数理解析研究所講究録
第 322 巻 1978 年 124-153

一階様相述語論理の機械的定理証明について

静岡大学 工学部 鈴木淳之
中松和己

第0章

〔序〕 情報処理技術の応用分野を自然言語にも拡げるには、計算機構の研究に意味論的考察が必須であり、それ故、様相諸概念の導入及びその数学的研究、処理技術の取り入れも必要となる. しかし、様相論理(内包的論理)は、その解釈において、通常の外延的論理に比べ、難解で複雑である. そこで、本研究では、完全な様相論理のセマンティックスを外延的論理で表現し、様相論理を外延的論理に還元し、その応用として、一階様相述語論理の定理証明を、二種類の領域(*domain*)をもつ、外延的一階述語論理における導出原理を使い、機械的に行なうことを試みた. 様相論理には種々の体系があるが、ここでは、C.I. Lewis の分類による、様相命題論理の体系S5に相当する、一階様相述語論理の体系を使用した.

第1章

まず、一階様相述語論理(以下 MLPC と略す.)と、それを翻訳する外延的一階述語論理(以下 ELPC と略す.)の、シンタックスとセマンティックスを各々定義する。

1.1 〔一階様相述語論理(MLPC)の定義〕

〔基本記号〕

1. 対象変数　$x, y, z, \cdots, x_1, x_2, \cdots$
2. 対象定数　$a, b, c, \cdots, a_1, a_2, \cdots$
3. 関数記号　$f, g, h, \cdots, f_1, f_2, \cdots$
4. 述語記号　$P, Q, R, \cdots, P_1, P_2, \cdots$
5. 記号　$\sim, \vee, \forall, N$(様相記号), (,)

〔項(term)の定義〕

1. 対象変数と対象定数は、term である.
2. $t_1, \cdots, t_n$ が term なら、$f(t_1, \cdots, t_n)$ は term である.(ここで、f は n 変数関数記号.)
3. 1,2で定義されたものだけが term である.

〔論理式(well formed formula : wff)の定義〕

1. P を n 変数述語記号、$t_1, \cdots, t_n$ を term とすると、$P(t_1, \cdots, t_n)$ は wff である.
2. A を wff とすると、$\sim A$ は wff である.

3. A と B を wff とすると、$A \vee B$ は wff である.

4. A を wff、x を対象変数とすると、$(\forall x)A$ は、wff である.（$(\forall x)A$ を、$(x)A$ とも書く.）

5. A を wff とすると、NA は wff である.

6. 1.～5.で定義されたものだけが wff である.

〔略記〕

$A \wedge B \equiv_{Df} \sim(\sim A \vee \sim B)$

$A \supset B \equiv_{Df} \sim A \vee B$

$A \equiv B \equiv_{Df} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

$(\exists x)A \equiv_{Df} \sim(\forall x)\sim A$

$\Diamond A \equiv_{Df} \sim N \sim A$

〔公理〕

1. $(A \vee B) \supset A$

2. $B \supset (A \vee B)$

3. $(A \vee B) \supset (B \vee A)$

4. $(B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset (A \vee C))$

5. $(x)P(x) \supset P(t)$

   （ここで、x は任意の対象変数、t は $P(x)$ の中で x に対して自由である項）

6. $NA \supset A$

7. $N(A \supset B) \supset (NA \supset NB)$

8．$\Diamond A \supset N \Diamond A$

〔推論規則〕

xを任意の対象変数、p, qを任意のwffとすると、

1．$\vdash p \supset q \rightarrow \vdash p \supset (x) q$

（ここで、xはpの中で自由でない．）

2．（分離法則（MP））

$\vdash p, \vdash p \supset q \rightarrow \vdash q$

3．$\vdash p \rightarrow \vdash Np$

〔MLPCのセマンティックス〕

〔モデルの定義〕

MLPCのモデルは、次の4順序対で表わされる．

$< \mathbb{W}, R, \mathbb{D}, \mathbb{V} >$

$\mathbb{W}$．：possible world の集合

R．：$\mathbb{W}$の要素間の関係（S5である故、同値関係）

$\mathbb{D}$、：対象領域（domain）

$\mathbb{V}$、：次の条件を満たす付値（value assignment）

xが変数のとき、$\mathbb{V}(x)$は$\mathbb{D}$の中のある要素．

aが定数のとき、$\mathbb{V}(a)$は$\mathbb{D}$の中のある要素．

fがn変数関数のとき、$\mathbb{V}(f)$は$\mathbb{D}^n$（$\mathbb{D}$のn個の直積）

から$\mathbb{D}$への一意写像で、次の条件を満たす．

$$V(f(t_1, \cdots, t_n)) = V(f)(V(t_1), \cdots, V(t_n))$$

Pをn変数述語とすると、$V(P)$は $\langle u_1, \cdots, u_n, w_i \rangle$ なる形をしたn+1順序対の集合、ここで$u_i \in D, w_i \in W$.

MLPCの任意のwff A に対して、world w_i に対する値 $V(A, w_i)$ を定義する.

1. Aが原子式、Pがn変数述語、$t_i\ (1 \leq i \leq n)$が項のとき、任意の$w_i \in W$ に対し、

$$\begin{cases} V(P(t_1, \cdots, t_n), w_i) = 1 & \langle V(t_1), \cdots, V(t_n), w_i \rangle \in V(P) \text{のとき.} \\ V(P(t_1, \cdots, t_n), w_i) = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. Aを任意のwffとするとき、任意の$w_i \in W$に対し、

$$\begin{cases} V(\sim A, w_i) = 1 & V(A, w_i) = 0 \text{のとき.} \\ V(\sim A, w_i) = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

3. A, Bを任意のwffとする、任意の$w_i \in W$に対し、

$$\begin{cases} V(A \vee B, w_i) = 1 & V(A, w_i) = 1 \text{または、} V(B, w_i) = 1 \text{のとき.} \\ V(A \vee B, w_i) = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. Aを任意のwff、xを対象変数とするとき、任意の$w_i \in W$ に対し、

