数理解析研究所講究録
第 321 巻 1978 年 132-160

Studies on Holonomic Quantum Fields
―― 線型微分方程式の変形理論 ――

京大数理研　佐藤 幹夫
三輪 哲二
神保 道夫

§1. Riemannの問題 と Schlesinger方程式

リーマン球面 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上に $n+1$ 個の点 $a_0=\infty,\ a_1, \cdots, a_n$ を取る。$L_\infty, L_1, \cdots, L_n$ を任意の $m\times m$ 行列とする。この時次の問題を考える。

($\#_1$) $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の多価解析函数を成分とする $m\times m$ 行列 $Y(x)$ で，次の性質を満たすものを構成せよ。

i) $x\neq a_0, \cdots, a_n$ では $Y(x)$ は正則で $\det Y(x)\neq 0$

ii) a_ν $(\nu=1,\cdots,n)$ の近傍では $\det \Phi_\nu(a_\nu)\neq 0$ なる正則函数の行列が存在して

$$Y(x)=\Phi_\nu(x)(x-a_\nu)^{-L_\nu}$$

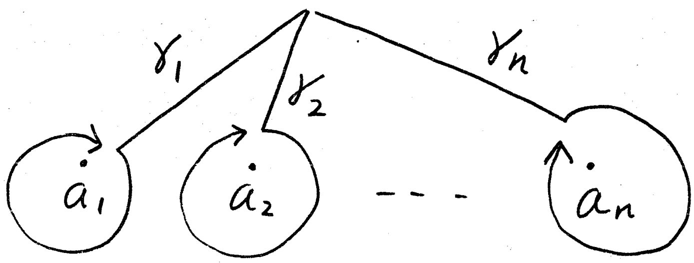
iii) ∞ の近傍では $\det \Phi_\infty(\infty)\neq 0$ なる正則函数の

行列が存在して $\quad Y(x) = \Phi_\infty(x)\, x^{L_\infty}$ //

$(\#_1)$ は常に解を持つわけではない。実際，次のような $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{a_0, \cdots, a_n\}$ の基本群の生成元 γ_ν を取り，γ_ν に沿って $Y(x)$ を解析接続したものを $\gamma_\nu Y(x)$ と表わすならば

$$\gamma_\nu Y(x) = Y(x) M_\nu \qquad M_\nu = e^{2\pi i L_\nu}$$

となる。



この時 $\gamma_1 \cdots \gamma_n = \gamma_\infty$ は ∞ をまわる道であり，

$$\gamma_\infty Y(x) = Y(x) M_\infty \qquad M_\infty = e^{2\pi i L_\infty}$$

となるから，条件として

$$M_1 \cdots M_n M_\infty = e^{2\pi i L_1} \cdots e^{2\pi i L_n} e^{2\pi i L_\infty} = 1$$

が従う。

さらに，$A_\nu = -\Phi_\nu(a_\nu) L_\nu \Phi_\nu(a_\nu)^{-1}$ とおくと $Y(x)$ は次の Fuchs 型方程式を満たしている。

$$\frac{dY(x)}{dx} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{x - a_\nu} Y(x)$$

無限遠での展開から $A_\infty = -\Phi_\infty(\infty) L_\infty \Phi_\infty(\infty)^{-1}$
とした時 $\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu + A_\infty = 0$, 従って
$\mathrm{trace}\left(\sum_{\nu=1}^{n} L_\nu + L_\infty\right) = 0$ となる。(Fuchsの関係式)

以上の二条件を課しても, $(\#_1)$ の解が存在する事は保証されないが, 今ひとつの固定された $(L_1, \cdots, L_n, L_\infty)$ の組に対して, $Y(x)$ が存在したとする。$\Phi_\infty(\infty) = 1$ と正規化すれば, unique になるから, それを $(x, a_1, \cdots, a_n)$ の函数として考えると, 次の線型微分方程式系を満たす。すなわち d を $(x, a_1, \cdots, a_n)$ についての外微分として

$$(\#_2) \qquad dY = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{x-a_\nu} d(x-a_\nu)\right) Y$$

$(\#_2)$ の右辺の係数として現われる 1 formの行列を Ω と書くと

$$0 = d^2 Y = (d\Omega - \Omega \wedge \Omega) Y$$

従って $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$ となる。これは, $(\#_2)$ の可解条件であり, 具体的には A_ν に対する次のような非線型方程式系になる。

$$(\#_3) \qquad dA_\nu = -\sum_{\mu \neq \nu} [A_\nu, A_\mu] \frac{d(a_\nu - a_\mu)}{a_\nu - a_\mu}$$

$(\#_3)$ は $(\#_2)$ の大域的な性質であるモノドロミーを保ったまま，分岐点 $a_1, \cdots, a_n$ を動かした時に，係数行列 $A_1, \cdots, A_n$ の満たすべき関係を与えている。（Schlesinger [1]）

以上を図式的に示すと次のようになる。

$(\#_1)$ 大域的な性質で特徴づけられる函数

⇕

$(\#_2)$ 線型微分方程式系

⇕

$(\#_3)$ 係数に対する可解条件 ---- 非線型方程式

本稿の主題のひとつは，$(\#_1)$ のもうひとつ前に

$(\#_0)$ オペレーター表示

という新しい見方がある事を示す事であり，もうひとつは，上の $(\#_0) \sim (\#_3)$ に対応するものを，2次元 ディラック方程式の解について考えたら何が得られるかを明らかにする事である。

実際には，我々はここに述べた順序とは逆に，物理における2次元格子の問題から出発してここまでたどりついたのであって，それについては [3] を見られたい。

§2. クリフォード群

前節で述べた"オペレーター表示"のオペレーターとは，クリフォード代数 あるいは クリフォード群 の元のことである。この節では有限次元の場合にそれを説明する。

クリフォード群

W を N 次元複素ベクトル空間，$\langle w, w'\rangle$ を W 上の非退化対称な内積とする。

$A(W)$ を $\{w \in W\}$ から生成され，基本関係式 $ww' + w'w = \langle w, w'\rangle$ を持つ 代数 とする。(クリフォード代数。) $A(W)$ の自己同型 ε で $\varepsilon(w) = -w$ $(w \in W)$ となるものが unique に決まる。

$$G(W) = \{ g \in A(W) \mid {}^{\exists}g^{-1} \ gW\varepsilon(g)^{-1} = W \}$$

をクリフォード群 という。

―例― $w \in W$ が $w^2 = \frac{1}{2}\langle w, w\rangle \neq 0$ を満たせば $w^{-1} = \frac{1}{w^2} w$ であり

$$w w' \varepsilon(w)^{-1} = -\frac{1}{w^2}(w w' w) = \frac{-1}{w^2} w(\langle w', w\rangle - ww')$$

$$= \frac{-1}{w^2} w\langle w', w\rangle + w' = w' - \frac{2\langle w', w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

よって $w \in G(W)$ となる。//

$$\begin{array}{cccc} T_g : & W & \longrightarrow & W \\ & \Psi & & \Psi \\ & w & \longmapsto & gw\varepsilon(g)^{-1} \end{array}$$ という線型変換は

