数理解析研究所講究録
第 321 巻 1978 年 101-102

$f_* \omega_{M/S}$ の semi-positivity について

東大 教養　藤田 隆夫

$f: M \to S$ を代数多様体の fiber space，$\omega_{M/S}$ をその relative dualizing sheaf $\mathcal{O}_M(K_M - f^*K_S)$ とする。このとき，小平次元の加法不等式予想と関連して (cf. [1]) 次の予想が考えられる：

予想．上の状況の下，$f_*\omega_{M/S}$ は S 上 numerically-semi positive であろう．(以下 n. s. pos. と略記する)

ただしここで n. S. pos. とは次の意味である：

定義．多様体 V 上の line bundle L は，V の任意の部分多様体 W に対して $L^r\{W\} \geq 0$ $(r = \dim W)$ が成立つとき，n. s. pos. と呼ばれる。V 上の連接層 $\mathcal{F}$ は，$\mathbb{P}(\mathcal{F}) = \mathrm{Proj}_V(\bigoplus_{k=0} S^k_{\mathcal{O}_V}\mathcal{F})$ 上の可逆層 $\mathcal{O}(1)$ (に対応する line bundle) が n. s. pos. のとき，n. S. pos. と呼ぶ。

上の予想は，f に特異ファイバーが存在しない場合には事実成立つことが Griffiths により示されている ([3])．

本講の目的は次の部分的結果につき述べることにある：

定理（[2]）．$\dim S=1$ の時には，先の予想が事実成立つ。

以下証明方針を略述する。まず，主に duality 理論に関連する純代数幾何的手法により，次の補題に帰着させる．

補題。定理の条件のもと，$\mathcal{L}$ を $f_*\omega_{M/S}$ の準同型像たる任意の可逆層とする。このとき，$\deg \mathcal{L} \geqq 0$．

補題の証明の方針．L を $\mathcal{L}$ に対応する line bundle とし，Σ を $f: M\to S$ の singular locus とする。$S'=S-\Sigma$ 上の点上の fiber は非特異なので，その上の Hodge 構造を用いて，$L|_{S'}$ 上に自然な Hermitian norm が定義できる。しかしこの norm は Σ には一般には拡張できない。しかしながら，それを Σ の近傍のみで少し変形するテクニックにより，次のような式を得る：$\deg \mathcal{L} = \int_S \omega + \sum_{p\in\Sigma} \sigma_p$．ただしここで ω は $L|_{S'}$ 上の上記 norm に対し定義された曲率テンソル（$\Sigma=\emptyset$ ならこれが L の Chern 類を表わす），積分は広義積分，σ_p は各 $p\in\Sigma$ に対し適当に定義された補正項．さて Griffith 理論により $\int_S \omega \geqq 0$ は示せる。また norm の p 近傍での振舞を調べ，$\sigma_p \geqq 0$ も出る。

［文献］

[1] 筆者，小平次元の理論の過去・現在・未来 （数学）

[2] Fujita, T. : On Kähler fiber spaces over a curve, J. Math. Japan

[3] Griffiths, P : Periods of Integrals III，IHES 38