$V((\forall x)A, w_i) = 1$ 　x以外のすべての項の付値に対しては、Vと同じであ

3. すべての V' に対し、

$V'(A, w_i) = 1$

$V((\forall x)A, w_i) = 0$　otherwise

5. A を任意の wff とする．任意の $w_i \in W$ に対し、

$V(NA, w_i) = 1$　$w_i R w_j$ となるすべての $w_j \in W$ に対して、$V(A, w_j) = 1$

$V(NA, w_i) = 0$　otherwise

1.2.〔二種類の領域をもつ外延的一階述語論理（ELPC）の定義〕

ここで、MLPC を翻訳する外延的論理 ELPC を定義するが、このELPC は対象領域Ⅰ，Ⅱ（D_1，D_2）をもち、各々の領域に対応して、二種類の変数、定数、関数記号が存在する．関数については、D_1 から D_2，D_2 から D_1 への写像は、存在しない．

〔基本記号〕

1、対象変数Ⅰ．　$x, y, z, \ldots$；対象変数Ⅱ．$\kappa, \lambda, \mu, \ldots$

2、対象定数Ⅰ．　$a, b, c, \ldots$；対象定数Ⅱ．$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

3、関数記号Ⅰ．　$f, g, h, \ldots$，関数記号Ⅱ．$f', g', h', \ldots$

4．述語記号　　$P, Q, R, \ldots$

5．記号　　$\sim$，$\vee$，$\forall$

［項（term）の定義］

1、対象変数Ⅰと対象定数Ⅰは termⅠである．
対象変数Ⅱと対象定数Ⅱは termⅡである．

2．$t_1, \cdots, t_n$ が termⅠなら、$f(t_1, \cdots, t_n)$ は termⅠである．（ここで、f は n 変数関数記号Ⅰ）
$t'_1, \cdots, t'_n$ が termⅡなら、$f'(t'_1, \cdots, t'_n)$ は termⅡである．（ここで、f' は n 変数関数記号Ⅱ）

3、1，2で定義されたものだけが term である．

［論理式（well formed formula：wff）の定義］

1、P を n 変数述語記号、$t''_1, \cdots, t''_n$ を termⅠまたは termⅡとすると、$P(t''_1, \cdots, t''_n)$ は wff である．

2、A を wff とすると、$\sim A$ は wff である．

3．A と B を wff とすると、$A \vee B$ は wff である．

4．A を wff，x を対象変数Ⅰ，K を対象変数Ⅱとすると、$(\forall x)A$，$(\forall K)A$ は wff である．
（$(\forall x)A$，$(\forall K)A$ は各々、$(x)A$，$(K)A$ とも書く．）

5．1.～4．で定義されたものだけが wff である．

［公理］

1.～4．は、MLPC の公理と同じ．

5．$(x)P(x) \supset P(t)$

5′．$(K)P(K) \supset P(t')$

（ここで、x，Kは、各々対象変数Ⅰ，Ⅱ．t，t'は、各々、$P(x)$，$P(K)$の中で自由であるtermⅠ，Ⅱ）

［推論規則］

x，K を各々任意の対象変数Ⅰ，Ⅱとし、P，q を任意のwff とすると、

1、　$\vdash P \supset q \longrightarrow \vdash P \supset (x) q$

（ここで、xはPの中で自由でない．）

1'、　$\vdash P \supset q \longrightarrow \vdash P \supset (K) q$

（ここで、KはPの中で自由でない．）

2、（分離法則（MP））、P，qを任意のwff とする．

$\vdash P$，$\vdash P \supset q \longrightarrow \vdash q$

［ELPCのセマンティックス］

［モデルの定義］

ELPC のモデルは、次の3順序対で表わされる．

$\langle D_1, D_2, V \rangle$

D_1　：　対象領域Ⅰ

D_2　：　対象領域Ⅱ

V　：　次の条件を満たす付値（value assignment）

xが対象変数Ⅰのとき、$V(x)$はD_1のある要素．

Kが対象変数Ⅱのとき、$V(K)$はD_2のある要素．

aが対象定数Ⅰのとき、$V(a)$はD_1のある要素.

αが対象定数Ⅱのとき、$V(\alpha)$はD_2のある要素.

fがn変数関数記号Ⅰのとき、$V(f)$はD_1^nからD_1への一意写像.

f'がn変数関数記号Ⅱのとき、$V(f')$はD_2^nからD_2への一意写像.

Pがn変数述語のとき、$V(P)$は$\langle u_1, ---, u_n \rangle$なる$n$順序対の集合. ここで、$u_i \in D_1$または$u_i \in D_2$ $(1 \leq i \leq n)$

任意のELPCのwff Aに対し、値$V(A)$を定義する.

1、Aが原子式のとき、Pをn変数述語記号、t_i'' $(1 \leq i \leq n)$ をtermⅠまたはtermⅡとすると、

$$\begin{cases} V(P(t_1'', ---, t_n'')) = 1 & \langle V(t_1''), ---, V(t_n'') \rangle \in V(P) \text{ のとき.} \\ V(P(t_1'', ---, t_n'')) = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A, Bを任意のwff、x, Kを各々対象変数Ⅰ,Ⅱとする.

2、$\sim A$, 3. $A \vee B$, 4. $(x)A$, $(K)A$ に対する付値は、MLPCの場合と同様に定義される.

第2章

第1章で定義されたMLPCを、ELPCに翻訳する規則を定義し、その規則の完全性(定理の保存性)を示す.