W の内積を保つ。すなわち T_g は 直交群 $O(W)$ に属する。さらに次の exact sequence が成り立つ。

$$1 \longrightarrow GL(1, \mathbb{C}) \longrightarrow G(W) \longrightarrow O(W) \rightarrow 1$$

すなわち，$g \in G(W)$ は定数倍を除いて，T_g によって決まる。

<u>ノルム写像</u>

W 上の bilinear form $$\begin{array}{ccc} W \times W & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi \\ (w, w') & \longmapsto & \langle ww' \rangle \end{array}$$
で

$$\langle ww' \rangle + \langle w'w \rangle = \langle w, w' \rangle$$

を満たすものを考える。すると，$A(W)$ から W 上の外積代数 $\Lambda(W)$ へのベクトル空間としての同型が次のように決まる。これをノルム写像という。

$$Nr : A(W) \longrightarrow \Lambda(W)$$

$$Nr(1) = 1$$

$$Nr(w_1 \cdots w_k) = (w_1 + \delta_{w_1}) Nr(w_2 \cdots w_k)$$

但し $\delta_w : \Lambda(W) \longrightarrow \Lambda(W)$ は次式で与えられる。$\delta_w(w_1 \cdots w_l) = \langle w w_1 \rangle w_2 \cdots w_l - \langle w w_2 \rangle w_1 w_3 \cdots w_l + \cdots + (-)^{l-1} \langle w w_l \rangle w_1 \cdots w_{l-1}$

—例—　$N_r(w) = (w + \delta_w) 1 = w$

$$N_r(w_1 w_2) = (w_1 + \delta_{w_1}) w_2 = w_1 w_2 + \langle w_1 w_2 \rangle$$

$$N_r(w_1 w_2 w_3) = (w_1 + \delta_{w_1})(w_2 w_3 + \langle w_2 w_3 \rangle)$$

$$= w_1 w_2 w_3 + \langle w_2 w_3 \rangle w_1 + \delta_{w_1}(w_2 w_3)$$

$$= w_1 w_2 w_3 + \langle w_2 w_3 \rangle w_1 + \langle w_1 w_2 \rangle w_3 - \langle w_1 w_3 \rangle w_2 \quad //$$

期待値

$a \in A(W)$ に対して $N_r(a)$ の定数項 ($\Lambda(W) = \mathbb{C} \oplus W \oplus \Lambda^2(W) \oplus \cdots$ である事に注意) を期待値といい $\langle a \rangle$ と書く。w と w' ($w, w' \in W$) の $A(W)$ における積 $w w'$ の期待値は，始めに与えた bilinear form の値 $\langle w w' \rangle$ に等しい。

—例—

$$\langle w_1 w_2 w_3 w_4 \rangle = \langle w_1 w_2 \rangle \langle w_3 w_4 \rangle - \langle w_1 w_3 \rangle \langle w_2 w_4 \rangle + \langle w_1 w_4 \rangle \langle w_2 w_3 \rangle$$

$$Nr(g_1) = w_1 w_2 \ , \ Nr(g_2) = w_3 w_4$$ の時

$$\langle g_1 g_2 \rangle = \langle (w_1 w_2 - \langle w_1 w_2 \rangle)(w_3 w_4 - \langle w_3 w_4 \rangle) \rangle$$
$$= -\langle w_1 w_3 \rangle \langle w_2 w_4 \rangle + \langle w_1 w_4 \rangle \langle w_2 w_3 \rangle$$

このように，オペレーターのノルムを，Wの元を使って表わしておけば，積の期待値は　2個ずつの積の期待値の適当な積の和になる。後に，もっと一般的な場合の公式を，示す。//

<u>T_gから $Nr(g)$ を求める公式</u>

$g \in A(W)$が $G(W)$のザリスキ閉包に含まれるための必要十分条件は　$Nr(g)$ が次の形をしている事である。

$$Nr(g) = c\, w_1 \cdots w_k \exp(\rho/2)$$
$$c \in \mathbb{C},\ w_1, \cdots, w_k \in W,\ \rho \in \Lambda^2(W)$$

$k=0$　の場合に，T_gから　ρを求める公式を与えよう。Wの基底を $v_1, ---, v_N$　とする。内積，及び　期待値の表を

$$J = (\langle v_j, v_k \rangle)_{j,k=1,\cdots,N}$$

$$K = (\langle v_j v_k \rangle)_{j,k=1,\cdots,N}$$

とする。$K + {}^tK = J$　である。

直交変換 T_g の行列表示を T とする。すなわち

$$(gv_1, \cdots, gv_N) = (v_1 g, \cdots, v_N g)\, T$$

ここで $k=$ 偶数 (or 奇数) の時 $\varepsilon(g) = g$ (or $-g$) となる事に注意。

$\Lambda^2(W)$ の元 P を $P = \sum_{j,k=1}^{N} R_{jk} v_j v_k$ とする。

$\boxed{\text{公式 I}}$ $$R({}^tKT + K) = T - 1$$

<u>積の公式</u>

$Nr(g_1), \cdots, Nr(g_n)$ から $Nr(g_1 \cdots g_n)$ を求める公式を挙げる。

$\boxed{\text{公式 II}}$ $Nr(g) = w_1 \cdots w_k \exp(P/2)$, $w = \sum_{j=1}^{N} v_j c_j$

$$\Rightarrow Nr(wg) = \Big(\sum_{j=1}^{k} (-)^{j-1} w_1 \cdots w_{j-1} \langle w\, w_j \rangle w_{j+1} \cdots w_k$$

$$+ w^{(1)} w_1 \cdots w_k \Big) \exp(P/2)$$

但し $w^{(1)} = \sum_{j,k=1}^{N} v_j (1 - R\,{}^tK)_{jk} c_k$

$\boxed{\text{公式 III}}$ $Nr(g_\mu) = \exp(P^{(\mu)}/2)$, $P^{(\mu)} = \sum_{j,k=1}^{N} R^{(\mu)}_{jk} v_j v_k$

$(\mu = 1, \cdots, n)$

$$R = \begin{pmatrix} R^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & R^{(n)} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & K & \cdots & K \\ -{}^tK & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & K \\ -{}^tK & \cdots & -{}^tK & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \langle g_1 \cdots g_n \rangle = \left(\det(1 - AR) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\langle g_1 \cdots g_n \rangle \neq 0$ ならば

$$Nr(g_1 \cdots g_n) = \langle g_1 \cdots g_n \rangle \exp(\hat{P}/2)$$

$$\hat{P} = \sum_{j,k=1}^{N} \hat{R}_{jk} v_j v_k \ , \quad \hat{R} = \sum^{n^2} (1 - RA)^{-1} R$$

公式Ⅲ の最後の $\sum^{n^2}$ の意味は，$(1-RA)^{-1}R$ の n^2個 の *block* の和を取れという事である。実は，次のように拡張して考えた方が自然である。

