数理解析研究所講究録
第 322 巻 1978 年 178-193

自己診断システムにおけるネットワーク構造と計算複雑さの関係

広島大　工　　阿江　忠
大崎　重義

1. まえがき

分散形計算機システムの各ユニットを節点に，2つのユニット間の検査を有向枝に対応させると有向グラフ（ネットワークと呼ぶ）が得られる。各ユニットu_iは，$u_j \neq u_i$なる　① ユニットu_jを検査可能である　and/or
② 〃 u_jによって検査されることが可能である

とする。u_iがu_jを「故障」と判定すれば1，「正常」と判定すれば0をu_iからu_jへ向う枝の重みとして与える。すべての枝の重みを要素とするベクトルをシンドロームという。シンドロームから真に故障の疑いの強いユニット群を指摘するのが，自己診断システムにおける主なる目的である。ここでネットワークと称している自己診断のためのモデルはPreparata et al.[1]以来，いろいろ議論されて

きており，実用のための変形モデルも数多いし，診断の仕方もいろいろ提案されてきている[2]。本稿では，もっとも基本的な診断である"1回の検査から得られるシンドロームよりすべての故障ユニットを識別する同時故障診断[1]"に必要な計算の手数を議論する。

この問題が，一般には，NP-complete であることがすでに指摘されているので[3][4][5]，我々は

① NP-complete であるより小さいクラス，と

② 多項式時間で解けるできるだけ大きいクラス

をネットワークの構造で規定する試みを示す。

2．定義

ネットワークNを有向グラフ $G=(V,E)$，ここに V はユニットの集合 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ に対応する，であらわす。

$(u_i,u_j)\in E$ の重みを e_{ij} とするとき

$$e_{ij}=\begin{cases}0 & \text{if } u_i \text{ が } u_j \text{ を"正常"と判定}\\ 1 & \text{if } u_i \text{ が } u_j \text{ を"故障"} \quad \text{〃}\\ \text{undefined}^{\dagger}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

である。

故障ユニットの集合Fは次の2つの条件を満すものとする。

†）この場合 枝 (u_i,u_j) そのものが定義されない。

条件1　$u_i \in \bar{F} = V - F$ ，$u_j \in F$ なるすべての $(u_i, u_j) \in E$ に対して $e_{ij} = 1$

条件2　$u_i, u_j \in \bar{F}$ なるすべての $(u_i, u_j) \in E$ に対して　$e_{ij} = 0$

このような $F \subseteq V$ を 無矛盾故障集合 という。

計算複雑さについてはチューリング機械のそれを，ほぼ(6)の定義にしたがって用いる。

3．一般の場合の計算複雑さ

図1のようなシンドロームをもつネットワークを考えてみよう。無矛盾故障集合をすべて列挙すると $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $\{u_1, u_3, u_4\}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{u_1, u_2\}$, $\{u_1, u_3\}$, $\{u_3, u_4\}$ となる。

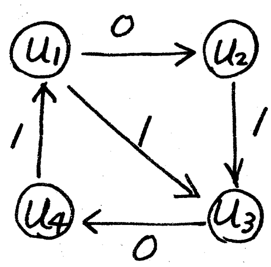


図1．

通常，故障の発生はユニット数が多くなるにつれ同時に起るひん度は減少するという経験的な事実から，真に故障の疑いの強いユニット群として，最小個数の元からなる無矛盾故障集合をその候補として挙げる。これを最小無矛盾故障集合と呼び，min.F と略す。+

+) 実用的にはさらにユニーク性も仮定されることが多いが，ここでは省く。

一般には min. F を求める問題を考えるが，すでに，"ある正整数 t が与えられたとき，$|F| \leq t$ なる F が存在するか？"という問題が NP-complete となることが示されている(3)(4)(5)。

我々はさらにネットワークの構造としてループ・フリー（acyclic）という条件をつけても同じ問題が NP-complete となることを指摘しておく。

［定理1］ネットワーク G_N がループ・フリーであっても，「ある与えられた正整数 t に対して，$|F| \leq t$ なる F が存在するか？」という問題は NP-complete である。

