & d^2\varphi_1, & \cdots, & d^2\varphi_n \\ \vdots & & & \vdots \\ d^ny, & d^n\varphi_1, & \cdots, & d^n\varphi_n \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(\mu_{jl})} M_{(\mu_{jl})}(y) \prod_{j,l} (d^l z_j)^{\mu_{jl}}$$

とおけば、$M_{(\mu_{jl})}(y)$ は $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ の $(z_1,\cdots,z_n)$ に関する偏微分係数の多項式を係数にもつ y に関する線型偏微分作用素である。関数 $\psi(z_1,\cdots,z_n)$ が (*) で零化されることと、全ての (μ_{jl}) に対して $M_{(\mu_{jl})}(\psi)=0$ となることと同値になる。すなわち $(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ のみたす holonomic system の generators として $(M_{(\mu_{jl})})$ を取ることが出来る。

記号 $d^l\varphi(z_1, \cdots, z_n)$ の意味を考えると，任意の正則曲線 $t \longrightarrow (z_1(t), \cdots, z_n(t))$ に対して

$$d^l\varphi(z_1, \cdots, z_n) \longrightarrow \left(\frac{d}{dt}\right)^l \varphi(z_1(t), \cdots, z_n(t))$$

が特殊化になっている．行列式(＊)はしたがって，関数系を与えて，それを基本解とする常微分方程式(線型)を作る方法をあらゆる曲線に対して同時に行ったことになる．

2. 不変式論からの準備

Kを標数零の体，$w_1, \cdots, w_N$ を $0, 1, 2, \cdots$ と等しくないKの元，$\xi_1 = (\xi_1^{(0)}, \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \cdots), \cdots, \xi_N = (\xi_N^{(0)}, \xi_N^{(1)}, \xi_N^{(2)}, \cdots)$ を変数を係数とする長さ無限のベクトルとする．形式的巾級数

$$f_j(\xi_j \mid z) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{w_j}{l} \xi_j^{(l)} z^l \qquad (1 \le j \le N)$$

$$\binom{w_j}{l} = \frac{w_j(w_j - 1) \cdots (w_j - l + 1)}{l!}$$

を基礎にとる．$K[\xi_1, \cdots, \xi_N]$ に指数 index を

$$\mathrm{ind}(\xi_j^{(l)}) = w_j - 2l$$

で入れる．リー代数 $\mathfrak{sl}(2, K)$ の $K[\xi_1, \cdots, \xi_N]$ への作用を

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \to \mathcal{D} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty} l\, \xi_j^{(l-1)} \frac{\partial}{\partial \xi_j^{(l)}},$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \to \Delta = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty} (w_j - l)\, \xi_j^{(l+1)} \frac{\partial}{\partial \xi_j^{(l)}},$$

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \to \mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty} (w_j - 2l)\, \xi_j^{(l)} \frac{\partial}{\partial \xi_j^{(l)}}$$

で入れる．このとき $\mathcal{H}$ は半単純に $K[\xi_1, \cdots, \xi_N]$ に作用し $\mathcal{H}$ の固有値 u ： $\mathcal{H}\varphi = u\varphi$ が φ の指数である．$\mathcal{D}$で零化される元を半不変式と呼ぶ。半不変式であるかどうかは $(w_1, \cdots, w_N)$ の選び方によらないが，その index による分解

$$\mathfrak{S} = \bigoplus_{u} \mathfrak{S}^{[u]} \qquad \mathfrak{S}^{[u]} = \{\varphi \in \mathfrak{S} \mid \mathcal{H}\varphi = u\varphi\}$$

は $(w_1, \cdots, w_N)$ による．

$K = \mathbb{C}$ として以下考える．$(1+t)^u$ の分岐を1つ

$$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{u}{l} t^l$$

で選んでおき，$SL(2, \mathbb{C})$ の単位元の近傍の元 $\begin{pmatrix}\delta&\beta\\\gamma&\alpha\end{pmatrix}$ の基本形式的巾級数 $f_j(\xi_j \mid z)$ $(1 \leq j \leq N)$ への作用を

$$f_j\left(\begin{pmatrix}\delta&\beta\\\gamma&\alpha\end{pmatrix}\xi_j \,\middle|\, z\right) = (\gamma z + \delta)^{w_j} f_j\left(\xi_j \,\middle|\, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \quad (1 \leq j \leq N)$$

