数理解析研究所講究録
第321巻 1978年 79-87

アーベル積分と、その原始積分について.

東大理. 斎藤恭司

§0.

有理数体上、代数的関係を持たない様な数が、超越数であり、有理函数体上、代数的関係を持たない様な函数が超越函数である。この定義は、非常に簡単だが、実際に我々がどの位、超越的なものを知っているかとなると、ずい分限られたものであるのに驚く。特に、多変数の超越的函数については、未だ、興味ある函数の例が充分にはない様に思われる。

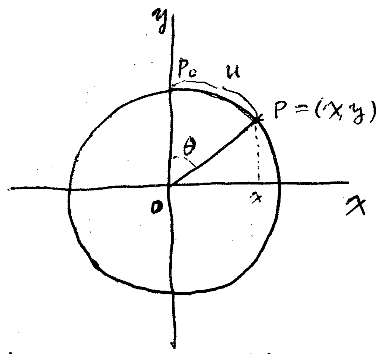
1方、知られている様な、超越的なものの中で、一連の興味ある系列がある。(それ等は、どちらかというと、易しい方のものであるが。) 具体的に言うと、数では、π(円周率), 函数では、三角函数(指数函数), 楕円函数, ϑ-函数, 等々… である。

これ等の数や函数の意味は、いろいろ有ろうが、ここでは以下の様に、解析的見地をとってみる。(係数体は $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$)

まず、2変数多項式 $f(x,y)$ を考える。その零点集合は、

デカルト平面内のある曲線 C を定める。C上の点pは、デカルト座標(x, y)で表示される。ここで、yはxの代数函数となってはいるが、この座標(x, y)はあまりに外的の様に思える。もっと、Cに則しての、内的なCの点のパラメーター表示はないだろうか。例へば、C上の1点p_0を固定して、そこから点pまでの弧長を測るのはどうだろうか。

<u>例(1)</u>　半径 r の円　$f(x, y, r) = x^2+y^2-r^2 = 0$.



すると点p_0からpまでの弧長 $u(x)$ は

$$u(x) = \int_0^x \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

よく知られている様に、この積分の逆函数　$x=\varphi(u)$ は、(周期$2\pi r$の)正弦函数となる。

特に上記の積分を x の critical point (つまり f と $\frac{\partial f}{\partial y}$ の共通根) $x=\pm r$ まで積分した値 $u(r)$ は、r の函数として、次の2階の微分方程式を満す事が、上記の積分表示から分る。

$$\frac{d^2}{dr^2}\,u(r) = 0$$

従って $u(r)$ と r は比例関係になるが、その比例定数は、$u(r)/r = \frac{\pi}{2}$ であり、この数は超越数である事が知られている。　言い換えると、デカルト座標(x, y)で、円の大きさを表わした、半径 r と、"弧長座標" u

それに代って、次の無限級数関係 $\frac{1}{r^2} = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n u)^2}$ が成り立つ!!

で測られた、円周の大きさ、$2\pi r$ の間には、整係数代数的関係がない。

(2) もう一つの例を見てみよう。レムニスケートの弧長を測る事に、端を発した楕円積分は、曲線 $C : y^2=4x^3-g_2x-g_3$ に対して、次の様な積分を考える標準型(Weierstraß)がある。

イ) $u(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$

この積分の逆函数 $x=\wp(u)$ は、楕円函数として、よく知られている。

ロ) 上記の積分において、特に、x をその critical point (つまり $4x^3-g_2x-g_3=0$ の三根 x_1, x_2, x_3 のいずれか)まで積分した値 $u(x_i)$ は、g_2, g_3 の函数として、イ)の積分表示と、その部分積分を用いる事により、2階の全微分方程式系を満す。ここでは、その具体形を書かないが、discriminant $\Delta=27g_3^2-g_2^3=0$ に沿って、log pole を持つ(定義は後出)方程式となり、本質的には、Gaußの超~~幾~~何微分方程式となる。

ハ) 上記の critical な積分 $u(x_i)$ ($u(x_1), u(x_2), u(x_3)$ の間に、或る有理数係数1次関係式が成り立つので本質的には2つの函数とみなす。)は、積分イ)の(半)周期と呼ばれるが、独立な二つ $u(x_1), u(x_2)$ と、もともとのデカルト座標の方で、曲線の形を決めていたパラメーター g_2, g_3 の間には、もはや代数的な関係は、存在せずに、(ロ)の微分方程式の解の逆写