$W^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ を W の n個の copy とし，$w \in W$ を $W^{(\nu)}$の元と考えた時 $w^{(\nu)}$ と書く。直和 $\hat{W} = W^{(1)} \oplus \cdots \oplus W^{(n)}$ に 内積を

$$\langle w_1^{(\mu)}, w_2^{(\nu)} \rangle_\Lambda = \lambda_{\mu\nu} \langle w_1, w_2 \rangle$$

と定義する。ここで $\Lambda = (\lambda_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\cdots,n}$ は $n \times n$ 対称行列で $\lambda_{\mu\mu} = 1$ とする。すなわち Λ をパラメタとする n倍 の大きな空間を考える。$g_\nu \in G(W)$ を $g_\nu \in G(W^{(\nu)})$ と考えて，その上で積 $g_1 \cdots g_n$ を考える。この時，結果は

$\boxed{\text{公式 III}'}$

$$A(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12}K & \cdots & \lambda_{1n}K \\ -\lambda_{21}{}^tK & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_{n-1\,n}K \\ -\lambda_{n1}{}^tK & \cdots & -\lambda_{nn-1}{}^tK & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle g_1 \cdots g_n \rangle_\Lambda = (\det(1 - A(\Lambda)R))^{\frac{1}{2}}$$

$\langle g_1 \cdots g_n \rangle_\Lambda \neq 0$ ならば

$$Nr_\Lambda(g_1 \cdots g_n) = \langle g_1 \cdots g_n \rangle_\Lambda \exp(\hat{\rho}(\Lambda)/2)$$

$$\hat{\rho}(\Lambda) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{N} \hat{R}_{\mu\nu,jk}\, v_j^{(\mu)} v_k^{(\nu)}$$

$$\hat{R} = (1 - RA(\Lambda))^{-1} R$$

但し $\langle w_1^{(\mu)} w_2^{(\nu)} \rangle_\Lambda = \lambda_{\mu\nu} \langle w_1 w_2 \rangle$ とし, Nr_Λ は対応するノルム写像とする。 $\lambda_{\mu\nu} = 1$ $(\mu, \nu = 1, \cdots, n)$ とすれば, 公式 III になる。

§3 1次元理論

基底ベクトル $v_1, \cdots, v_N$ に対応するものとして

$$\varphi^{(j)}(x) \qquad j = 1, \cdots, m \qquad x \in \mathbb{R}^1$$

を考える。内積とノルムを決める *bilinear form* を次のように与える。

$$J: \langle \psi^{(j)}(x), \psi^{(k)}(x') \rangle = \delta_{jk}\,\delta(x-x')$$

$$K: \langle \psi^{(j)}(x)\,\psi^{(k)}(x') \rangle = \delta_{jk}\frac{1}{2\pi}\,\frac{i}{x-x'+i0}$$

$$^tK: \langle \psi^{(k)}(x')\,\psi^{(j)}(x) \rangle = \delta_{jk}\frac{1}{2\pi}\,\frac{-i}{x-x'-i0}$$

L を $m\times m$ 反対称行列とし $M = e^{2\pi i L}$ とおく。この時 $^tMM = 1$ となる。次のような交換関係を満たすオペレーター $\varphi(a;L)$ $(a\in\mathbb{R}^1)$を作る。

$$(\varphi(a)\psi^{(1)}(x), \cdots, \varphi(a)\psi^{(n)}(x))$$

$$= \begin{cases} (\psi^{(1)}(x)\varphi(a), \cdots, \psi^{(n)}(x)\varphi(a)) & x>a \\ (\psi^{(1)}(x)\varphi(a), \cdots, \psi^{(n)}(x)\varphi(a))\,M & x<a \end{cases}$$

答は $\quad Nr(\varphi(a;L)) = \exp(\rho(a;L)/2)$

$$\rho(a;L) = \sum_{j,k=1}^{m}\iint dx\,dx'\,R_{jk}(x-a, x'-a;L)\,\psi^{(j)}(x)\,\psi^{(k)}(x')$$

$$R(x,x';L) = ((x+i0)^L-(x-i0)^L)(K(x,x')(x'-i0)^{-L} + {}^tK(x,x')(x'+i0)^{-L})$$

$$= ((x+i0)^L K(x,x') + (x-i0)^L\,{}^tK(x,x'))((x'-i0)^{-L}-(x'+i0)^{-L})$$

$$= x_-^L\,(K(x,x')(M-1) + {}^tK(x,x')(1-M^{-1}))\,x_-'^{-L}$$

但し $x_- = \begin{cases} 0 & x>0 \\ |x| & x<0 \end{cases}$ である。

但し　$K(x,x') = \frac{1}{2\pi}\frac{i}{x-x'+i0}$　,　${}^tK(x,x') = \frac{1}{2\pi}\frac{-i}{x-x'-i0}$

であり，これらは，積分変換の核として見ると，それぞれ上半平面，下半平面での正則函数の境界値 への射影作用素となる。例えば，$L^2(\mathbb{R}^1)$ で考えれば，Hilbert 変換の有界性から，これらも有界作用素となる。

<u>証明</u>　$Y_\pm = (x \pm i0)^{-L}$　とおくと

$Y_- = Y_+ T$　,　$R = (Y_+^{-1} - Y_-^{-1})(KY_- + {}^tKY_+)$

上の注意から　${}^tKY_+^{\pm 1}K = 0$　,　$KY_-^{\pm}{}^tK = 0$ である。よって

$$\begin{aligned} R({}^tKT + K) &= (Y_+^{-1} - Y_-^{-1})(KY_- + {}^tKY_+)({}^tKT + K) \\ &= (Y_+^{-1} - Y_-^{-1})(KY_-K + {}^tKY_+{}^tKT) \\ &= (Y_+^{-1} - Y_-^{-1})(KY_- + {}^tKY_+T) \\ &= (Y_+^{-1} - Y_-^{-1})Y_- \\ &= T - 1 \quad // \end{aligned}$$

Mを与えても，上記の交換関係 を満たすようなオペレーターは unique ではなく，$e^{2\pi iL} = M$ となる L の取り方だけの任意性がある事を注意しておく。（Mを直交行列，Lを反対称行列としたのは，説明の簡易化のためであって§4でもわかるように，この制限は不要である。）

(♯₀) オペレーター表示

(♯₁) の解が，オペレーターの積の期待値によって構成できる事を示そう。$a_1, \cdots, a_n$ は実軸上に $a_1 < \cdots < a_n$ の順で並んでいるとする。

$$Y_+(x_0, x; a_1, \cdots, a_n)_{jk} = \frac{-2\pi i(x_0 - x)\langle \psi^{(j)}(x_0)\psi^{(k)}(x)\varphi(a_1; L_1)\cdots\varphi(a_n; L_n)\rangle}{\langle \varphi(a_1; L_1)\ \cdots\ \varphi(a_n; L_n)\rangle}$$

$$Y_-(x_0, x; a_1, \cdots, a_n)_{jk} = \frac{-2\pi i(x_0 - x)\langle \psi^{(j)}(x_0)\varphi(a_1; L_1)\cdots\varphi(a_n; L_n)\psi^{(k)}(x)\rangle}{\langle \varphi(a_1; L_1)\ \cdots\ \varphi(a_n; L_n)\rangle}$$

