数理解析研究所講究録
第 322 巻 1978 年 117-123

ベル数 B(N) の1つの算式

名工大　大芝　猛

N個の要素からなる集合 $\Gamma=\{0,1,\cdots,N-1\}$ の分割全体をある条件をみたすN集数の集まりであらわす。このようなN進数全体の個数として Γ の分割全体の個数(Bell数)を表わす次の式をうる。

$$B(N)=\sum_{1\leqq r\leqq N}\ \sum_{d_1+\cdots+d_r=N-r} 1^{d_1}\cdot 2^{d_2}\cdot\cdots\cdot r^{d_r}$$

またこのようなN進数全体に自然な順序を与えることにより、分割全体をとりのこしなくカウントする1つの方法を示す.

(定義) N進数 $\nu=(n_0,n_1,\cdots,n_{N-1})$ $(n_i\in\{0,1,\cdots,N-1\})$

に対し

$$F^N(\nu)\overset{def.}{\Longleftrightarrow} n_0=0 \wedge \forall_i\ 0<i\leqq N-1\,(\max_{j<i} n_j+1\geqq n_i)$$

とし $\mathbb{F}^N \overset{def}{=} \{\nu \mid F^N(\nu),\ \nu$ はN進数$\}$ とする。

(Proposition 1) $\Gamma=\{0,1,\cdots,N-1\}$ の分割全体を $\mathbb{C}^N$

とすると　1:1　onto 写像 $g: \mathbb{F}^N \to \mathbb{C}^N$ は次のように与えうる:

$\nu = (n_0, n_1, \cdots, n_{N-1}) \in \mathbb{F}^N$ に対し

$$g(\nu) \overset{def.}{=} \{\{i \mid n_i = 0\}, \{i \mid n_i = 1\}, \cdots, \{i \mid n_i = M(\nu)\}\}$$

但し $M(\nu) = \max_{0 \le i \le N-1} n_i$

従って　$B(N) = \#(\mathbb{F}^N)$　…… $\mathbb{F}^N$ の個数.

(証明) (1)　$\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{F}^N$, $\nu_1 \ne \nu_2 \to g(\nu_1) \ne g(\nu_2)$

(2)　$C \in \mathbb{C}^N \to \exists \nu_0 \in \mathbb{F}^N.\ g(\nu_0) = C$　を示す.

• $N = 1$ のときは明らか.

(1) $\nu, \mu \in \mathbb{F}^N$, $\nu = (n_0, \cdots, n_{N-1}) \ne \mu = (m_0, \cdots, m_{N-1})$, $N > 1$

に対し. $I_0 = \min\{i \mid n_i \ne m_i,\ 0 < i \leqq N-1\}$ とおく.

$g(\nu)$ のブロック $\{i \mid n_i = n_{I_0}\}$ は I_0 をもち

$g(\mu)$ のブロック $\{i \mid m_i = n_{I_0}\}$ は I_0 をもたない.

しかるに, $n_{J_0} = m_{J_0} = n_{J_0}$ $(J_0 < I_0)$ なる J_0 を共通にもつ故

$g(\nu) \ne g(\mu)$.

(∵)　$I_0 > 0$ 故　$\max_{j < I_0} n_j + 1 = \max_{j < I_0} m_j + 1 \geqq m_{I_0} > n_{I_0}$

従って　$\max_{j < I_0} n_j \geqq n_{I_0}$, 故に $\exists j$ $j < I_0$ & $n_j \geqq n_{I_0}$

$J_0 = \min_j \{j \mid j < I_0\ \&\ n_j \geqq n_{I_0}\}$　とおく.

従って $J_0 < I_0$, $n_{J_0} \geqq n_{I_0}$, $j < J_0 \to n_j < n_{I_0}$

$n_{J_0} \leqq \max_{j < J_0} n_j + 1 \leqq n_{I_0}$

故に　$n_{I_0} = n_{J_0} = m_{J_0}$

(2) g が onto であること.