（証明）問題は明らかにクラス NP に属す。次に NP-complete であることがわかっている"節点被覆問題"がこの問題に多項式時間で変換できることをいう。

〈節点被覆問題〉 無向グラフ $G=(V,E)$ に対し，ある正整数 t が与えられたとき，$|X| \leq t$ なる $X \subseteq V$ がすべての節点を被覆する（任意の枝の少くとも一方の節点は X に属す）ような X は存在するか？

無向グラフ G に適当に向きをつけループ・フリーな（acyclic）有向グラフ G' をつくる†。次に，G' のすべての有向枝に重み 1 をラベルづけしたラベル付有向グラ

†）節点に適当なオーダをつけておけば acyclic にするのは容易。

つ G'' をつくる。この変換が多項式時間でできるのは明らか。さらに，

"節点被覆問題"が解をもつ必要十分条件は，G が上のようにして G'' に変換されたとき，ネットワーク G'' が $|F| \leq t$ な無矛盾故障集合 F をもつことである…も容易にわかる。

q.e.d.

つまり，"向き"に制限をつけても問題の緩和にならないことを定理1は示している。

4. 直並列ネットワークにおける計算複雑さ

ネットワークの構造を直並列に制限すると，最小無矛盾集合を求める多項式時間アルゴリズムが存在する。

[定義] 直並列ネットワーク（s-p ネットワークと略す）

i) 異なる2つの節点 v_i, v_j をもつ枝は2節点 v_i, v_j をもつ s-p ネットワークである。

ii) 2つの s-p ネットワークを

(a) 図2-(1)のように直列に接続したネットワークは v_i, v_j' を2節点にもつ,

(b) 図2-(2)のように並列に接続したネットワークは v_i, v_j を2節点にもつ,

(それぞれ) S-P ネットワークである。

iii) ii)を有限回くり返して得られるもの(それのみが) S-P ネットワークである。

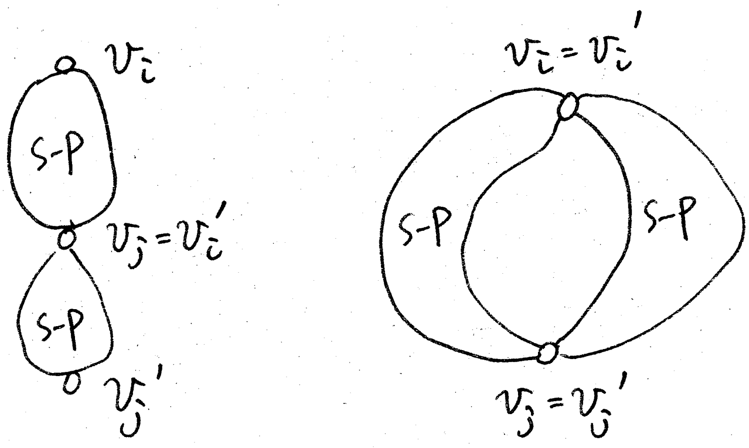


図2

なお，向きは問題にしていないから，当然，有向ループも存在しうる。

次の定義は証明のためのものである。

[定義] 次の条件を満す有向グラフ $G=(V,\Gamma)$ (ただし，Γ は $G=(V,E)$ に対し，$\Gamma x = \{y \mid (x,y) \in E\}$ なる対応をあらわす)を<u>シーケンシャル・グラフ</u>という。

i) $V = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$, $V_i \cap V_j = \phi$

for any i, j but $i \neq j$

ii) $V_0 = \{u \mid \Gamma^{-1} u = \phi\}$, $V_1 = \{u \mid \Gamma^{-1} u \subset V_0\}$,

$V_2=\{u \mid \Gamma^{-1}u \subset V_1\}$, ……, $V_k=\{u \mid \Gamma^{-1}u \subset V_{k-1}\}$,

$\Gamma V_k=\phi$.