を考えよう。

$\psi^{(j)}(x_0)$, $\psi^{(k)}(x)$, $\varphi(a_\nu; L_\nu)$ などは $x_0, x, a_1, \cdots, a_n$ が実でないと意味を持たないが，期待値を取って得られる函数は解析接続して考えてよい。

まず主として x についての解析接続を考える事として $Y_\pm(x) = \left(Y_\pm(x_0, x; a_1, \cdots, a_n)_{jk}\right)_{j,k=1,\cdots,m}$ と書こう。

$Y_\pm(x)$ は $\mathrm{Im}\, x \gtrless 0$ で正則

証明

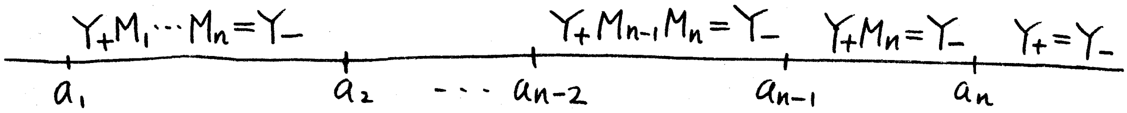
$Y_+(x)$ の x は，P8で注意したように，$\psi^{(j)}(x_0)$ と $\psi^{(k)}(x)$ の積の期待値，あるいは $\psi^{(k)}(x)$ と $\varphi(a_\nu; L_\nu)$ を構成する $\psi^{(l)}(x')$ との積の期待値，という形で含まれる。

$\langle \psi^{(j)}(x_0)\psi^{(k)}(x)\rangle = \delta_{jk}\frac{1}{2\pi}\frac{i}{x_0-x+i0}$ の特異性は，x_0-x をかけて消してある。$\langle \psi^{(k)}(x)\psi^{(l)}(x')\rangle = \delta_{kl}\frac{1}{2\pi}\frac{i}{x-x'+i0}$ の特異性は $\mathrm{Im}\, x > 0$ には存在しない。よって $Y_+(x)$ は $\mathrm{Im}\, x > 0$ で正則。$Y_-(x)$ も同様である。//

さて，$x > a_n$ とすると P12 の交換関係から，

$$\psi^{(k)}(x)\varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n) = \varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\psi^{(k)}(x)$$

よって特に $Y_+(x) = Y_-(x)$ である。これから $Y_\pm(x)$ により $\mathbb{C}-(-\infty, a_n)$ で正則な函数が定義される事がわかる。さらに，$a_1, \cdots, a_n$ で区切られた各 branch cut の上で P12 の交換関係を使って，$Y_\pm(x)$ の値を比べると



となる。これから $Y(x)$ が期待されたモノドロミー性質

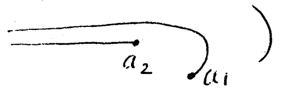
$$\gamma_\nu Y(x) = Y(x) M_\nu \qquad (\nu = 1, \cdots, n)$$

を持つ事がわかる。

公式Ⅱ，Ⅲを適用して精密な議論をしてみよう。まず公式Ⅲで $R^{(\nu)}$ として $\left(R(x-a, x'-a; L_\nu)_{jk}\right)_{\substack{x,x'\in\mathbb{R}^1\\ j,k=1,\cdots,m}}$

を取った時 $(1-RA)^{-1}$ が L^2 の有界作用素として意味づけられる事を示す。但し，仮定として，L_ν は skew-hermitian で充分 0 に近いとする。

$a_1, \cdots, a_n$ を $\mathrm{Im}\, a_1 > \cdots > \mathrm{Im}\, a_n$ と取る。*
半直線 $\{x \mid \mathrm{Im}(x-a)=0,\ \mathrm{Re}(x-a)<0\}$ 上の m成分の L^2 函数全体の作る Hilbert space を H_ν とする。
Fourier変換して容易にわかるように $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\pm i}{x-x'\pm i0}$ は $H_\nu \longrightarrow H_\mu$ の作用素の核と考えて，有界な作用素を定義する。一方 L_ν を skew-hermitian と仮定したから掛け算作用素として $(x-a_\nu)_-^{\pm L_\nu}$ も有界である。従って R および A は直和 $\bigoplus_{\nu=1}^{n} H_\nu$ における有界作用素となる。さらに L_ν が 0 に近い時，P12 の最後の式から明らかなように，R の作用素ノルムは小さい。よって $(1-RA)^{-1}$ は $\bigoplus_{\nu=1}^{n} H_\nu$ における有界作用素となる。（* この仮定は，積分路を引っ張りつつ $a_1, \cdots, a_n$ を動かせば，不要である。例



）

次に $((1-RA)^{-1}-1)_{\mu\nu} : H_\nu \longrightarrow H_\mu$ の核函数が H_ν の変数について，a_ν で正則である事を示す。すなわち

$$R_\mu A_{\mu\nu}(x_1, x_2)$$
$$+\sum_{\kappa,\lambda=1}^{n}\iint dx\,dx'\, R_\mu A_{\mu\kappa}(x_1, x)\,(1-RA)^{-1}_{\kappa\lambda}(x, x')\,R_\lambda A_{\lambda\nu}(x', x_2)$$

を考える。才1項は，${}^tK\,Y_+^{\pm 1}K = 0$，$K\,Y_-^{\pm 1}\,{}^tK = 0$ 故

$\mu < \nu$ ならば

$$R_\mu K(x_1, x_2) = \left((x_1 - a_\mu + i0)^L - (x_1 - a_\mu - i0)^L\right) K(x_1, x_2)(x_2 - a_\mu - i0)^{-L}$$

$\mu = \nu$ ならば　0

$\mu > \nu$ ならば

$$-R_\mu {}^tK(x_1, x_2) = -\left((x_1 - a_\mu + i0)^L - (x_1 - a_\mu - i0)^L\right) {}^tK(x_1, x_2)(x_2 - a_\mu + i0)^{-L}$$

となり，いずれも　$x_2 = a_\nu$　で正則である。

　また　$R_\mu A_{\mu\kappa}(x_1, x)$ は　x を変数として H_κ に，$R_\lambda A_{\lambda\nu}(x', x_2)$ は　x' を変数として　H_λ に属する。この事は $x_2 = a_\nu$ としても正しい。よって才2項も $x_2 = a_\nu$ で正則となる。

　次に　公式Ⅱを適用して　$\dfrac{\langle \psi^{(j)}(x_0)\psi^{(k)}(x)\varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle}{\langle \varphi(a_1;L_1)\cdots\varphi(a_n;L_n)\rangle}$
を計算すると

$$\left(K - \sum_{\mu,\nu=1}^{n} K(1-RA)^{-1}_{\mu\nu} R_\nu {}^tK\right)(x_0, x)$$