$\Gamma=\{0,\cdots,N-1\}$ の任意の分割 $C=\{A_1,\cdots,A_p\}\in\mathbb{C}^N$ につき

$d(k)=\min A_k$ $(1\leqq k\leqq p)$, (特に $d(p+1)=N$) とおく.

一般性を失うことなく $d(1)=0<d(2)<\cdots<d(p)\leqq N-1<N=d(p+1)$

$\nu_0=(n_0,n_1,\cdots,n_{N-1})$ を次のように定める:

「すべての $i\in A_j$ に対し, $n_i\overset{def}{=}j-1$」 $(j=1,\cdots,p)$.

特に $d(j)\in A_j$ 故 $n_{d(j)}=j-1$.

このとき, $g(\nu_0)=\{\{i\mid n_i=0\},\cdots,\{i\mid n_i=p-1\}\}$

$=\{A_1,\cdots,A_p\}=C.$

また $\nu_0\in\mathbb{F}^N$ である.

(∵) $0=d_1\in A_1$ より $n_0=0$.

○ 任意の $i>0$ に対して $i\in A_k$ なる k $(1\leqq k\leqq p)$ あり.

$d(k)\leqq i$ かつ $n_{d(k)}=n_i=k-1$.

① $d(k)<i$ のとき : $n_i=n_{d(k)}\leqq\max\limits_{j<i}n_j<\max\limits_{j<i}n_j+1$

② $d(k)=i$ のとき : $n_i=n_{d(k)}=k-1=(k-2)+1=n_{d(k-1)}+1$

$\leqq\max\limits_{j<i}n_j+1$

(Proposition 2)

$$B(N)=\sum_{1\leqq r\leqq N}\ \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=N\\ k_1\geqq1,\cdots,k_r\geqq1}}1^{k_1-1}\cdot2^{k_2-1}\cdot\cdots\cdot r^{k_r-1}$$

(証明) $1\leqq r\leqq N$, $k_1+\cdots+k_r=N$, $k_1\geqq1,\cdots,k_r\geqq1$ のとき.

$Q(k_1,\cdots,k_r)$ を

$$\overset{def}{=} \{(n_0,\cdots,n_{N-1})\in \mathbb{F}^N \mid \forall j\,(1\leqq j\leqq r)\,(\, n_{k_1+\cdots+k_{j-1}} = j-1$$
$$\wedge\, \forall i\,(k_1+\cdots+k_{j-1}<i<k_1+\cdots+k_j \to 0\leqq n_i \leqq j-1))\}$$

と定義する.（但し $j=1$ のとき, $k_1+\cdots+k_{j-1}=0$ とする。）

$Q(k_1,\cdots,k_r)$ は「Fig. 1. の ○印 の点を通り, 斜線の内部を任意の折線グラフで結んでうる N進数全体」と一致する.