シーケンシャル・グラフの例を図3に示す。

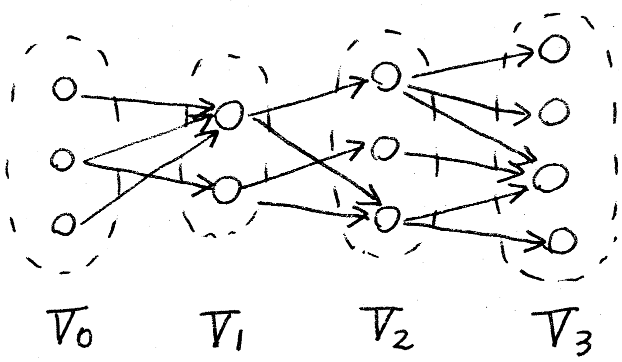


図 3.

[補題1] シーケンシャル・グラフにおける最短道問題（shortest path problem）には $O(|E|)$ のアルゴリズムが存在する。ただし，$|E|$は枝の数をあらわす。

（証明略）

[定理2] 直並列ネットワークに対して最小無矛盾集合を求める $O(n\log n)$ のアルゴリズムが存在する。ただし，nは節点数である。

（証明）与えられた直並列ネットワークの2つの節点（これを u_a，u_b とする）を見出すことは $O(n)$ でできる[7]。なお，一般に直並列ネットワークでは，（2節点間の枝の数が高々1である）平面グラフの性質 $|E| \le 3|V|-6$

が成立つから，$O(|E|)$ と $O(|V|) = O(n)$ は同じである。アルゴリズムは"シーケンシャル・グラフにおける最短道問題"をサブルーチンとして用いる。

まず，図4のようなラベルつきシーケンシャル・グラフを<u>ブロック</u>と呼ぶ。

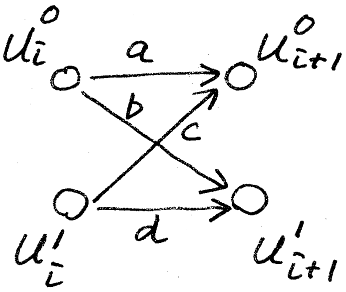


図 4

Procedure A

入力： 図5のようにブロックを $u_{i+1}^0 = u_j^0$，$u_{i+1}^1 = u_j^1$ … のように直列につないだラベルつきシーケンシャル・グラフ