を得る。このうち才2項については，上と同じ論法で有限な値を得る。これから直ちに，$\Upsilon(x_0, x_0; a_1, \cdots, a_n) = 1$ がわかる。

　$(1-RA)^{-1}_{\mu\nu}(x_1, x_2)$ が　$x_2 = a_\nu$ で正則な事から，x_2 についての積分路を a_ν のまわりで変化させて計算すると

$$-K(1-RA)^{-1}_{\mu\nu} R_\nu {}^tK(x_0, x)$$

$$= -\iint dx_1 dx_2\, K(x_0,x_1)(1-RA)^{-1}_{\mu\nu}(x_1,x_2)(x_2-a_\nu+i0)^{L_\nu}\,{}^tK(x_2,x)(x-a_\nu+i0)^{-L_\nu}$$

$$+\iint dx_1 dx_2\, K(x_0,x_1)(1-RA)^{-1}_{\mu\nu}(x_1,x_2)(x_2-a_\nu-i0)^{L_\nu}\,{}^tK(x_2,x)(x-a_\nu+i0)^{-L_\nu}$$

$$= \Big\{\iint dx_1 dx_2\, K(x_0,x_1)(1-RA)^{-1}_{\mu\nu}(x_1,x_2)$$

$$\times\big((x_2-a_\nu+i0)^{L_\nu}K(x_2,x)+(x_2-a_\nu-i0)^{L_\nu}\,{}^tK(x_2,x)\big)\Big\}(x-a_\nu+i0)^{-L_\nu}$$

$$-\int dx_1\, K(x_0,x_1)(1-RA)^{-1}_{\mu\nu}(x_1,x)$$ (下の図参照)*

ここで第1項の{ }の中は $x=a_\nu$ で正則，第2項も $x=a_\nu$ で正則となる。以上から $Y(x_0,x;a_1,\cdots,a_n)$ の $x=a_\nu$ における特異部分は

$$\Phi_\nu(x_0,x;a_1,\cdots,a_n)\,(x-a_\nu+i0)^{-L_\nu}$$

となる。但し

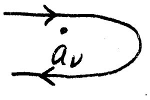
$$\Phi_\nu(x_0,x;a_1,\cdots,a_n) = -2\pi i(x_0-x)\sum_{\mu=1}^{n}\iint dx_1 dx_2$$

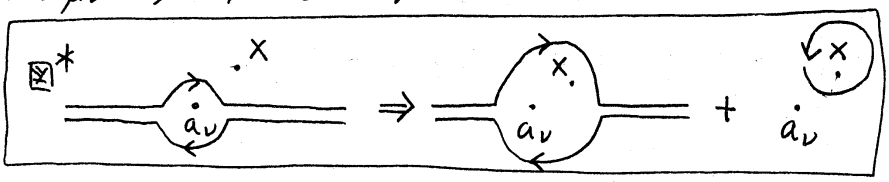
$$K(x_0,x_1)(1-RA)^{-1}_{\mu\nu}(x_1,x_2)\{(x_2-a_\nu+i0)^{L_\nu}K(x_2,x)+(x_2-a_\nu-i0)^{L_\nu}\,{}^tK(x_2,x)\}$$

となる。特に

$$\Phi_\nu(x_0,a_\nu;a_1,\cdots,a_n) = (x_0-a_\nu)\sum_{\mu=1}^{n}\int dx_1\, K(x_0,x_1)$$

$$\times\int dx_2\,(1-RA)^{-1}_{\mu\nu}(x_1,x_2)(x_2-a_\nu)^{L_\nu-1}$$





注意 以上の計算では，x の変域を $\mathbb{C}$ から branch cuts $\bigcup_{\nu=1}\{x \mid \mathrm{Im}(x-a_\nu)=0,\ \mathrm{Re}(x-a_\nu)<0\}$ を除いた領域としている。x の変域がこの領域の時は，x_1 をいずれかの cut 上の積分変数として，$K(x_1,x)$ と $-{}^tK(x_1,x)$ は同一視して

構わない。

次に $Y(x_0, x; a_1, \cdots, a_n)$ の $x = a_\nu$ における正則部分が全体として消し合う事を見ておこう。

$-\sum_{\kappa=1}^{n} K(1-RA)^{-1}_{\mu\kappa} R_\kappa {}^tK$ の正則部分は

$$-\sum_{\kappa\neq\nu} K(1-RA)^{-1}_{\mu\kappa} R_\kappa {}^tK - K(1-RA)^{-1}_{\mu\nu}$$

$$= -\sum_{\kappa\neq\nu} K(1-RA)^{-1}_{\mu\kappa} R_\kappa {}^tK - K\delta_{\mu\nu} - \sum_{\kappa\neq\nu} K(1-RA)^{-1}_{\mu\kappa} R_\kappa A_{\kappa\nu}$$

ここで上の注意により ${}^tK + A_{\kappa\nu} = 0$ となるから

$K - \sum_{\mu,\kappa=1}^{n} K(1-RA)^{-1}_{\mu\kappa} R_\kappa {}^tK$ の正則部分は

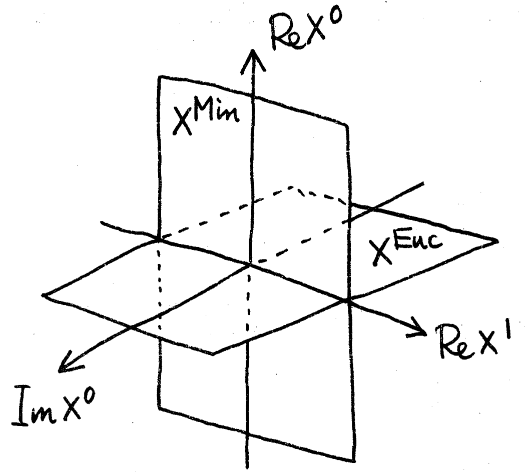
$K - \sum_{\mu=1}^{n} K\delta_{\mu\nu} = 0$ となる。

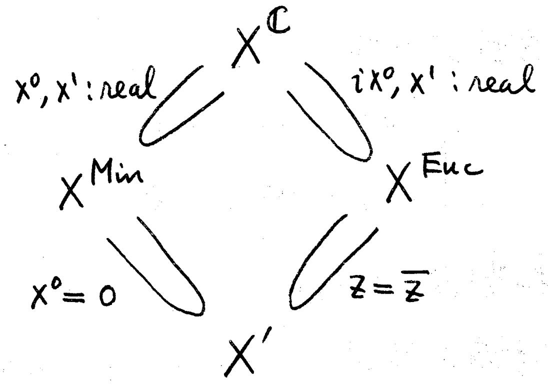
以上で $(\#_1)$ で要求した性質の主要部分を検証した。実は，L_∞ が，$e^{2\pi i L_1} \cdots e^{2\pi i L_n} e^{2\pi i L_\infty} = 1$ から unique に決まる，0に近い行列（これは skew-hermitian とは限らない。）になって，i) ～ iii) のすべてが満たされるのであるが，その証明は省略する。