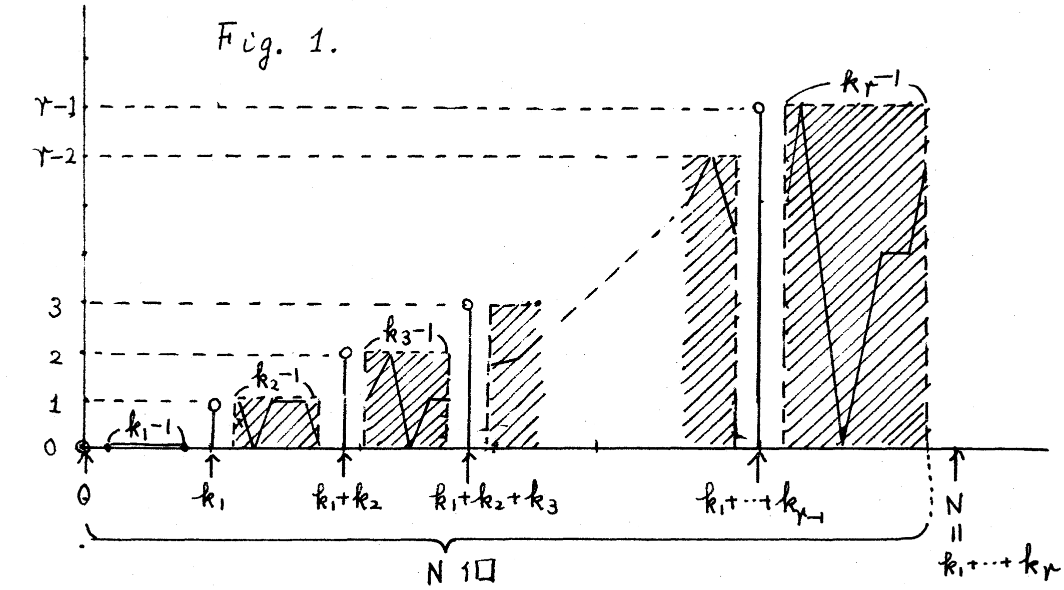

Fig. 1.

グラフの第 j ブロック 即ち $k_1+\cdots+k_{j-1}<i<k_1+\cdots+k_j$ 内の折線グラフの全体は j^{k_j-1} 個である, 従って

$$\#(Q(k_1,\cdots,k_r)) = 1^{k_1-1}\cdot 2^{k_2-1}\cdot\cdots\cdot r^{k_r-1}$$

一方 $$\mathbb{F}^N = \bigcup_{1\leqq r\leqq N} \bigcup_{\substack{k_1+\cdots+k_r=N\\ k_1\geqq 1,\cdots,k_r\geqq 1}} Q(k_1,\cdots,k_r)$$

また $(k_1,\cdots,k_r) \neq (k'_1,\cdots,k'_{r'})$ ならば

$$Q(k_1,\cdots,k_r) \cap Q(k'_1,\cdots,k'_{r'}) = \phi$$

従って $B(N)=\#(\mathbb{F}^N)=\sum_{1\leq r\leq N}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=N\\ k_1\geq 1,\cdots,k_r\geq 1}} 1^{k_1-1}\cdot 2^{k_2-1}\cdot\cdots\cdot r^{k_r-1}$

また $k_j-1=d_j$ とおけば $(d_j\geq 0)$ 直ちに

$$B(N)=\sum_{1\leq r\leq N}\sum_{d_1+\cdots+d_r=N-r} 1^{d_1}\cdot 2^{d_2}\cdot\cdots\cdot r^{d_r}$$ をうる。

(註) r を fix したとき 外側の Σ を除いた式は

N個の集合の r 分割全体の個数(第2種のスターリング数)

を与える。

$$S(N,r)=\sum_{d_1+\cdots+d_r=N-r} 1^{d_1}\cdot 2^{d_2}\cdots r^{d_r}$$

[$\mathbb{F}^N$ の要素間の順序とカウント法]

$\nu=(n_0,\cdots,n_{N-1})$, $\mu=(m_0,\cdots,m_{N-1})\in\Gamma^\Gamma$ $(\Gamma=\{0,1,\cdots,N-1\})$

に対し

$$\nu<\mu \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists_k\ 0\leq k\leq N-1\,(n_0=m_0\wedge\cdots\wedge n_{k-1}=m_{k-1}\wedge n_k<m_k)$$

と定義されるが,

$\mathbb{F}^N$ の要素にもこの順序をそのまゝ用いる.

1° $(0,\cdots,0)$, $(0,1,\cdots,N-1)$ は $\mathbb{F}^N$ の最小,最大の要素であることは容易に確かめうる

2° $B(N)$ 個の $\mathbb{F}^N$ の要素を上記 $<$ の順序で番号をつけ

$1\leq d\leq B(N)$ なる d 番目の要素を $p(d)$ であらわす.