で定義する．

次に index u の共変式を定義しよう。$\mathbb{C}[\xi_1, \cdots, \xi_N]$ の元を係数とする形式的巾級数

$$F(\xi_1, \cdots, \xi_N ; z) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{u}{l} c_l(\xi_1, \cdots, \xi_N) z^l$$

が $SL(2, \mathbb{C})$ の単位元の近傍の元 $\begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ に対して

$$F\left(\begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}\xi_1, \cdots, \begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}\xi_N ; z\right) = (\gamma z + \delta)^u F\left(\xi_1, \cdots, \xi_N ; \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

をみたすとき、index u の共変式という。

不変式論の基本定理として次が成り立つ。

<u>Robert の定理</u>　index u の半不変式と index u の共変式との間に次の1対1対応がある

半不変式　　　　　　　　　　共変式

$$\varphi(\cdots, \xi_j^{(l)}, \cdots) \longmapsto \exp(z\Delta)\varphi(\cdots, \xi_j^{(l)}, \cdots)$$

$$= \varphi\left(\cdots, \frac{\left(\frac{d}{dz}\right)^l f_j(\xi_j, z)}{w_j(w_j - 1)\cdots(w_j - l + 1)}, \cdots\right)$$

$$F(\xi_1, \cdots, \xi_N ; 0) \longleftarrow\!\shortmid F(\xi_1, \cdots, \xi_N ; z).$$

これは半不変式環と共変式環との環同型を与える。

3. 線型常微分作用素の標準型，微分不変式

この節では u は1変数独立変数とする．原点のまわりで正則な1次独立な関数系 $(\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u))$ に対して

$$W_{n,\varphi}(u) = \begin{vmatrix} \varphi_1(u), & \cdots, & \varphi_n(u) \\ \frac{d}{du}\varphi_1(u), & \cdots, & \frac{d}{du}\varphi_n(u) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{d}{du}\right)^{n-1}\varphi_1(u), & \cdots, & \left(\frac{d}{du}\right)^{n-1}\varphi_n(u) \end{vmatrix},$$

$$L_n(p|u,y) = (-1)^n W_{n,\varphi}(u)^{-1} \begin{vmatrix} y & \varphi_1(u), & \cdots, & \varphi_n(u) \\ \frac{d}{du}y & \frac{d}{du}\varphi_1(u), & \cdots, & \frac{d}{du}\varphi_n(u) \\ \vdots & & & \vdots \\ \left(\frac{d}{du}\right)^n y, & \left(\frac{d}{du}\right)^n \varphi_1(u), & \cdots, & \left(\frac{d}{du}\right)^n \varphi_n(u) \end{vmatrix}$$

とおく．$L_n(p|u,y)$ を $(\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u))$ に対応する微分作用素という．関数系 $(\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u))$ の変換

$$(\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u)) \longrightarrow (\psi_1(z), \cdots, \psi_n(z))$$
$$= (\lambda(z)^{-1}\varphi_1(u(z)), \cdots, \lambda(z)^{-1}\varphi_n(u(z)))$$

は対応する線型微分作用素の間の変換

$$L_n(p|u,y) \longrightarrow L_n(q|z,y)$$

をひきおこす，こゝに $L_n(q|z,y)$ は $(\psi_1(z), \cdots, \psi_n(z))$ に対応

するものとする．また2項係数を用いて

$$L_n(q|z,y)=\left(\frac{d}{dz}\right)^n y+\sum_{l=1}^{\infty}\binom{n}{l}q_l(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-l}y$$

と表わすことにする。

$L_n(Q|z,y)$ が $Q_1(z)\equiv Q_2(z)\equiv 0$ をみたすとき，標準型であるという．次の Forsyth の定理は基本的である．

<u>Forsyth の定理</u>　任意の微分作用素 $L_n(p|u,y)$ は適当に $(\lambda(z),\ u(z))$ を選んで，変換された微分作用素 $L_n(q|z,y)$ が標準型になるように出来る．また $(\lambda(z), u(z))$ がある標準型を標準型に移すための必十条件は

$$(\lambda(z),\ u(z))=\left(\frac{c}{(\gamma z+\delta)^{n-1}},\ \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}\in SL(n,\mathbb{C})\quad c\in\mathbb{C}^\times\right)$$