§4　2次元理論

$X^{\mathbb{C}} = \{(x^0, x^1) \mid x^0, x^1 \in \mathbb{C}\}$ を複素2次元平面とする。$X^{\mathbb{C}}$ の中の $\mathrm{Re}\, x^0$ と $\mathrm{Re}\, x^1$ で張られた実2次元平面を，X^{Min}（2次元ミンコフスキー空間）と書き，その上の座標

としては $X^{\pm}=(X^0\pm X^1)/2$ を使う。$X^{\mathbb{C}}$の中の$\mathrm{Im}X^0$と$\mathrm{Im}X^1$で張られた実2次元平面をX^{Euc}（2次元ユークリッド空間）と書き，その上の座標としては $z=-X^-$, $\bar{z}=X^+$ を使う。$X'=X^{Min}\cap X^{Euc}$ と書こう。





mを正の定数として，2次元ディラック方程式

$$\begin{pmatrix} m & \partial_- \\ -\partial_+ & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_+(x) \\ w_-(x) \end{pmatrix}=0 \quad \left(但し\ \partial_\pm=\frac{\partial}{\partial x^\pm}\right)$$

を考えよう。解をFourier表示すれば，

$$w_\pm(x)=\int \underline{du}\ \sqrt{0+iu}^{\,\pm 1}\, e^{-im(x^-u+x^+u^{-1})}\, w(u)$$

となる。ここで $u\in GL(1,\mathbb{R})$, $\underline{du}=du/2\pi|u|$ である。また $\sqrt{0+iu}^{\,\pm1}=\begin{cases} e^{\pm\frac{\pi}{4}i}|u|^{\pm\frac{1}{2}} & (u>0) \\ e^{\mp\frac{\pi}{4}i}|u|^{\pm\frac{1}{2}} & (u<0)\end{cases}$ である。

さて，基底ベクトルとして $(\psi(u))_{u\in GL(1,\mathbb{R})}$ を取り，内積と期待値の表を次のようにする。

$$\langle \psi(u), \psi(u') \rangle = 2\pi |u| \delta(u+u')$$
$$\langle \psi(u)\psi(u') \rangle = 2\pi u_+ \delta(u+u')$$

次に

$$\psi_\pm(x) = \int \frac{du}{u} \sqrt{0+iu}^{\pm 1} e^{-im(x^- u + x^+ u^{-1})} \psi(u)$$

を考えると，$(\psi_\pm(x))_{x \in X^{Min}}$ は独立ではなく，ディラック方程式を満たす。

$$\begin{pmatrix} m & \partial_- \\ -\partial_+ & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+(x) \\ \psi_-(x) \end{pmatrix} = 0$$

初期値 $(\psi_\pm(x))_{x \in X'}$ が，基底ベクトルとなる。内積と期待値の表は $(\psi_\pm(x))_{x \in X^{Min}}$ に対して

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_+(x), \psi_+(x') \rangle & \langle \psi_+(x), \psi_-(x') \rangle \\ \langle \psi_-(x), \psi_+(x') \rangle & \langle \psi_-(x), \psi_-(x') \rangle \end{pmatrix} = \frac{2}{m} D(x-x'; m)$$

但し $\begin{pmatrix} m & \partial_- \\ -\partial_+ & m \end{pmatrix} D(x; m) = 0$, $D(0, x'; m) = \begin{pmatrix} \delta(x') & \\ & \delta(x') \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_+(x) \psi_+(x') \rangle & \langle \psi_+(x) \psi_-(x') \rangle \\ \langle \psi_-(x) \psi_+(x') \rangle & \langle \psi_-(x) \psi_-(x') \rangle \end{pmatrix}$$
$$= \frac{i}{m\pi} \begin{pmatrix} \partial_- & m \\ -m & \partial_+ \end{pmatrix} K_0\left(2m\sqrt{(x^+ - x'^+ - i0)(-x^- + x'^- + i0)}\right)$$

となる。

理論の適用範囲を拡げるために次のようにする。$\mathbb{C}^2$ の基底 e, e^* を取り内積を

$$\begin{pmatrix} \langle e,e\rangle & \langle e,e^*\rangle \\ \langle e^*,e\rangle & \langle e^*,e^*\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ と定義する。上で

定義した $(\psi(u))_{u\in GL(1,\mathbb{R})}$ あるいは $(\psi_\pm(x))_{x\in X^{Min}}$ の張るベクトル空間と $\mathbb{C}^2$ とのテンソル積を考え，そこにおけるベクトルを次のように表わす。

$$\psi(u)\otimes e \longrightarrow \psi(u)$$
$$\psi(u)\otimes e^* \longrightarrow \psi^*(u)$$
$$\psi_\pm(x)\otimes e \longrightarrow \psi_\pm(x)$$
$$\psi_\pm(x)\otimes e^* \longrightarrow \psi_\pm^*(x)$$

これらのベクトルの間の内積，期待値は次のように計算（定義）される。

$$\begin{aligned}\langle\psi(u),\psi^*(u')\rangle &= \langle\psi(u)\otimes e,\ \psi(u')\otimes e^*\rangle \\ &= \langle\psi(u),\psi(u')\rangle\langle e,e^*\rangle \\ &= 2\pi|u|\,\delta(u+u')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\psi(u)\psi^*(u')\rangle &= \langle(\psi(u)\otimes e)(\psi(u')\otimes e^*)\rangle \\ &= \langle\psi(u)\psi(u')\rangle\langle e,e^*\rangle \\ &= 2\pi u_+\,\delta(u+u')\end{aligned}$$

etc.

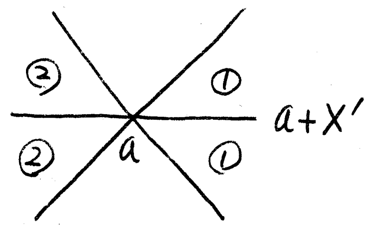
次のような交換関係を満たすオペレーター $\varphi_F(a;\ell)$ を構成しよう。$(\ell\in\mathbb{C}-\mathbb{Z})$

$$\varphi_F(a;l)\psi_\pm(x) = \begin{cases} \psi_\pm(x)\varphi_F(a;l) & x^+ > a^+,\ x^- < a^- \\ e^{2\pi i l}\psi_\pm(x)\varphi_F(a;l) & x^+ < a^+,\ x^- > a^- \end{cases}$$

$$\varphi_F(a;l)\psi^*_\pm(x) = \begin{cases} \psi^*_\pm(x)\varphi_F(a;l) & x^+ > a^+,\ x^- < a^- \\ e^{-2\pi i l}\psi^*_\pm(x)\varphi_F(a;l) & x^+ < a^+,\ x^- > a^- \end{cases}$$

これは言い換えると，基底ベクトル $(\psi_\pm(x),\ \psi^*_\pm(x))_{x\in a+X'}$ を a の右側で $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ a の左側で $\begin{pmatrix} e^{2\pi i l} & \\ & e^{-2\pi i l} \end{pmatrix}$ と直交回転する事に当たる。