2.1〔MLPCのELPCへの翻訳規則＊〕

MLPCのモデルを、ELPCで表現することにより、MLPCのELPCへの翻訳規則＊を、次のように定義する．MLPCの対象領域$\mathcal{D}$に対し、ELPCの対象領域$\mathcal{D}_1$，MLPCのpossible worldの集合$\mathcal{W}$に対し、ELPCの対象領域$\mathcal{D}_2$を対応させ、必然性を表わす様相記号Nに対しては、S5の特性（$\mathcal{W}$における関係Rの同値性）より、ELPCの対象領域$\mathcal{D}_2$に対する全称記号を対応させる．従って、変数ⅡKは、possible worldを表わすことになる．

〔Rule＊〕

（MLPC）	$\xrightarrow{*}$	（ELPC）
1、x（対象変数） a（対象定数）		x^*，a^*，は各々領域$\mathcal{D}_1$に対応する変数Ⅰと定数Ⅰ．
2、$f(t_1, ---, t_n)$ （n変数関数）		$f^*(t_1^*, ---, t_n^*)$ f^*は$\mathcal{D}_1^n$から$\mathcal{D}_1$への一意写像を表わす関数記号Ⅰ
3、$P(t_1, ---, t_n)$ （n変数述語）		$P^*(t_1^*, ---, t_n^*, K)$ Kは領域$\mathcal{D}_2$に対応する変数Ⅱ.

Rule 3を適用する際、同一wff内において、述語の$n+1$番目のargumentに現われる変数Ⅱは、すべて同一でなくてはならない．

4、A を wff とすると、　　$(\sim A)^* = \sim A^*$

5、A, B を wff とすると、　　$(A \vee B)^* = A^* \vee B^*$

6、A を wff、x を対象変数とすると、　　$((\forall x)A)^* = (\forall \overset{*}{x})A^*$

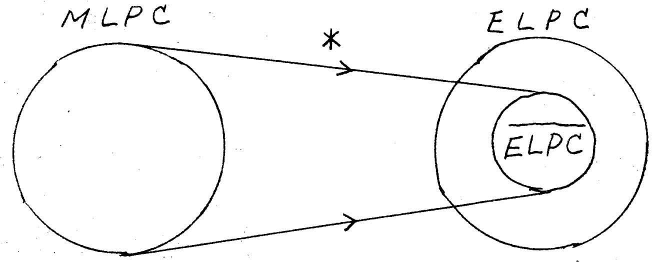
7、A を wff とすると、　　$(NA)^* = (\forall K)A^*$

Rule 7 を適用する際、全称化される変数ⅡK は、A^* 内の変数Ⅱと同一でなくてはならない．

2.2〔翻訳規則＊の完全性〕

2.1 で示した Rule＊ の完全性を評価する．

MLPC のすべての wff P の＊翻訳 P^* と、ELPC の公理と推論規則よりなる ELPC の部分言語の体系を $\overline{ELPC}$ とする．



$\overline{ELPC}$ は、n 変数述語の n 番目の argument のみが変数Ⅱであり、他の定数Ⅱ，関数記号Ⅱは現われない．このとき、＊翻訳の逆翻訳として－＊を考え、MLPC において wff P が定理であることと、$\overline{ELPC}$ において wff P^* が定理であることが同値であることを示す．このためには、MLPC の公理と、

推論規則の＊翻訳が、$\overline{ELPC}$ の定理と推論規則であり、$\overline{ELPC}$ の公理と推論規則の－＊翻訳が、MLPC の定理と推論規則となることを示せばよい。

〔I〕 $(MLPC) \vdash P \Rightarrow (\overline{ELPC}) \vdash P^*$

MLPCの公理1.～4.の＊翻訳が、$\overline{ELPC}$ の定理となることは明らか。（なぜなら、MLPCの公理1.～4.と $\overline{ELPC}$ の公理1.～4.は同じ.）以下、公理5.～8.について示す.

5、$(x)P(x) \supset P(t)$ （t は $P(x)$ で、x に対し自由.）

$((x)P(x) \supset P(t))^* = (x^*)P^*(x^*, K) \supset P^*(t^*, K)$

$\overline{ELPC}$ の公理5より、$\vdash (K)P^*(x^*, K) \supset P^*(t^*, K)$

6、$NP \supset P$

$(NP \supset P)^* = (K)P^*(K) \supset P^*(K)$

$\overline{ELPC}$ の公理5′より、$\vdash (K)P^*(K) \supset P^*(K)$

7、$N(p \supset q) \supset (Np \supset Nq)$

$(N(p \supset q) \supset (Np \supset Nq))^* = (K)(p^*(K) \supset q^*(K)) \supset ((K)p^*(K) \supset (K)q^*(K))$

$\overline{ELPC}$ において、$\vdash (K)(p^*(K) \supset q^*(K)) \supset ((K)p^*(K) \supset (K)q^*(K))$ が成り立つ.

8、$\Diamond P \supset N \Diamond P$

$(\Diamond P \supset N \Diamond P)^* = (\exists K)P^*(K) \supset (K)(\exists K)P^*(K)$

$\overline{ELPC}$ において、$\vdash (\exists K)P^*(K) \supset (\exists K)P^*(K)$

推論規則1より、$\vdash (\exists K) P^*(K) \supset (K)(\exists K) P^*(K)$

MLPCの推論規則1,2と、$\overline{ELPC}$の推論規則1,2は同じだから、MLPCの推論規則1,2の＊翻訳は、$\overline{ELPC}$の推論規則となる．次にMLPCの推論規則3について．

3、$\vdash P \longrightarrow \vdash NP$

$(\vdash P \longrightarrow \vdash NP)^* = \vdash P^*(K) \longrightarrow \vdash (K) P^*(K)$ を示す．

仮定．　$\vdash P^*(K)$ --- (1)

$\overline{ELPC}$において、$\vdash P^*(K) \supset ((\exists K) P^*(K) \supset P^*(K))$

MPより、　$\vdash (\exists K) P^*(K) \supset P^*(K)$

推論規則1より、$(\exists K) P^*(K)$において、Kは自由でないから、　$\vdash (\exists K) P^*(K) \supset (K) P^*(K)$ --- (2)

$\overline{ELPC}$において、$\vdash P^*(K) \supset (\exists K) P^*(K)$ --- (3)

(2), (3)より、　$\vdash P^*(K) \supset (K) P^*(K)$ --- (4)

(1), (4)よりMP.　$\vdash P^*(K) \longrightarrow \vdash (K) P^*(K)$

これで、$(MLPC) \vdash P \Rightarrow (\overline{ELPC}) \vdash P^*$ が示された．

〔Ⅱ〕、$(\overline{ELPC}) \vdash P \Rightarrow (MLPC) \vdash P^{-*}$

〔Ⅰ〕と同じく、$\overline{ELPC}$の公理1.～4.の$(-*)$翻訳が、MLPCの定理となることは明らか．以下、公理5, 5'について示す．

5、$(x) P(x, K) \supset P(t, K)$ （tは$P(x, K)$の中で、xに対し自由．）

$((x) P(x, K) \supset P(t, K))^{-*} = (x^{-*}) P^{-*}(x^{-*}) \supset P^{-*}(t^{-*})$.