像を考え） g_2, g_3 を $u(x_1), u(x_2)$ で表示すると、それは、

$$g_2=\frac{15}{4}\sum_{(n,m)\neq(0,0)}\frac{1}{(nu_1+mu_2)^4}\ ,\quad g_3=\frac{35}{16}\sum_{(n,m)\neq(0,0)}\frac{1}{(nu_1+mu_2)^6}$$

なる無限有理級数表示（Weierstraßによる Eisenstein 級数）となる。

以上の例から、大雑把に言って次の事が想像されよう。

1般にパラメーター $g=(g_1,\cdots,g_k)$ を含む、曲線の族 $C_g: f(x,y,g)=0$ に対し、その曲線の適当な積分 $u=\int \varsigma(x,y)$ をとると、

イ）u は変数 g に関する多価函数として、（2階の）微分方程式の解となる。

ロ）逆に、パラメーター g を積分 u で表示するには、無限有理級数表示を要する。（その函数はモジュラー函数となる。）

この様な方向の理論で、もっともよくいった例の一つとして、Riemann による Jacobi の逆問題への一般的な解答が、考えられる。Riemann はまず複素曲線に、無遠点をいくつか付加する事により、曲線をコンパクト化した面（Riemann面）を考え、その上で、到る所、正則な微分（第一種アーベル微分）を積分した。

よく知られている様に、Riemann面の示性数を p とすれば、曲面上1次独立な1次元cycles は $2p$ 個 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{2p}$，第一種微分は p 個 $\varsigma_1,\cdots,\varsigma_p$ ある。　週期行列 $(\int_{\gamma_i}\varsigma_j)_{\substack{i=1,\cdots,2p\\ j=1,\cdots,p}}$ は $\int_{\gamma_i}\varsigma_j=\delta_{ij}$ と normalize しておくと $Z=(\int_{\gamma_{i+p}}\varsigma_j)_{i,j=1,\cdots,p}$ は対称行列となり、Riemann面上の有理函数数は、ϑ-函数 $\vartheta(u,Z)$ を用いれば、$\vartheta(\int^x\varsigma_i+a,Z)$

なるものの適当な比でかける。又 Torelli の定理によれば、対称行列 Z は、元の Riemann 面の等角同値類を unique に決める。

しかし、ここで、新たな問題が生じる。p 次対称行列 Z の自由度は $\frac{p(p+1)}{2}$ であるのに対し、1般に、示性数 p の Riemann 面の moduli の次元は $3p-3$ であるので、両者の間に、直接的な関係は望めない。むしろ、先の例 1, 2, の場合の様に r と $u(r)$, g_2, g_3 と u_1, u_2 の間にあった無限有理級数関係は、"幸運な例外" であった様にも思われる。この事態をどう考えたらよいだろうか。

一つの考え方はこうである。　曲線族 $f(x,y,g)=0$ に対し、上記の $\frac{p(p+1)}{2}$ ケの積分 $\int_{\gamma_i}\omega_j$ は、そもそもすべて g の函数として互に独立なわけではない。従って何らかの理由で、$p(p+1)/2$ 個の積分中、或る特別な積分 $u_1(g), \cdots, u_\ell(g)$ を分離できれば、我々は、パラメーター $g_1, \cdots, g_\ell$ と、積分 $u_1, \cdots, u_\ell$ の関係を調べればよい。特に $g_1, \cdots, g_\ell$ は $u_1, \cdots, u_\ell$ の保型函数になるであろう。実際、この様な考え方に基いて、Picard (1884) や志村 (1963) は或る虚数乗法の作用を持つ曲線族に対し、保型函数 $g=E(u)$ を得た。

次に述べるのが、本稿の主要テーマとなる原始積分という考え方である。まず、話しを Riemann 以前にもどし、曲線 C_g: $f(x,y,g)=0$ をコンパクト化しない。(よってそれは或るコンパクト Riemann 面 − 有限個の点 (∞-) となっている。) 又考える微分 ω も、