X^{Min}



① $\Longleftrightarrow$ $x^+ > a^+,\ x^- < a^-$

② $\Longleftrightarrow$ $x^+ < a^+,\ x^- > a^-$

この時 ① および ② の領域における交換関係は，$\psi_\pm(x)$ がディラック方程式を満たす事から上の形に決まってしまう。（波動方程式の初期値の影響領域。）

<u>注意</u>　$\psi_\pm(x)$ と $\psi^*_\pm(x)$ の両方を導入した理由は，上の交換関係が内積を不変にする変換を定義するようにしたかったからであり，$l = \frac{1}{2}$ の時は，$\psi_\pm(x)$ だけで理論を展開する事ができる．オンサーガー理論 [2] から出発した場合にはそのようなオペレーターが得られ，それがそもそもの我々の出発点であった。

$\varphi_F(a;\ell)$ のノルムは次のようになる。

$$\mathrm{Nr}(\varphi_F(a;\ell)) = \exp(\rho(a;\ell)/2)$$

$$\rho(a;\ell) = \iint \underline{du}\,\underline{du'}\left[R_\ell(u,u')\psi(u)\psi^*(u') + R_{-\ell}(u,u')\psi^*(u)\psi(u')\right] e^{-im(a^-(u+u')+a^+(u^{-1}+u'^{-1}))}$$

但し $R_\ell(u,u') = 2\sin\pi\ell\left(\dfrac{u-i0}{u'-i0}\right)^{-\ell}\dfrac{i}{u+u'-i0}\sqrt{u-i0}\sqrt{u'-i0}$

これは次の手順で得られる。1次元理論で

$\psi(u) = \int dx\sqrt{0-iu}\;e^{-ixu}\psi(x)$ と定義すると

$(\psi(u))_{u\in GL(1,\mathbb{R})}$ はP21の始めに書かれた交換関係を満たす。この $\psi(u)$ を使ってP12の $\rho(a;L)$ (但し $m=1$, $L=\ell$) を表わすと，初等的な Fourier 変換の計算により

$$\rho(a;\ell) = \iint \underline{du}\,\underline{du'}\;2\sin\pi\ell\left(\frac{u-i0}{u'-i0}\right)^{-\ell}\frac{i}{u+u'-i0} \times\sqrt{u-i0}\sqrt{u'-i0}\;e^{ia(u+u')}\psi(u)\psi(u')$$

を得る。これを修正して上の式が得られる。こうして得られたオペレーターが，P23の交換関係を満たす事は，公式IIを使って検証できるが，詳細は略す。

ディラック方程式の解で，与えられた大域的モノドロミーを持つものを作ろう。但し，(#₂)や(#₃)に対応する理論

が作れる場合に限定する。

公式III′

P10におけるように，パラメーター Λ と n 個の copy $\psi^{(\nu)}, \psi^{(\nu)*}$ $(\nu=1,\cdots,n)$ を用意し，$\varphi_F(a_\nu;l_\nu)$ は $\psi^{(\nu)}(u)$ と $\psi^{*(\nu)}(u)$ とだけから構成されているとしよう。この時，$\varphi_F(a_\nu;l_\nu)$ と $\psi^{(\nu)}_\pm(x)$，$\psi^{*(\nu)}_\pm(x)$ との交換関係は P23 におけるそれと同じであるが，さらに

$$\varphi_F(a_\nu;l_\nu)\left(\psi^{(\mu)}_\pm(x)-\lambda_{\mu\nu}\psi^{(\nu)}_\pm(x)\right)=\left(\psi^{(\mu)}_\pm(x)-\lambda_{\mu\nu}\psi^{(\nu)}_\pm(x)\right)\varphi_F(a_\nu;l_\nu)$$
$$\varphi_F(a_\nu;l_\nu)\left(\psi^{*(\mu)}_\pm(x)-\lambda_{\mu\nu}\psi^{*(\nu)}_\pm(x)\right)=\left(\psi^{*(\mu)}_\pm(x)-\lambda_{\mu\nu}\psi^{*(\nu)}(x)\right)\varphi_F(a_\nu;l_\nu)$$

が成り立つ。

$z_0, z, a_1, \cdots, a_n \in X'$ として

$$\langle \psi^{*(\mu)}_\varepsilon(z_0)\,\psi^{(\nu)}_{\varepsilon'}(z)\,\varphi_F(a_1;l_1)\cdots\varphi_F(a_n;l_n)\rangle_\Lambda \quad (\varepsilon,\varepsilon'=\pm)$$

を考え，これを $z_0, z, a_1, \cdots, a_n$ について X^{Euc} に解析接続すると，1次元理論と同様に多価函数を得る。公式IIを使って計算すると，$z_0\sim a_\nu$ において

$$\begin{bmatrix}\langle \psi^{*(\nu)}_+(z_0)\,\psi^{(\mu)}_{\varepsilon'}(z)\,\varphi_F(a_1;l_1)\cdots\varphi_F(a_n;l_n)\rangle_\Lambda\\ \langle \psi^{*(\ )}_-(z_0)\,\psi^{(\ )}_{\varepsilon'}(z)\,\varphi_F(a_1;l_1)\cdots\varphi_F(a_n;l_n)\rangle_\Lambda\end{bmatrix}$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}C^{(\mu)}_{j,\varepsilon',\nu}\,w_{l_\mu+\frac12+j}[a_\nu]+\sum_{j=0}^{\infty}C^{*(\mu)}_{j,\varepsilon',\nu}\,w^*_{-l_\mu+\frac12+j}[a_\nu]$$

という展開を得る。但し

$$w_\ell[a] = \begin{pmatrix} e^{(\ell-\frac{1}{2})i\theta} I_{\ell-\frac{1}{2}}(mr) \\ e^{(\ell+\frac{1}{2})i\theta} I_{\ell+\frac{1}{2}}(mr) \end{pmatrix}, \quad w_\ell^*[a] = \begin{pmatrix} e^{-(\ell+\frac{1}{2})i\theta} I_{\ell+\frac{1}{2}}(mr) \\ e^{-(\ell-\frac{1}{2})i\theta} I_{\ell-\frac{1}{2}}(mr) \end{pmatrix}$$

$\left(\frac{r}{2}e^{i\theta} = z_0 - a\right)$ である。

また $C^{(\mu)}_{j,\varepsilon',\nu}$ $C^{*(\mu)}_{j,\varepsilon',\nu}$ は $(z; a_1, \cdots, a_n)$ の函数であるが，$\begin{pmatrix} C^{(\mu)}_{0,+,\nu} \\ C^{(\mu)}_{0,-,\nu} \end{pmatrix}$ を $w^{(\mu)}_{F,\nu}(z; a_1, \cdots, a_n; \Lambda)$ あるいは簡単に $w^{(\mu)}_{F,\nu}(\Lambda)$ と書くと，$w_{F,\nu}(\Lambda) = (w^{(1)}_{F,\nu}(\Lambda), \cdots, w^{(n)}_{F,\nu}(\Lambda))$ は次の性質を満たす。

i) $(\gamma_\mu w^{(1)}_{F,\nu}(\Lambda), \cdots, \gamma_\mu w^{(n)}_{F,\nu}(\Lambda))$