となることである．

次に重さ p の微分不変式を定義しよう．代数的不変式の場合と同じく，$\left(\frac{d}{du}\right)^l p_j(u)$ $(l=0,1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots,n)$ が代数的に独立の場合に定義し，その他の場合は独立な場合の微分不変式の特殊化によって定義する．

$(\lambda(z), u(z))$ により $L_n(p|u,y)$ が $L_n(q|z,y)$ に変換されたとき，$\mathbb{C}[\cdots,(\frac{d}{du})^l p_j(u),\cdots]$ の元 $\Phi(u)$ が常に $\mathbb{C}[\cdots,(\frac{d}{dz})^l q_j(z),\cdots]$ の対応する元 $\Psi(z)$ との間に

$$\Phi(u)(du)^p = \Psi(z)(dz)^p$$

なる関係をみたすとき，$\Phi(u)$ を $L_n(p|u,y)$ の微分不変式（重さ p）という．

標準型 $L_n(Q|z,y)$ に対して，次の基本微分不変式系を係数 $Q_j(z)$ の微分係数から具体的に計算出来る．(Forsyth)

$$\theta_j(z) = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{j-3} \frac{(-1)^s (j-2)!\, j!\, (2j-s-2)!}{(j-s-1)!\,(j-s)!\,(2j-3)!\, s!} \left(\frac{d}{dz}\right)^s Q_{j-s}(z)$$

$(3 \leq j \leq n).$

∴不変式論を応用すると，

<u>定理</u>　$w_3=-6,\ w_4=-8,\ \cdots,\ w_n=-2n$

$$\theta_j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{w_j}{l} \xi_j^{(l)} z^l \qquad (3 \leq j \leq n)$$

とおくとき，標準型 $L_n(Q|z,y)$ の微分不変式の全体は $(w_3,\cdots,w_n)$ に対応する，$\theta_3(z),\cdots,\theta_n(z)$ に関する2節の意味での共変式全体と一致する．

したがって標準型の微分不変式はRobertの定理により，半不変式を用いて次々に構成出来る．

一般な $L_n(p|u,y)$ についての基本微分不変式系は標準型 $L_n(Q|z,y)$ の $\theta_j(z)$ を用いて

$$\theta_j(u) = \theta_j(z)\left(\frac{dz}{du}\right)^j \qquad (3 \leq j \leq n)$$

によって与えられる．

始めに与えられた関数系 $(\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u))$ がある群 Γ に関する重さ k の整保型形式のときには対応する微分作用素 $L_n(p|u,y)$ の微分不変式は分母因子が高々 Wronskian $W_{n,\varphi}(u)$ の巾である保型形式になることがわかる．

4 Schwarz 微分

普通の Schwarz 微分について，少し説明しよう，

$$\{z, \tau\} = \frac{\left(\frac{d}{d\tau}\right)^3 z}{\frac{dz}{d\tau}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\left(\frac{d}{d\tau}\right)^2 z}{\frac{dz}{d\tau}}\right)^2$$

を Schwarz 微分という．次の公式をみたす．

$$\{z, \tau\} = \{z, u\}\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 + \{u, \tau\},$$

$$\{z, \tau\} + \{u, z\}\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 0,$$

$$\left\{\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \tau\right\} = \{z, \tau\} \quad \left(\begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})\right)$$

$$\left\{z, \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right\} = \{z, \tau\}\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}{(\gamma\tau+\delta)^4},$$

$$\{z,\tau\} = 0 \iff \tau = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \quad \left(\begin{pmatrix}\delta & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})\right)$$

関数に対してでなく，微分の組に対しても

$$\{(df)^m, (dg)^n\} = \{df, dg\} = \{f, g\}(dg)^2$$

で Schwarzian を定義出来ることは $\alpha, \beta \neq 0$, $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ に対して $\{\alpha f+\gamma, \beta g+\delta\} = \{f, g\}\beta^{-2}$ であることからわかる.