C_g 上では holomorphic でも ∞-点 では pole を持ってよい事にする。(その様な微分は一般に第2種, 第3種微分と呼ばれている。)
実際に例1では Riemann 球 − {2ケの∞-点} に homeo な曲線上、で、無限遠点で丁度1位の極のを持つ微分 $\varsigma=\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$ を積分している。)
すると、曲線 C_g 上独立な 1-cycle の $\gamma_1,\cdots,\gamma_\mu$ (μ = 1次元 betti 数)($\mu \geq 2p$) に対し全部で丁度 μ 個の1次独立な微分 $\varsigma_1,\cdots,\varsigma_\mu$ とれ(∵代数的な de-Rham Theorem による) よって周期行列 $\left(\int_{\gamma_i}\varsigma_j\right)_{i,j=1,\cdots,\mu}$ が考えられる。しかし、このままでは、周期行列の成分の個数は μ^2 個だから、一般に パラメーター $g=(g_1,\cdots,g_l)$ の自由度 l よりもはるかに大きな数となってしまい、状況は、かえって悪くなった様に見える。

ところがもし、或る特別な微分 ς_0 (g に depend する) 及び、パラメーターの空間上のベクトル場 $\delta^j = \sum_{k=1}^{l} a_k^j(g)\frac{\partial}{\partial g_k}$, $j=1,\cdots,\mu$ が存在して、$\int_\gamma \varsigma_j = \delta^j\int_\gamma \varsigma_0$ と書けるならば、積分 $\int_\gamma \varsigma_0$ は、周期行列の原始函数(あるいはポテンシャル)となる事になり、問題はずっと簡明化する。$\int_\gamma \varsigma_0$ の事を原始積分と呼ぶ事にすれば、我々は、μ 個の原始積分 $u_1=\int_{\gamma_1}\varsigma_0,\cdots\ u_\mu=\int_{\gamma_\mu}\varsigma_0$ と l 個のパラメーター $g_1,\cdots,g_l$ の間の関係を調べればよい事となる。本稿の主定理は、ある状況下では、この様な原始積分が存在する事を示す。更にその時は $\mu=l$ となって2つの変量 g と u の間の関係も、定まる。

もう少し具体的には、次の通り。$f(x_0,\cdots,x_n)$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ で定義

された、多項式又は正則函数とし、$f^{-1}(0) =: X_0$ は 原点 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ のみで特異な多様体とする。 f の perturbation でもっとも universal なものは、次の様なもので与えられる。(Thom, Arnold)

$$F(x, g_1, \cdots, g_\mu) = f(x) + g_1 + g_2\varphi_2(x) + \cdots + g_\mu \varphi_\mu(x)$$

ただし、$1, \varphi_2, \cdots, \varphi_\mu$ は $\mathbb{C}\{x_0, \cdots, x_n\} / (\frac{\partial f}{\partial x_0}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ の $\mathbb{C}$-base を与える函数

すると μ 次元の parameter $g = (g_1, \cdots, g_\mu) \in \overset{S}{\underset{\shortparallel}{}}\mathbb{C}^\mu$ のうち、曲面 $X_g : F(x,g) = 0$ が smooth にならない様な g の全体は余1次元の部分多様体 $D \subset S$ になっている。D を discriminant と呼ぶ。Milnor 等の定理によると、1方パラメーター g が D に属してなければ、曲面 $X_g : F(x,g) = 0$ は (原点の近くで) 丁度 μ 個の(1次)独立な n 次元 ホモロジー、サイクルを持っている。

その、ホモロジーサイクルの dual として、X_g 上の holomorphic な n-form で、パラメーター g に正則に depend するもの全体の或る同値類として

$$\mathcal{H} = F_* \Omega^n_{\mathbb{C}^{n+1}\times S} / dF \wedge \Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^{n+1}\times S} + \sum_{i=1} dg_i \wedge \Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^{n+1}\times S} + d\,\Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^{n+1}\times S} + F\,\Omega^n_{\mathbb{C}^{n+1}\times S}$$

を考えると、これは rank μ の $\mathcal{O}_S$-module となり、要するに $\mathcal{H}$ の元 ζ は、各 X_g 毎に n-form を定め、先のミルナーのサイクルと dual になる。