MLPCの公理5より、$\vdash(x^{-*})P^{-*}(x^{-*})\supset P^{-*}(t^{-*})$は明らか.

5′. $(K)P(K)\supset P(t')$ （t'は$P(K)$の中で、Kに対し自由.）

$((K)P(K)\supset P(t'))^{-*}=NP^{-*}\supset P^{-*}$

MLPCの公理6より、$\vdash NP^{-*}\supset P^{-*}$

$\overline{ELPC}$の推論規則の(−＊)翻訳が、MLPCの推論規則となることを示そう.

1. $\vdash P\supset q \longrightarrow \vdash P\supset(x)q$ （xはPで自由でない.）

MLPCの推論規則1より、

$\vdash P^{-*}\supset q^{-*}\longrightarrow \vdash P^{-*}\supset(x)q^{-*}$ は明らか.

1′. $\vdash P\supset q \longrightarrow \vdash P\supset(K)q$ （KはPで自由でない.）

MLPCの推論規則3より、

$\vdash P^{-*}\supset q^{-*}\longrightarrow \vdash N(P^{-*}\supset q^{-*})$

また、MLPCの公理7より、

$\vdash N(P^{-*}\supset q^{-*})\supset(NP^{-*}\supset Nq^{-*})$

$\therefore \vdash P^{-*}\supset q^{-*}\longrightarrow \vdash NP^{-*}\supset Nq^{-*}$

ここで、すべてのwff Pに対し、$NP^{-*}\equiv P^{-*}$ を示す.

(a) Pが $q_1 \cdots q_m R$ のとき、

$q_i\ (1\leq i\leq m)$は、限定記号.
Rは、Kを含む原子式または原子式の否定.

$P^{-*}=q_1^{-*}\cdots q_m^{-*}R^{-*}$

PにおいてKが自由でないから、$q_1^{-*}\cdots q_m^{-*}$の中に、

少くとも1個の様相記号(N, $\Diamond$)が存在する.

従って、第3章の[定理]より、

$$N g_1^{-*} \cdots g_m^{-*} R^{-*} \equiv g_1^{-*} \cdots g_m^{-*} R^{-*}$$

が証明される.

$$\therefore \quad NP^{-*} \equiv P^{-*}$$

(b) Pが、$g_1^1 \cdots g_k^1 R_1 \vee g_1^2 \cdots g_l^2 R_2$ のとき、

$\left\{\begin{array}{l} g_i^j \text{ は、限定記号.} \\ R_1, R_2 \text{ は} K \text{を含む原子式または原子式の否定.} \end{array}\right.$

$$P^{-*} = g_1^{1-*} \cdots g_k^{1-*} R_1^{-*} \vee g_1^{2-*} \cdots g_l^{2-*} R_2^{-*}$$

$g_1^{1-*} \cdots g_k^{1-*}$, $g_1^{2-*} \cdots g_l^{2-*}$ の中に、各々様相記号が、一個以上含まれる.これらの並びで、最も初めにある様相記号を、それぞれM_1, M_2とすると、

$$P^{-*} = g_1^{1-*} \cdots M_1 \cdots g_k^{1-*} R_1^{-*} \vee g_1^{2-*} \cdots M_2 \cdots g_l^{2-*} R_2^{-*}$$

となり、次のように変形できる.

$$g_1^1 \cdots g_i^1 (M_1 g_1^2 \cdots g_j^2 R_1^{-*} \vee M_2 g_1^3 \cdots g_n^3 R_2^{-*})$$

$\left\{\begin{array}{l} g_1^1 \cdots g_i^1 \text{ は、} M_1, M_2 \text{ より左にある限定記号.} \\ g_1^2 \cdots g_j^2 \text{ は} M_1 \text{の右にある限定記号または様相記号.} \\ g_1^3 \cdots g_n^3 \text{ は} M_2 \text{の右にある限定記号または様相記号.} \end{array}\right.$

このとき、MLPCの次の定理より、

$$\vdash NP \vee Nq \equiv N(p \vee Nq)$$

$$\vdash NP \vee \Diamond q \equiv N(p \vee \Diamond q)$$

$\vdash \Diamond p \vee \Diamond q \equiv \Diamond(p \vee q)$

p^{-*}が$q_1^1 \cdots q_i^1$の次に様相記号が続く式に変形できる．

$p^{-*} = q_1^1 \cdots q_i^1 M(R' \vee R'')$

（Mは、Nまたは$\Diamond$）

従って、$Np^{-*} = Nq_1^1 \cdots q_i^1 M(R' \vee R'')$．

第3章の［定理］より、

$Nq_1^1 \cdots q_i^1 M(R' \vee R'') \equiv q_1^1 \cdots q_i^1 M(R' \vee R'')$

$\therefore \quad Np^{-*} \equiv p^{-*}$

(c)　pが、$q_1^1 \cdots q_k^1 R_1 \wedge q_1^2 \cdots q_l^2 R_2$のとき、

q_i^jは、限定記号．

R_1，R_2は、Kを含む原子式またはその否定．

$p^{-*} = q_1^{1-*} \cdots q_k^{1-*} R_1^{-*} \wedge q_1^{2-*} \cdots q_l^{2-*} R_2^{-*}$