補題

$$x_j(z) = \begin{vmatrix} \theta_j(z) & \dfrac{-\theta_j'(z)}{2j} \\ \dfrac{-\theta_j'}{2j} & \dfrac{\theta_j''(z)}{2j(2j+1)} \end{vmatrix}$$

とおけば

$$x_j(z)(dz)^{2j+2} = \frac{(\theta_j(z)(dz)^j)^2}{2(2j+1)}\{\theta_j(z)(dz)^j, dz\}$$

<u>証明</u> $\theta_j(z)dz^j = (df)^j$ とおいて定義にあてはめればよい.

5. 曲線の射影同値類を決める2階微分方程式系

標準型 $L_n(Q|z,y)$ に対しては，基本微分不変式系 $(\theta_3(z),\cdots,\theta_n(z))$ から逆に解いて

$$Q_j(z)=\sum_{l=0}^{j-3}\beta_{jl}\left(\frac{d}{dz}\right)^l\theta_{j-l}(z)\qquad(3\leq j\leq n)$$

と一意的に表わせることにまず注意する.

$(n-1)$次元射影空間の曲線 $u\to(\varphi_1(u),\cdots,\varphi_n(u))$ に対して，変換

$$(\varphi_1(u),\cdots,\varphi_n(u))\to(\psi_1(z),\cdots,\psi_n(z))$$
$$=(\lambda(z)\varphi_1(u(z)),\cdots,\lambda(z)\varphi_n(u(z)))$$

は射影曲線の径数の変換を意味する. また対応

$$(\varphi_1(u),\cdots,\varphi_n(u))\longrightarrow L_n(p|u,y)$$

では射影変換の任意性を取り除く.（基本解の選び方の任意性の取除く）. したがって重さ p の $L_n(p|u,y)$ の微分不変式に対応する微分型式　$\Phi(u)(du)^p$ は射影曲線の射影不変量である。逆にどれだけの微分~~形~~式の組が曲線の射影同値類を決定するかを問題にする.

主定理 (i) 1変数の微分形式の組

$$\Theta_j(u)(du)^j,\ \chi_j(u)(du)^{2j+2}\qquad(3\leq j\leq n)$$

が次の条件

$$(**)\quad 2(2j+1)\chi_j(u)\theta_k(u)^2-2(2k+1)\chi_k(u)\theta_j(u)^2$$
$$=\frac{1}{j}\theta_j(u)\theta_k(u)^2\frac{d^2\theta_j}{du^2}-\frac{1}{k}\theta_k(u)\theta_j(u)^2\frac{d^2\theta_k(u)}{du^2}$$
$$-\frac{2j+1}{2j^2}\theta_k(u)^2\left(\frac{d\theta_j(u)}{du}\right)^2+\frac{2k+1}{2k^2}\theta_j(u)^2\left(\frac{d\theta_k(u)}{du}\right)^2$$

$$(3\leq j<k\leq n)$$

をみたす必要十分条件は，ある変数 z が 1次分数変換をのぞいて1意的にきまり

$$\theta_j(z)=\theta_j(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^j$$

$$(***)'\quad \chi_j(z)=\begin{vmatrix}\theta_j(z) & \frac{-1}{2j}\frac{d}{dz}\theta_j(z)\\ \frac{-1}{2j}\frac{d}{dz}\theta_j(z) & \frac{1}{2j(2j+1)}\left(\frac{d}{dz}\right)^2\theta_j(z)\end{vmatrix}$$

とおくとき

$$(***)''\quad \theta_j(z)(dz)^j=\theta_j(u)(du)^j,$$
$$\chi_j(z)(dz)^{2j+2}=\chi_j(u)(du)^{2j+2}$$

と書けることである．したがってその1次分数変換をのぞいて1意的に標準型が決まる．(z) 更に

$$\theta_{jk}(z)=\begin{vmatrix}\theta_j(z) & \theta_k(z)\\ \frac{-1}{2j}\frac{d}{dz}\theta_j(z) & \frac{-1}{2k}\frac{d}{dz}\theta_k(z)\end{vmatrix}$$

$$\chi_{jk}(z)=\begin{vmatrix}\chi_j(z) & \theta_k(z)\\ \frac{-1}{4j+4}\frac{d}{dz}\chi_j(z) & \frac{-1}{2k}\frac{d}{dz}\theta_k(z)\end{vmatrix}$$