さて1方、μ 次元のパラメーターの空間 S 上の正則なベクトル場で、discriminant D に接する様なものを、対数型ベクトル場と呼んで、その全体を $Der_S(\log D)$ と記す事にしよう。$Der_S(\log D)$ は、$\mathcal{O}_S$-module として free で rank μ となる事もいえる。

以上の下に、次の定理が得られる。

<u>定理</u> $f, F, \mathcal{H}, Der_S(\log D)$ 等は上記の通りとする。

この時、次の様な ζ_0, Θ が存在する。

i) $\zeta_0 \in \mathcal{H}$ ii) $\Theta : Der_S(\log D) \longrightarrow \mathcal{H}$: $\mathcal{O}_S$-module としての isomorphism

s.t. i) $\gamma(g) \in H_n(X_g, \mathbb{Z})$ を g に horizontal に depend する n 次元 cycle の任意の族とすると

$$\delta\left(\int_{\gamma(g)} \zeta_0\right) = \int_{\gamma(g)} \Theta(\delta) \qquad \text{for } {}^\forall \delta \in Der_S(\log D)$$

ii) $\delta^1, \cdots, \delta^\mu$ を $Der_S(\log D)$ の $\mathcal{O}_S$-base とすると、S 上 holomorphic な函数 $\Gamma^{jk}_\ell(g)$ $j,k,\ell = 1, \cdots, \mu$ が存在し

$$\delta^j \delta^k\left(\int_{\gamma(g)} \zeta_0\right) + \sum_\ell \Gamma^{jk}_\ell \, \delta^\ell\left(\int_{\gamma(g)} \zeta_0\right) = 0 \qquad \text{for } j,k = 1, \cdots, \mu$$

(但し Γ^{jk}_ℓ は $\gamma(g)$ によらない。)

(この ii)の結果は「或る $\Omega^1_S(\log D)$ $(= Der_S(\log D)^*)$ 上の connection ∇^* があって $\nabla^* d\int_{\gamma(g)} \zeta_0 = 0$ となる」とも言いかえられる。)

ζ_0, Θ, δ^j, Γ^{jk}_ℓ 等もっと具体的に計算できるが、ここでは、これ以上、立ち入らない。例えば、例1においては $f = x^2 + y^2$, とおいた時の原始積分 $\zeta_0 = \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ であり、例2では、$f = 4x^3 - y^2$ に対する原始積分が $\zeta_0 = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$

となる。一般に f が2変数 (i.e. $n=1$) の時、$\varsigma_0 = \dfrac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ となる。

以上の状況の下で、$g=(g_1,\cdots,g_\mu)$ は $u_1=\int_{\gamma_1(g)}\varsigma_0, \cdots, u_\mu=\int_{\gamma_\mu}\varsigma_0$ の automorph 函数として、無限有理函数展開を持つだろうと思われるが、残念ながら、未だ、一般的証明はない。

例へば、u がある数も有理数で近似できるが、その近似有理数の分母の挙動により、近似される数が越超的になったり代数的になったりすると考えられる。一変数函数論の Runge の定理によれば、$\mathbb{C}$の領域で正則な函数は有理函数で近似できる。同様に多変数 $(u_1,\cdots,u_\mu)\in\mathbb{C}^\mu$ の領域でも、正則領域では、有理近似定理が成立する。すなわち、擬凸領域における、レヴィの問題の解は、ある意味で、その領域で正則な函数は、その領域の境界に接する面に極を持つ様な有理型函数で近似できる事を示している。

対応して例1) では $\dfrac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

例2) では $g_2=\dfrac{15}{4}\sum\dfrac{1}{(nu_1+mu_2)^4}$, $g_3=\dfrac{35}{16}\sum\dfrac{1}{(nu_1+mu_2)^6}$

なる有理近似が可能であった。上記の定理の場合も、同様にある無限ルート系 $V\subset H_n(X_*,\mathbb{Z})$ を用いて、Eisenstein 級数

$$E(u_1,\cdots,u_\mu,k)=\sum_{\gamma\in V}(u_\gamma)^{-2k}$$

を考える事ができるが、残念ながら、この級数については、未だよく分らない。

以上の事について、詳しくは、　　論文を準備中なので、それを参照下さい。