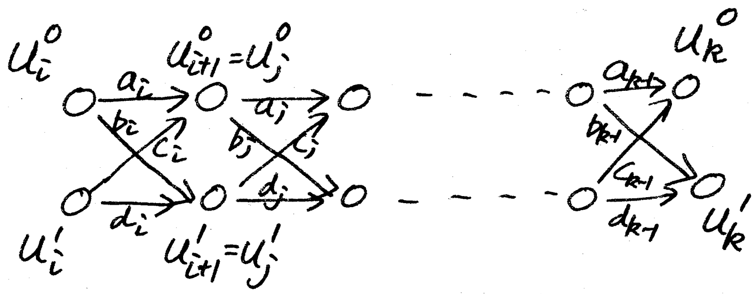


図 5

出力： u_i^x から u_k^y $(x = 0, 1, y = 0, 1)$ へ至る最短道の長さを有向枝のラベルとしてもつブロック

Procedure B

入力： 図6のようなブロックを

$u_i^0 = u_j^0 = \cdots = u_k^0$

$u_i^1 = u_j^1 = \cdots = u_k^1$

$u_{i+1}^0 = u_{j+1}^0 = \cdots = u_{k+1}^0$

$u_{i+1}^1 = u_{j+1}^1 = \cdots = u_{k+1}^1$

のように並列につないだシーケンシャル・グラフ

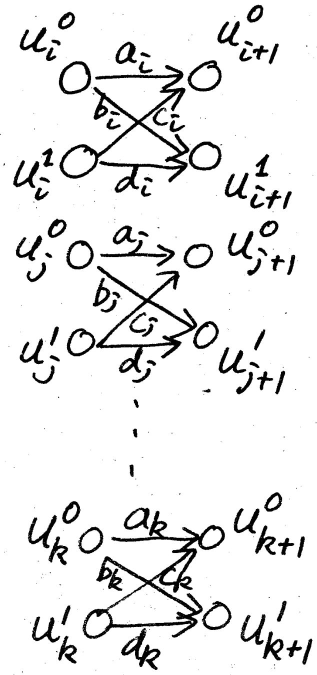


図6

出力：並列枝のラベルをすべて加算した値をラベルとしてもつ図7のようなブロック

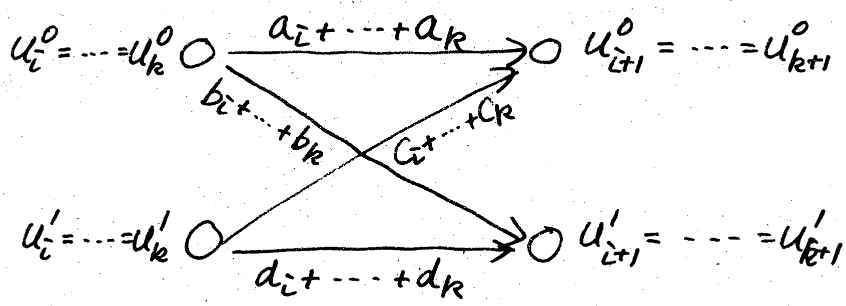


図7

2節点 u_a, u_b をもつ直並列ネットワークに対して

(1) (節点のラベルを残したまま) 素な道の集合 $\{P_i\}$ に

変換する。

（2）素な道 P_i の枝は，ラベルと向きにしたがい，図8のようなブロックに変換される。

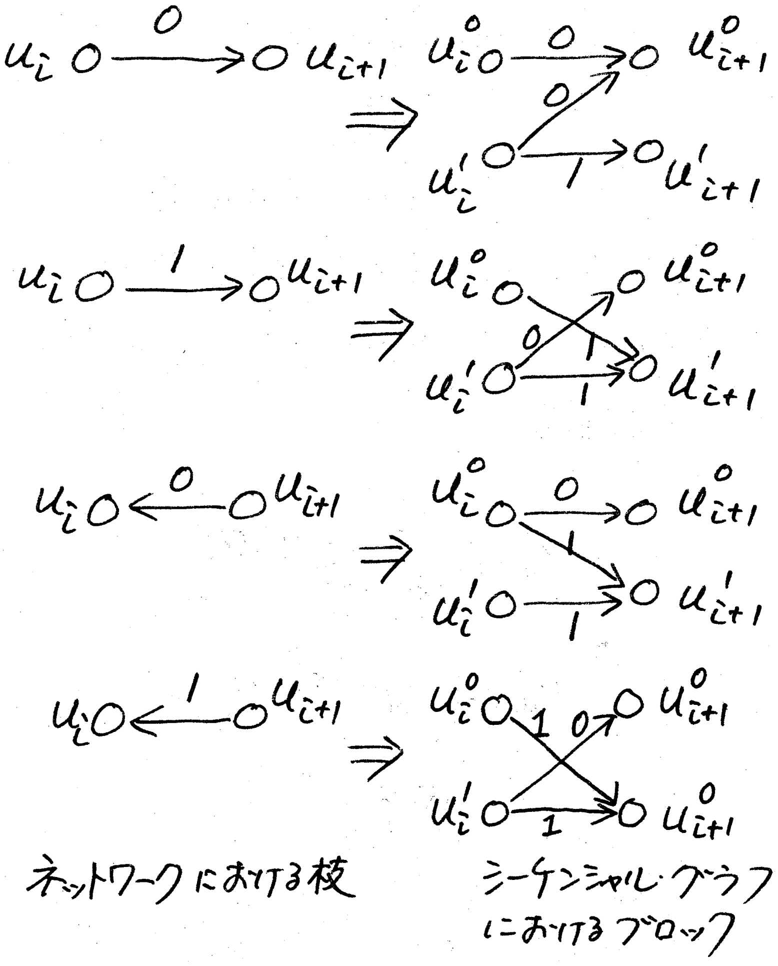


図8.