(b)の場合と同様、MLPCの次の定理より、

$\vdash Np \wedge Nq \equiv N(p \wedge q)$

$\vdash \Diamond p \wedge Nq \equiv \Diamond(p \wedge Nq)$

$\vdash \Diamond p \wedge \Diamond q \equiv \Diamond(p \wedge \Diamond q)$

$p^{-*} = q_1^1 \cdots q_i^1 M(R' \wedge R'')$

（Mは、Nまたは$\Diamond$）

従って、$Np^{-*} = Nq_1^1 \cdots q_i^1 M(R' \wedge R'')$．

第3章の［定理］より、

$Nq_1^1 \cdots q_i^1 M(R' \wedge R'') \equiv q_1^1 \cdots q_i^1 M(R' \wedge R'')$

$$\therefore \quad NP^{-*} \equiv P^{-*}$$

(d)　(a), (b), (c)より、$q_1 \cdots q_m R$, $q_1^1 \cdots q_k^1 R_1 \vee q_1^2 \cdots q_l^2 R_2$,
$q_1^1 \cdots q_k^1 R_1 \wedge q_1^2 \cdots q_l^2 R_2$ より構成できるすべての$\overline{ELPC}$
の wff P に対し、$NP^{-*} \equiv P^{-*}$ が証明された.

$\overline{ELPC}$の wff P が、$\wedge$, $\vee$, $\sim$ で表現できることは明らか.
従って、すべての$\overline{ELPC}$の wff P に対し、

$$NP^{-*} \equiv P^{-*}$$

$\therefore$　$\vdash P^{-*} \supset q^{-*} \longrightarrow \vdash P^{-*} \supset Nq^{-*}$ が成り立つ.

2、$\vdash P$, $\vdash P \supset q \longrightarrow \vdash q$

MLPC において、$\vdash P^{-*}$, $\vdash P^{-*} \supset q^{-*} \longrightarrow \vdash q^{-*}$は明らか.

以上のことより、$(\overline{ELPC}) \vdash P \Rightarrow (MLPC) \vdash P^{-*}$.

〔1〕, 〔2〕より、MLPCにおいて、wff P が定理であることと、$\overline{ELPC}$において、wff P^*が定理であることが同値となることが証明された.

第3章

この章では、次章で述べる定理証明のために、MLPC の wff に対し、ある標準形を考える. この標準形は、その中で、様相記号の個数が、できるだけ少くなるように作られる.

3.1 〔MLPCの標準形の作成〕

まず、いくつかのMLPCの定理を示し、これらをもとに、標準形を作成する. 定理の詳細な証明は、略してある.

(Eq) (同値定理)

A, B, C, Dを、各々MLPCのwffとするとき、$\vdash A$であり、Aが、そのwell formed partとしてDをもっているのに対し、BがCをもっているという点でのみ、AとBが異なるとすると、$\vdash C \equiv D$が成り立つなら、$\vdash B$である.

〔証明〕 MLPCのwffの構成に関する帰納法による.

詳細は略.

(T1) $N \Diamond P \equiv \Diamond P$ (T2) $\Diamond NP \equiv \Diamond P$

(T3) $NNP \equiv NP$ (T4) $\Diamond \Diamond P \equiv \Diamond P$

(T5) $(x)NP(x) \equiv N(x)P(x)$

(T6) $\Diamond(\exists x)P(x) \equiv (\exists x)\Diamond P(x)$

(T7) $\Diamond(x)P(x) \supset (x)\Diamond P(x)$

(T8) $(\exists x)NP(x) \supset N(\exists x)P(x)$

(T9) $N(x)NP(x) \equiv (x)NP(x)$

(T10) $\Diamond(\exists x)\Diamond P(x) \equiv (\exists x)\Diamond P(x)$

(T11) $N(x)\Diamond P(x) \equiv (x)\Diamond P(x)$

(T12) $\Diamond(\exists x)NP(x) \equiv (x)NP(x)$

(T13) $\Diamond(x)NP(x) \equiv (x)NP(x)$

(T14) $N(\exists x)\Diamond P(x) \equiv (\exists x)\Diamond P(x)$

(T15) $\Diamond(x)\Diamond P(x) \equiv (x)\Diamond P(x)$

(T16) $N(\exists x)NP(x) \equiv (\exists x)NP(x)$

〔証明略〕

〔定理〕

一般に、次のMLPCの式を考える.

$$M_1 Q_1 \cdots M_k Q_k P \qquad \cdots (1)$$

ここで、$M_i\ (1 \leq i \leq k)$ は、様相記号の連続した並び、

または空. $M_i = M_{i1} \cdots M_{in_i}$

$M_{ij}\ (1 \leq j \leq n_i)$ は、Nまたは◇または空.

$Q_i\ (1 \leq i \leq k)$ は、全称記号と存在記号の

連続した並び、または空.

$Q_i = (q_{i1} x_{i1}) \cdots (q_{im_i} x_{im_i})$

$q_{ij} x_{ij}\ (1 \leq j \leq m_i)$ は、$\forall x_{ij}$ または $\exists x_{ij}$

または空.

Pは、MLPCの任意のwff.

$M_1 Q_1 \cdots M_k Q_k$ は、様相記号と限定記号の混在する一般的な並びを表わしている.

このとき、次の式が成り立つ.

$$M_1 Q_1 \cdots M_k Q_k P \equiv Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-1} M_{kn_k} Q_k P$$

つまり、様相記号と限定記号の並び（$M_1Q_1 \cdots M_kQ_k$）の中で、最もPに近い様相記号一個を残し、他の様相記号が消去できる.

〔証明〕

まず、(1)式において、様相記号の連続した並び、$M_1, \cdots, M_k$ が、各々様相記号一個で置きかわることを示す.

(1)式 $\equiv M_{1n_1}Q_1M_{2n_2}Q_2 \cdots Q_{k-1}M_{kn_k}Q_kP$ --- (2)

を示す.

(1)式を、$M_{11}M_{12} \cdots M_{1n_1}QP$ とおく.