(定義) (1) $p(1)=(\overbrace{0,\cdots,0}^{N個})$

(2) $1\leq d<B(N)$ に対し $p(d+1)=\min\{\nu\in\mathbb{F}^N \mid p(d)<\nu\}$

(Proposition 3) $1 \leqq d < B(N)$ に対し

$P(d+1)=(n_0', \cdots, n_{N-1}')$ は $p(d)=(n_0, \cdots, n_{N-1})$ を用いて，

次のように計算される：

先ず，$\max\{i \mid N-1 \geqq i > 0 \wedge \max\limits_{j<i} n_j + 1 > n_i\} = k$ とし，

$$(*)\begin{cases} n_0' = n_0, \cdots, n_{k-1}' = n_{k-1} \\ n_k' = n_k + 1 \\ n_{k+1}' = \cdots = n_{N-1}' = 0 \end{cases}$$ とする。

(従って Fig. 2. のフローチャートをうる。)

(証明) $p(d) = (n_0, \cdots, n_{N-1}) \in \mathbb{F}^N$， $1 \leqq d < B(N)$ に対し，

(0) $\exists_i (N-1 \geqq i > 0 \wedge \max\limits_{j<i} n_j + 1 > n_i)$ で上記 k が定義されること，(*) のように定めた $\rho = (n_0', \cdots, n_{N-1}')$ につき，

(1) 「$p(d) < \rho$, $\rho \in \mathbb{F}^N$」

(2) 「$p(d) < \mu < \rho$ なる μ はすべて $\mu \notin \mathbb{F}^N$」を示す。

まず (0) について：しからざるときは，「$(n_0, \cdots, n_{N-1}) \in \mathbb{F}^N$ に注意すれば $\forall_i (N-1 \geqq i > 0 \to \max\limits_{j<i} n_j + 1 = n_i)$, $n_0 = 0$.」

このとき，「$n_j = j$ $(j=0, \cdots, i)$」を i に関する帰納法で容易に示しうる。 従って $p(d) = (n_0, \cdots, n_{N-1}) = (0, 1, \cdots, N-1)$ 矛盾.

(1) について： $p(d) < \rho$ は (*) の定義から明らか.

また $\rho = (n_0', \cdots, n_{N-1}')$ について $n_0' = n_0 = 0$ であるが

$\max\limits_{j<i} n_j' + 1 \geqq n_i'$ を $(i = 1, \cdots, k, \cdots N-1)$ につき確かめうる。

[$\circ$ $n_k' = n_k + 1 < (\max\limits_{j<k} n_j + 1) + 1 = \max\limits_{j<k} n_j' + 2$，故 $n_k' \leqq \max\limits_{j<k} n_j' + 1$

$\circ\ 0<i<k$ に対し, $n_i' = n_i \leqq \max\limits_{j<i} n_j + 1 = \max\limits_{j<i} n_j' + 1$

$\circ\ k<i$ に対し $n_i' = 0 \leqq \max\limits_{j<i} n_j' + 1$

(2) について: $\nu = p(d) = (n_0, \cdots, n_{k-1}, n_k, n_{k+1}, \cdots, n_{N-1})$

$< \mu = (m_0, \cdots, m_{k-1}, m_k, m_{k+1}, \cdots, m_{N-1})$

$< \rho = (n_0, \cdots, n_{k-1}, n_k+1, 0, \cdots, 0)$ のとき,

$(m_0, \cdots, m_{k-1}) = (n_0, \cdots, n_{k-1})$ 故 $(m_k, m_{k+1}, \cdots, m_{N-1}) < (n_k+1, 0, \cdots, 0)$

従って, $m_k < n_k + 1$, 一方 $n_k \leqq m_k$. 故に $n_k = m_k$.

従ってまた, $(n_{k+1}, \cdots, n_{N-1}) < (m_{k+1}, \cdots, m_{N-1})$ 即ち

$\exists i_0 > k : (n_0, \cdots, n_{i_0-1}) = (m_0, \cdots, m_{i_0-1}),\ m_{i_0} > n_{i_0}$.

一方 $n_{i_0} = \max\limits_{j<i_0} n_j + 1 = \max\limits_{j<i_0} m_j + 1$, 故に $m_{i_0} > \max\limits_{j<i_0} m_j + 1$, 即ち $\mu \notin \mathbb{F}^N$.

謝辞 本稿に関連して, 山梨大学の野崎昭弘教授, 東海大学の成島弘助教授に種々御注意, 資料をいただいたことを感謝いたします.

Fig. 2.