とおき

$$(\cdots, \theta_j(z)(dz)^j, \cdots, \theta_{jk}(z)(dz)^{j+k+1}, \cdots, \chi_j(z)(dz)^{2j+2}, \cdots, \chi_{jk}(z)(dz)^{2j+2k+3}, \cdots)$$

を重さつき射影空間(重さ$(\cdots, j, \cdots, j+k+1, \cdots, 2j+2, \cdots, 2j+2k+3, \cdots)$)の曲線$\tilde{C}$の座標としたとき、もし$\theta_{jk}$, χ_{jk} $(3 \le j < k \le n)$の中少くとも1つ零でないものがあれば、$\tilde{C}$は1次分数変換を除いて標準型が唯1つある。したがって$\tilde{C}$には唯1つの$\mathbb{P}^{n-1}$の曲線の射影同値類が対応する。もし$\theta_{jk} = \chi_{jk} = 0$ $(3 \le j < k \le n)$ならば$\tilde{C}$は1点である。

証明. Schwarz微分の公式より

$$\{\theta_j(z)(dz)^j, dz\} - \{\theta_k(z)(dz)^k, dz\}$$

$$= \{\theta_j(u)(du)^j, dz\} + \{dz, \theta_k(u)(du)^k\}$$

$$= \{\theta_j(u)(du)^j\ \theta_k(u)(du)^k\}.$$

$$= \{\theta_j(u)(du)^j, du\} - \{\theta_k(u)(du)^k, du\}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{j}\frac{\frac{d^2\theta_j}{du^2}}{\theta_j} - \frac{2j+1}{2j^2}\frac{\left(\frac{d\theta_j}{du}\right)^2}{\theta_j^2}\right) - \left(\frac{1}{k}\frac{\frac{d^2\theta_k}{du^2}}{\theta_k} - \frac{2k+1}{2k^2}\frac{\left(\frac{d\theta_k}{du}\right)^2}{\theta_k^2}\right)\right](du)^2$$

したがって補題を用いると,

$$2(2j+1)(\chi_j(u)\,\theta_k(u)^2 - 2(2k+1)\,\chi_k(u)\,\theta_j(u)^2)(du)^{2j+2k+2}$$

$$= 2(2j+1)(\chi_j(z)\,\theta_k(z)^2 - 2(2k+1)\,\chi_k(z)\,\theta_j(z)^2)(dz)^{2j+2k+2}$$

$$= (\theta_j(u)\theta_k(u))^2 \left(\{\theta_j(u)(du)^j, du\} - \{\theta_k(u)(du)^k, du\} \right)(du)^{2j+2k}$$

$$= \Big(\frac{1}{j}\theta_j(u)\theta_k(u)^2 \frac{d^2\theta_j(u)}{du^2} - \frac{1}{k}\theta_k(u)\theta_j(u)^2 \frac{d^2\theta_k(u)}{du^2}$$

$$- \frac{2j+1}{2j^2}\theta_k(u)^2\left(\frac{d\theta_j(u)}{du}\right)^2 + \frac{2k+1}{2k^2}\theta_j(u)^2\left(\frac{d\theta_k(u)}{du}\right)^2 \Big)(du)^{2j+2k+2}$$

これは(***)′,(***)″をみたす径数 z が存在する~~必要十分~~条件が(**)で与えられていることを示す。また z は1次分数変換をのぞいて

$$2(2j+1)\chi_j(u)(du)^{2j+2} = (\theta_j(u)(du)^j)^2\{\theta_j(u)(du)^j, dz\}$$

により決まる。(2)の証明をする。曲線 $\tilde{C}$ が2つの標準型 $L_n(Q|z, y)$ と $L_n(\tilde{Q}|\tilde{z}, y)$ に対応するものとすると、ある $\lambda(z)$ があって

$$\tilde{\theta}_j(\tilde{z})(d\tilde{z})^j = \lambda(z)^j\theta_j(z)(dz)^j$$

$$\tilde{\theta}_{jk}(\tilde{z})(d\tilde{z})^{j+k+1} = \lambda(z)^{j+k+1}\theta_{jk}(z)(dz)^{j+k+1}$$

$$\tilde{\chi}_j(\tilde{z})(d\tilde{z})^{2j+2} = \lambda(z)^{2j+2}\chi_j(z)(dz)^{2j+2}$$

$$\tilde{\chi}_{jk}(\tilde{z})(d\tilde{z})^{2j+k+3} = \lambda(z)^{2j+k+3}\chi_{jk}(z)(dz)^{2j+k+3}$$