（ここで、Qは、$Q_1M_2Q_2 \cdots M_kQ_k$）

(T1)〜(T4), (E8) より、次の各式が成り立つ.

$$M_{11}M_{12} \cdots M_{1n_1}QP \equiv M_{12} \cdots M_{1n_1}QP$$

$$M_{12} \cdots M_{1n_1}QP \equiv M_{13} \cdots M_{1n_1}QP$$

$$\vdots$$

$$M_{1n_1-1}M_{1n_1}QP \equiv M_{1n_1}QP$$

$$\therefore\ M_{11}M_{12} \cdots M_{1n_1}QP \equiv M_{1n_1}QP \quad \text{--- (3)}$$

また、一般に次のような(1)式の well formed part に対しても、(3)式のような式が成り立つ.

(1)式の well formed part として $M_iQ_i \cdots M_kQ_kP$、つまり、$M_{i1} \cdots M_{in_i}Q_i \cdots M_kQ_kP$ を考えると、(3)式を証明したのと同様にして、すべての $i\,(1 \le i \le k)$ に対し、

$$M_{i1}\cdots M_{in_i}Q_i\cdots M_kQ_kP \equiv M_{in_i}Q_i\cdots M_kQ_kP$$

が証明され、同値定理を使えば、(2)式が証明される.

次に、

$$M_{1n_1}Q_1M_{2n_2}\cdots Q_{k-1}M_{kn_k}Q_kP \quad --- \quad (4)$$

(4)式 $\equiv Q_1Q_2\cdots Q_{k-1}M_{kn_k}Q_kP$ を示す.

(4)式を、$M_{1n_1}(q_{11}x_{11})\cdots(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$ とおく.

（ここで、Qは、$Q_2M_{3n_3}\cdots Q_{k-1}M_{kn_k}Q_k$.）

$(T9)\sim(T16)$と(Eq)より、

$$M_{1n_1}(q_{11}x_{11})\cdots(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$$

$$\equiv M_{1n_1}(q_{11}x_{11})\cdots(q_{1m_1-1}x_{1m_1-1})L_1(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$$

（ここで、$L_i\ (1\le i\le m_1-1)$は、Nまたは$\Diamond$）

$$\equiv M_{1n_1}(q_{11}x_{11})\cdots L_2(q_{1m_1-1}x_{1m_1-1})L_1(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$$

$$\vdots$$

$$\equiv M_{1n_1}(q_{11}x_{11})L_{m_1-1}(q_{12}x_{12})L_{m_1-2}\cdots L_1(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$$

また、

$$M_{1n_1}(q_{11}x_{11})L_{m_1-1}(q_{12}x_{12})L_{m_1-2}\cdots L_1(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$$

$$\equiv (q_{11}x_{11})L_{m_1-1}(q_{12}x_{12})L_{m_1-2}\cdots L_1(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$$

$$\equiv (q_{11}x_{11})(q_{12}x_{12})L_{m_1-2}\cdots L_1(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$$

$$\vdots$$

$$\equiv (q_{11}x_{11})\cdots(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$$

$$\therefore\ M_{1n_1}(q_{11}x_{11})\cdots(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$$

$$\equiv (q_{11}x_{11})\cdots(q_{1m_1}x_{1m_1})M_{2n_2}QP$$

$$\therefore\ M_1 n_1 Q_1 M_2 n_2 \cdots M_k n_k Q_k P$$
$$\equiv Q_1 M_2 n_2 \cdots M_k n_k Q_k P$$

また、一般に、(4)式の well formed part

$$M_i n_i Q_i \cdots M_k n_k Q_k P \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

に対し、同様の操作をくり返すと、

$$M_i n_i Q_i M_i n_{i+1} \cdots M_k n_k Q_k P$$
$$\equiv Q_i M_i n_{i+1} \cdots M_k n_k Q_k P$$ が成り立つ.

従って、(Eq)より、

$$M_1 n_1 Q_1 M_2 n_2 \cdots Q_{k-1} M_k n_k Q_k P$$
$$\equiv Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-1} M_k n_k Q_k P$$

故に、$M_1 Q_1 \cdots M_k Q_k P \equiv Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-1} M_k n_k Q_k P$ が成り立つ.

〔証明終〕

ここで、この〔定理〕の適用例を一つ挙げる.

$$
\begin{aligned}
& N(\exists x)(y)\Diamond N(\exists z)NN(\exists t)P(x,y,z,t) \quad \cdots\ (a) \\
& \quad \text{(T2) より} \\
\equiv\ & N(\exists x)(y)N(\exists z)NN(\exists t)P(x,y,z,t) \\
& \quad \text{(T3) より} \\
\equiv\ & N(\exists x)(y)N(\exists z)N(\exists t)P(x,y,z,t) \\
& \quad \text{(T9) より} \\
\equiv\ & N(\exists x)N(y)N(\exists z)N(\exists t)P(x,y,z,t) \\
& \quad \text{(T16) より} \\
\equiv\ & (\exists x)N(y)N(\exists z)N(\exists t)P(x,y,z,t) \\
& \quad \text{(T9) より} \\
\equiv\ & (\exists x)(y)N(\exists z)N(\exists t)P(x,y,z,t) \\
& \quad \text{(T16) より} \\
\equiv\ & \underline{(\exists x)(y)(\exists z)N(\exists t)P(x,y,z,t)}
\end{aligned}
$$

(a)式に対し、〜〜〜の式が求める適用例である.

(T17) $N(P \vee q) \supset (NP \vee \Diamond q)$

(T18) $N(P \vee Nq) \equiv NP \vee Nq$

(T19) $N(P \vee \Diamond q) \equiv NP \vee \Diamond q$

(T20) $\Diamond(P \wedge \Diamond q) \equiv \Diamond P \vee \Diamond q$

(T21) $\Diamond(P \wedge Nq) \equiv \Diamond P \wedge Nq$

(T22) $N(P \wedge q) \equiv NP \wedge Nq$

(T23) $\Diamond(P \vee q) \equiv \Diamond P \vee \Diamond q$

[証明略]

[標準形作成のアルゴリズム]

MLPCの wff P が、与えられたとする.