$= (w^{(1)}_{F,\nu}(\Lambda), \cdots, w^{(n)}_{F,\nu}(\Lambda))\, M_\mu$

但し $M_\mu = 1 + (e^{2\pi i \ell_\mu} - 1) E_\mu \Lambda$, $E_\mu = \begin{array}{c} \quad\ \ \mu \\ \quad\ \ \uparrow \\ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

ii) $\begin{pmatrix} m & -\partial_z \\ -\partial_{\bar z} & m \end{pmatrix} w^{(\kappa)}_{F,\nu}(\Lambda) = 0 \qquad (z \neq a_1, \cdots, a_n)$

iii) $w^{(\kappa)}_{F,\nu}(\Lambda)$ を $z \sim a_\mu$ で展開すると

$$w^{(\kappa)}_{F,\nu}(\Lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{\kappa\mu} C^{(\mu)}_j(w_{F,\nu}(\Lambda))\, w_{-\ell_\mu-\frac{1}{2}+j}[a_\mu]$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{\kappa\mu} C^{*(\mu)}_j(w_{F,\nu}(\Lambda))\, w^*_{\ell_\mu+\frac{1}{2}+j}[a_\mu]$$
$$+ \text{regular function}$$

iv) $|w^{(\kappa)}_{F,\nu}(\Lambda)|$ は $|z| \to \infty$ で指数減少

一般に i)〜iv) を満たす $w=(w^{(1)},\cdots,w^{(n)})$ の全体を $W^{l_1+\frac{1}{2},\cdots,l_n+\frac{1}{2}}_{a_1,\cdots,a_n}(\Lambda)$ と書く。

同様に $\langle \psi^{(\nu)}(x_0)\psi^{*(\mu)}(x)\varphi_F(a_1;-l_1)\cdots\varphi_F(a_n;-l_n)\rangle$ の $x_0\sim a_\nu$ における展開の $w^*_{l+\frac{1}{2}}[a_\nu]$ の係数を $w^{*(\mu)}_{F,\nu}(\Lambda)$ と書くと，$w^*_{F,\nu}(\Lambda)=(w^{*(1)}_{F,\nu}(\Lambda),\cdots,w^{*(n)}_{F,\nu}(\Lambda))$ $(\nu=1,\cdots,n)$ も $W^{l_1+\frac{1}{2},\cdots,l_n+\frac{1}{2}}_{a_1,\cdots,a_n}(\Lambda)$ に属する。

$w_{F,\nu}(\Lambda)(\nu=1,\cdots,n)$ と $w^*_{F,\nu}(\Lambda)$ $(\nu=1,\cdots,n)$ を iii) の形に展開した時の展開の係数の初めの項を見ると

$$C_0^{(\mu)}(w_{F,\nu}(\Lambda))\begin{cases}\neq 0 & \mu=\nu\\ =0 & \mu\neq\nu\end{cases}\qquad C_0^{*(\mu)}(w_{F,\nu}(\Lambda))\neq 0$$

$$C_0^{(\mu)}(w^*_{F,\nu}(\Lambda))\neq 0\qquad C_0^{*(\mu)}(w^*_{F,\nu}(\Lambda))\begin{cases}\neq 0 & \mu=\nu\\ =0 & \mu\neq\nu\end{cases}$$

となっている。これから特に $(w_{F,\nu}(\Lambda))_{\nu=1,\cdots,n}$ あるいは $(w^*_{F,\nu}(\Lambda))_{\nu=1,\cdots,n}$ が一次独立な n 個の組であることがわかる。

$l_1,\cdots,l_n\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$，$\Lambda$：実正値 と仮定すると $\dim W^{l_1+\frac{1}{2},\cdots,l_n+\frac{1}{2}}_{a_1,\cdots,a_n}(\Lambda)=n$ である事が言える。実は $w=(w^{(1)},\cdots,w^{(n)})\in W^{l_1+\frac{1}{2},\cdots,l_n+\frac{1}{2}}_{a_1,\cdots,a_n}(\Lambda)$ について

$C_0^{(\nu)}(w)\,C_0^{*(\nu)}(w)=0$ $(\nu=1,\cdots,n)$ ならば

$w=0$，である事がいえる。この事を証明するには，まず

$w_{F,\nu}(\Lambda)$, $w^*_{F,\nu}(\Lambda)$ による引き算で，$-1<l_1,\cdots;l_n<0$ の時に帰着させる。次にこの条件の満たされる時は次のようにする。$w\in W^{l_1+\frac{1}{2},\cdots,l_n+\frac{1}{2}}_{a_1,\cdots,a_n}(\Lambda)$ に対して

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n}(\Lambda^{-1})_{\mu\nu}\left(w_+^{(\mu)}\overline{w_+^{(\nu)}}+w_-^{(\mu)}\overline{w_-^{(\nu)}}\right)$$

を考えると，これは $\mathbb{C}-\{a_1,\cdots,a_n\}$ で一価正値である。ディラック方程式を使って contour 積分に直す事により

$$0\leqq\frac{m^2}{2}\iint i\,dz\,d\bar{z}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}(\Lambda^{-1})_{\mu\nu}\left(w_+^{(\mu)}\overline{w_+^{(\nu)}}+w_-^{(\mu)}\overline{w_-^{(\nu)}}\right)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}(\sin\pi l_\nu)\,c_0^{(\nu)}(w)\,\overline{c_0^{*(\nu)}(w)}$$

を得る。よって $c_0^{(\nu)}(w)\,c_0^{*(\nu)}(w)=0\ (\nu=1,\cdots,n)$ ならば $w=0$ である。//

さて，$\dim W^{l_1+\frac{1}{2},\cdots,l_n+\frac{1}{2}}_{a_1,\cdots,a_n}(\Lambda)=n$ が言えると，直ちに基底をたてに並べた $\begin{bmatrix} w_{F,1}\\ \vdots \\ w_{F,n}\end{bmatrix}$ が，線型の holonomic system を満たす事（すなわち（$\#_2$）に当たる）およびその方程式系の係数が，可解条件として，非線型の完全積分可能な全微分方程式系を満たす事（すなわち（$\#_3$）に当たる）が従うのであるが，ここでは省略する。

参考文献

[1] L. Schlesinger, J. Reine Angew. Math. 141 96–145 (1912).

[2] L. Onsager, Phys. Rev. 65, 117–149 (1944)

[3] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, RIMS preprint 207 (1976), Proc. Japan Acad. 53 A 6–10, RIMS preprint 225, 234, 236, 238, 239 (1977), 数理研講究録 295 (1977).

なお，文中には引用しなかったが，次の文献は，我々の研究の出発点のひとつであった。

[4] T. T. Wu, B.M. McCoy, C.A. Tracy, E. Barouch, Phys. Rev. 13, 316–374 (1976)