$\mu(z) = \lambda(z)\dfrac{dz}{d\tilde{z}}$ とおけば

$$\tilde{\theta}_j(\tilde{z}) = \mu(z)^j\theta_j(z),$$

$$\tilde{\theta}_{jk}(\tilde{z}) = \mu(z)^{j+k+1}\theta_{jk}(z),$$

したがって

$$\mu^{j+k+1}\theta_{jk}=\begin{vmatrix}\tilde{\theta}_j & \tilde{\theta}_k\\ \frac{-1}{2j}\frac{d}{dz}\tilde{\theta}_j & \frac{-1}{2k}\frac{d}{dz}\tilde{\theta}_k\end{vmatrix}=\mu^{j+k}\frac{d\tilde{z}}{dz}\theta_{jk}$$

同様にして

$$\mu^{2j+k+3}x_{jk}=\mu^{2j+k+2}x_{jk}.$$

よって θ_{jk}, x_{jk} のうちに零でないものがあれば

$$\lambda(z)=\mu(z)\frac{d\tilde{z}}{dz}=1$$

となり，(1)より主張は正しい。もし全ての θ_{jk}, x_{jk} が零となれば，定数 c_j と共通の関数 u があって

$$\theta_j(z)=c_j\left(\frac{du}{dz}\right)^j$$

$$x_j(z)=\frac{c_j^2\left(\frac{du}{dz}\right)^{2j}}{2(2j+1)}\{u,z\}$$

$$=\frac{-c_j^2\left(\frac{du}{dz}\right)^{2j+2}}{2(2j+1)}\{z,u\},$$

$$x_{jk}(z)=\begin{vmatrix}x_j(z) & \theta_k(z)\\ \frac{-1}{4j+4}\frac{d}{dz}x_j(z) & \frac{-1}{2k}\frac{d\theta_k(z)}{dz}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-c_j^2\left(\frac{du}{dz}\right)^{2j+2}}{4(2j+1)(2j+2)}\frac{d}{dz}\{z,u\}=0$$

これより $\{z,u\}=\alpha$（定数）がわかる。

よって

$$(\cdots, \theta_j(z)(dz)^j, \cdots, \theta_{jk}(z)(dz)^{j+k+1}, \cdots, \chi_j(z)(dz)^{2j+2}, \cdots$$
$$\chi_{jk}(z)dz^{2j+k+3}, \cdots)$$

$$\sim(\cdots, g_j, \cdots, 0, \cdots, \frac{-g_j^2\alpha}{2(2j+1)}, \cdots, 0, \cdots)$$

<u>系</u>　$\theta_{jk} \equiv \chi_{jk} \equiv 0$　$(3 \leq j < k \leq n)$ ならば曲線では，基本解として

$$(z^{\lambda_1}, \log z\, z^{\lambda_1}, \cdots, (\log z)^{s_1} z^{\lambda_1}, \cdots, z^{\lambda_r},$$
$$\log z\, z^{\lambda_r}, \cdots, (\log z)^{s_r} z^{\lambda_r})$$

の形のものをもつ線型微分作用素に対応する。

<u>証明</u>　$\{z, u\} = -\frac{1}{2}\alpha^2$ (定数) とおけば 1次分数変換の範囲でzをえらべるならば $z = e^{\alpha u}$ と出来る よって $\frac{du}{dz} = \frac{1}{\alpha z}$，$\theta_j(z) = g_j(\alpha z)^{-j}$

よって

$$z^{-n} L_n(a|z, y) = \sum \binom{n}{l} \gamma_l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n-l} y$$

と表わせる。これは上記のことを示す。

6　部分多様体の射影同値類を決める2階偏微分方程式系

1変数の場合を利用して多変数のときを定式化しよう $(\eta_1(t), \cdots, \eta_n(t))$ 不定関数のベクトルとし，それを基本解とする線型常微分作用素を $L_n(y|t,y)$ とする．$\Phi(t)$ を重さ p の $L_n(y|t,y)$ の微分不変式とすれば，$\Phi(t)$ は分母が高々 $\eta_1(t), \cdots, \eta_n(t)$ の Wronskian の巾である $\left(\frac{d}{dt}\right)^l \eta_j$ $(l=0,1,2,\cdots; j=1,2,\cdots n)$ の有理式（定数係数）である．これを

$$\Phi(t) = \Phi\left(\cdots, \left(\frac{d}{dt}\right)^l \eta_j, \cdots\right)$$