(Step 1.)

$A \supset B \equiv \sim A \vee B$, $\sim(\sim A) \equiv A$ をくり返し使って、⊃(含意)と、二重否定を消去する.

(Step 2.)

$\sim(A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$, $\sim(A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$

$\sim(x)P(x) \equiv (\exists x)\sim P(x)$, $\sim(\exists x)P(x) \equiv (x)\sim P(x)$

$\sim NP \equiv \Diamond \sim P$, $\sim \Diamond P \equiv N \sim P$

をくり返し使って、〜(否定)を、原子式の直前にもってくる.

(Step 3.)

wff P のすべての well formed part に対し、〔定理〕を適用し、すべての限定記号と様相記号の混在する並びの中に、様相記号が二個以上現われないようにする.

(Step 4.)

(1) $(Qx)P(x) \vee q \equiv (Qx)(P(x) \vee q)$

(2) $(Qx)P(x) \wedge q \equiv (Qx)(P(x) \wedge q)$

ここで、 Q は $\forall$ または $\exists$、q は x を含まない.

(3) $(x)P(x) \wedge (x)q(x) \equiv (x)(P(x) \wedge q(x))$

(4) $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)q(x) \equiv (\exists x)(P(x) \vee q(x))$

(5) $(Q_1 x)P(x) \vee (Q_2 x)q(x) \equiv (Q_1 x)(Q_2 y)(P(x) \vee q(y))$

(6) $(Q_3 x)P(x) \wedge (Q_4 x)q(x) \equiv (Q_3 x)(Q_4 y)(P(x) \wedge q(y))$

(Q_i $(1 \le i \le 4)$ は $\forall$ または $\exists$, y は $P(x)$ の中に現われない変数.)

(1).〜(6). を使い、次の変形を行なう. (Step 1.)〜(Step 3.)の変形で、wff P は、次の〔I〕,〔II〕のいずれかの形をしている.

〔I〕 wff P が、$\wedge$, $\vee$ を含まない式のとき、

$P = q_1 \cdots q_i M_1 q_{i+1} \cdots q_n A$

(q_l $(1 \le l \le n)$ は限定記号、M_1 は様相記号)

このときは、この式自身が標準形となる.

〔II〕 wff P の well formed part として、次の二つの形が現われる．

(IIa) $q_1 \cdots q_i M_1 q_{i+1} \cdots q_n A \vee q'_1 \cdots q'_j M_2 q'_{j+1} \cdots q'_m B$

(IIb) $q_1 \cdots q_i M_1 q_{i+1} \cdots q_n A \wedge q'_1 \cdots q'_j M_2 q'_{j+1} \cdots q'_m B$

（ここで、$q_k\, q'_l$ $(1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l \leq m)$ は限定記号、M_1, M_2 は、様相記号または空、A, B は任意の wff ）

M_1 または M_2 が空の場合は、以下の変形は行なわない．

(IIa) 式に対し、必要に応じ束縛変数の書き換えを行ない、(1)〜(6) を使うと、

(IIa) $\equiv q''_1 \cdots q''_k (M_1 q_{i+1} \cdots q_n A \vee M_2 q'_{j+1} \cdots q'_m B)$

（ここで、q''_l $(1 \leq l \leq k)$ は限定記号．）

$M_1 = M_2 = N$ のとき、(T18) より、

(IIa) $\equiv q''_1 \cdots q''_k N (q_{i+1} \cdots q_n A \vee N q'_{j+1} \cdots q'_m B)$

$M_1 = M_2 = \Diamond$ のとき、(T23) より、

(IIa) $\equiv q''_1 \cdots q''_k \Diamond (q_{i+1} \cdots q_n A \vee q'_{j+1} \cdots q'_m B)$

$M_1 = N$, $M_2 = \Diamond$ のとき、(T19) より、

(IIa) $\equiv q''_1 \cdots q''_k N (q_{i+1} \cdots q_n A \vee \Diamond q'_{j+1} \cdots q'_m B)$

$M_1 = \Diamond$, $M_2 = N$ のとき、(T19) より、

(IIa) $\equiv q''_1 \cdots q''_k N (q'_{j+1} \cdots q'_m B \vee \Diamond q_{i+1} \cdots q_n A)$

以上のような変形を、(IIa) 式に対し行なう．また、(IIb) 式に対しても、(T20), (T21), (T22) を使い、同様の変形を行

なう.
これらの変形を, wff P の適用できうるすべての well formed part に対し適用し、この結果に、再び(Step3.)を適用する. この操作をくり返し適用する.

(Step1.)〜(Step4.)を、MLPC の wff P に対し、適用して得られた式が、MLPC の wff P に対する標準形である.
(ここで、得られた標準形が、wff P に対し、同値となることは、(Step1.)〜(Step4.)のアルゴリズムより明らか.)

[標準形の作成例]

$\sim(\Diamond N(x)(P(x)\supset Q(x))\supset N(\exists y)\Diamond P(y)\supset(\exists z)\Diamond P(z)))$

(Step1.), (Step2.)を適用、

$\Diamond N(x)(\sim P(x)\vee Q(x))\wedge\Diamond((\exists y)\Diamond P(y)\wedge(z)N\sim Q(z))$

(Step3.) を適用、

$N(x)(\sim P(x)\vee Q(x))\wedge\Diamond((\exists y)\Diamond P(y)\wedge(z)N\sim Q(z))$

(Step4.) を適用.

$N(x)(\sim P(x)\vee Q(x))\wedge\Diamond(\exists y)(z)\Diamond(P(y)\wedge N\sim Q(z))$

$N(x)(\sim P(x)\vee Q(x))\wedge(\exists y)(z)\Diamond(P(y)\wedge N\sim Q(z))$

$\underline{(\exists y)(z)N((x)(\sim P(x)\vee Q(x))\wedge\Diamond(P(y)\wedge N\sim Q(z))}$

〜〜〜 部の式が、求める標準形である.

第4章

第3章で得られたMLPCの標準形に対し、翻訳規則*を適用し、その式に対し、導出原理を使い、定理証明を行なう.

4.1 〔定理証明〕

MLPCの任意のwff P について、P がMLPCで定理であれば、P^*は$\overline{ELPC}$の定理であり、ELPCの定理でもある. また、P がMLPCで定理でなければ、$\overline{ELPC}$の定理でもなく、ELPCの定理でもない. なぜなら、$\overline{ELPC}$とELPCは、公理と推論規則が等しいからである. 従って、MLPCのwff P が定理であることは、ELPCの機械的定理証明(導出原理)によって証明される.

第3章の〔例〕を使い、簡単に導出原理について述べる.

$$\Diamond N(x)(P(x) \supset Q(x)) \supset N((\exists y)\Diamond P(y) \supset (\exists z)\Diamond P(z)) \quad \text{---} \ (1)$$

が、MLPCの定理であることを示す.

〔(1)式を否定し、標準形を作る.〕

$$(\exists y)(z)N((x)(\sim P(x) \vee Q(x)) \wedge \Diamond(P(y) \wedge N \sim Q(z)))$$

〔Rule *適用〕

$$(\exists y^*)(z^*)(K)((x^*)(\sim P^*(x^*, K) \vee Q^*(x^*, K)) \wedge (\exists K)(P^*(y^*, K) \wedge (K) \sim Q^*(z^*, K)))$$

Rule *の7を適用すると、Kに対し、二重,三重の束縛が生じ

る．導出原理において、この不備を避けるため、すべての原子式に対し、その中の変数IIが、最も内側の限定記号によってのみ、束縛されるようにする．

$$(\exists y^*)(z^*)(K)((x^*)(\sim P^*(x^*, K) \vee Q^*(x^*, K)) \wedge (\exists \mu)(P^*(y^*, \mu) \wedge (\nu) \sim Q^*(z^* \nu)) \quad --- \quad (2)$$

この操作の正当性を、次の例を使い、MLPC のセマンティックスをもとにして示そう．

(例) $N(\exists x)(P(x) \vee \Diamond Q(x))$

$$\downarrow *$$

$$(K)(\exists x^*)(P^*(x^*, K) \vee (\exists K) Q^*(x^*, K)$$

$$\downarrow \circledcirc$$

$$(K)(\exists x^*)(P^*(x^*, K) \vee (\exists \mu) Q^*(x^*, \mu))$$

MLPC のモデルを、$< W, R, D, V >$ とする．

$V(N(\exists x)(P(x) \vee \Diamond Q(x)), w_i) = 1$ とおくと、

$(\forall w_j | w_i R w_j)(\exists V')(< V'(x), w_j > \in V'(P)$ または、

$(\exists w_k | w_j R w_k)(< V'(x), w_k > \in V'(Q)))$

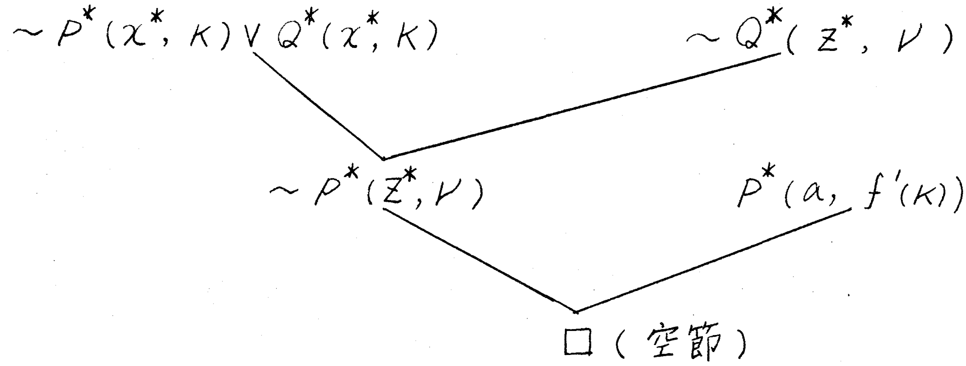
ここで、$(\forall w_j | w_i R w_j)$ は、"$w_i R w_j$ なるすべての w_j に対し、" を意味し、V' は、x に対する付値のみが V と異なる付値を表わす．

R が同値関係である故、$w_i R w_j$ であるような w_k と、$w_i R w_j$ となるすべての w_j に対し、$w_j R w_k$ となる w_k は同じである．

従って、w_k（$\overline{ELPC}$ では μ）は、$w_j(K)$ に束縛されていないことになり、◎の変形が正しいことがわかる。

〔(2)式に対し、Skolem化を行ない、節集合作成〕

$$\{\sim P^*(x^*, K) \vee Q^*(x^*, K),\ P^*(a, f'(K)),\ \sim Q^*(z^*, \nu)\}$$



これで、$\Diamond N(x)(P(x) \supset Q(x)) \supset N((\exists y)\Diamond P(y) \supset (\exists z)\Diamond P(z))$ が定理であることが証明された。

第5章

〔跋〕　本研究では、一階様相述語論理の $S5$ の体系の、ある完全なモデルをもとに、様相論理の外延的論理への翻訳と、その機械的定理証明を試みたが、他のモデル（各possible worldごとに、異なる対象領域をもつモデル(kripke model.etc)に対しては、外延的論理へのうまい翻訳が存在し、導出原理等の定理証明が可能かどうか、効率的かどうかは、今後、

さらに研究が必要であろう.

〔謝辞〕 本論文を書くにあたり、有益な助言、御指導をいただいた、静岡大学、松本和夫教授に、感謝の意を表わす.

〔参考文献〕

〔1〕 Aldo Bressan : General Interpreted Modal Calculus, Yale Univ. Press, 1972.

〔2〕 G. E. Hughes, M. J. Cresswell : An Introduction to Modal Logic, Methuen & Co. Ltd., 1968.

〔3〕 C. L. Chang, R. C. Lee : Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, Academic Press, 1973.

〔4〕 中松, 鈴木 : "内包の外延への還元可能性について", 京大数理解析研究所講究録 296, 1977.