と表わす．基本微分不変式 $\theta_j(t)$ や $\theta_{jk}(t)$, $x_j(t)$, $x_{jk}(t)$ についても

$$\theta_j(t) = \theta_j\left(\cdots, \left(\frac{d}{dt}\right)^l \eta_j, \cdots\right),$$

$$\theta_{jk}(t) = \theta_{jk}\left(\cdots, \left(\frac{d}{dt}\right)^l \eta_j, \cdots\right),$$

$$x_j(t) = x_j\left(\cdots, \left(\frac{d}{dt}\right)^l \eta_j, \cdots\right),$$

$$x_{jk}(t) = x_{jk}\left(\cdots, \left(\frac{d}{dt}\right)^l \eta_j, \cdots\right)$$

と表わしおく。

さて n変数の関数ベクトル

$$(\varphi_1(z_1, \cdots, z_n), \cdots, \varphi_n(z_1, \cdots, z_n))$$

に対して

$$\theta_j(z_1, \cdots, z_n) = \theta_j(\cdots, d^l\varphi_j, \cdots)$$

$$\theta_{jk}(z_1, \cdots, z_n) = \theta_{jk}(\cdots, d^l\varphi_j, \cdots)$$

$$\chi_j(z_1, \cdots, z_n) = \chi_j(\cdots, d^l\varphi_j, \cdots)$$

$$\chi_{jk}(z_1, \cdots, z_n) = \chi_{jk}(\cdots, d^l\varphi_j, \cdots)$$

一般に

$$\Phi(z_1, \cdots, z_n) = \Phi(\cdots, d^l\varphi_j, \cdots)$$

とおけば，これらは分母が高々Wronskian

$$\begin{vmatrix} \varphi_1, & \cdots, & \varphi_n \\ d\varphi_1, & \cdots, & d\varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ d^{n-1}\varphi_1, & \cdots, & d^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}$$

の巾である．分子は φ_j の偏微分係数の多項式を係数とする $\prod (d^l z_j)^{\mu_{jl}}$ の一次結合である。これらを微分方程式 $(*) = 0$ の微分不変式と呼んでよいであらう。その意味は，任意の曲線 $t \to (z_1(t), \cdots, z_n(t))$ に関して $d^l\varphi_j$ を $\left(\frac{d}{dt}\right)^l \varphi_j(z_1(t), \cdots, z_n(t))$ でおきかえ

れば微分不変式になるものと解釈してよい。もっとくわしく、微分不変式 $\Phi(\cdots, d^l\varphi_j, \cdots)$ は変数変換

$$(\varphi_1(u), \cdots\cdots, \varphi_n(u)) \longrightarrow (\psi_1(z), \cdots, \psi_n(z))$$
$$= (\lambda(z)\varphi_1(u(z)), \cdots, \lambda(z)\varphi_n(u(z)))$$

にも、$\mathbb{P}^{n-1}$ の射影変換にもよらないことを注意しておく。微分不変式系

$$(\theta_3(\cdots d^l\varphi_j, \cdots), \cdots, \theta_n(\cdots d^l\varphi_j, \cdots), x_3(\cdots, d^l\varphi_j, \cdots), \cdots, x_n(\cdots d^l\varphi_j, \cdots))$$

は 1 変数の場合の (＊＊) より

$$(****) \quad 2(2j+1)x_j\theta_k^2 - 2(2k+1)x_k\theta_j^2$$
$$= \frac{1}{j}\theta_j\theta_k^2 d^2\theta_j - \frac{1}{k}\theta_k\theta_j^2 d^2\theta_k$$
$$- \frac{2j+1}{2j^2}\theta_k^2(d\theta_j)^2 + \frac{2k+1}{2k^2}\theta_j^2(d\theta_k)^2$$
$$(3 \leq j < k \leq n)$$

をみたす。

多変数の場合には一般に標準型は存在しないものと思われる。