直並列ネットワークの節点 u_a をソースに節点 u_b をシンクとするフローを考えると各々の素な道 P_i の向きは一意に定まる。その向きに従って図8の変換を行うと P_i から1

つのシーケンシャルグラフが得られる。

（3）それぞれの P_i から対応するシーケンシャル・グラフ G_{P_i} を求める。

（4）それぞれの G_{P_i} に Procedure A を適用する。（ブロックの個数が減少する。）

（5）ブロックどうしの接続が

直列ならば　Procedure A

並列ならば　Procedure B

を順次適用して，全体が1つのブロック（図9）になるまで繰返す。

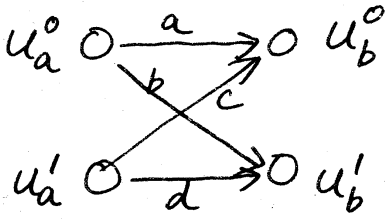


図9

図9において

$$a\ ,\ b\ ,\ 1+c\ ,\ 1+d$$

のうち最小のものを選ぶ。それが，$|\min.F|$ であり，元である故障ユニットの指摘は u_a^x $(x=0,1)$ から u_b^y $(y=0,1)$ への（シーケンシャル・グラフ上の）最短道において上添字1をとった節点に対応するユニットを集めれば

より。

〈アルゴリズムの正当性〉

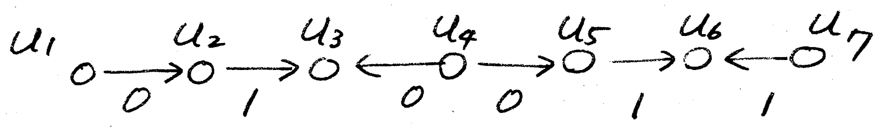
図8の変換はユニットの検査の定義を図示したにほかならない。上添字0はそのユニットが"正常"であることを，1はそのユニットが"故障"であることをあらわす。ブロックにおける有向枝のラベルは"故障ユニット数の増加分"をあらわす。（有向枝が上添字0の節点へ向うときは枝ラベルは0，上添字1の節点へ向うとき枝ラベル1となる。）

Procedure A および Procedure B における出力の枝ラベルの算出も，ブロックにおける故障ユニット数最小を求める算法になっていることは容易にわかる。最後のブロック（図9）では u_a^1 から出る有向枝は u_a 自体が故障の場合であるから1を加えたラベルの値で他と比較する。

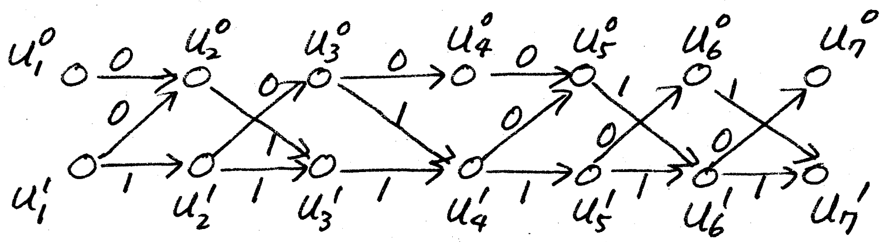
〈計算手数〉

（1）〜（4）はいずれも高々 $O(n)$。Procedure A も Procedure B もそれ自体は高々 $O(n)$。（前者は補題1より，後者は明らか。）（5）でブロックの縮約のために繰返す手数は高々 $C \log n$（Cは定数）回。したがって，手数の総計は高々 $O(n \log n)$ である。

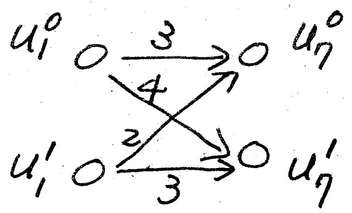
q.e.d.



(a)



(b)



(c)

図10

簡単のため ステップ(3)と(4)の例だけ図10に示しておく。もし，図(10)(a)が与えられたネットワークであれば(c)で u_1^0 から u_7^0 への枝（ラベル3）と u_1^1 から u_7^0 への枝（ラベル2に1を加える）が該当するから，その道を図10(b)から求めればよい。このように定理2は min. F をすべて求めても手数のオーダは変らないことを意味している。

なお，定理2の系として，直並列ネットワークの部分ネットワークについても min. F を求める $O(n \log n)$ アルゴリズムの存在することが示せる。 この結果，直並列ネットワークを若干拡張したDチャート・ネットワーク（Dチャート・グラフ[7]であらわされるネットワークの意味）の最小無矛盾集合を求める問題はやはり多項式時間でよいことがわかる。

5．まとめ

故障の性質や診断の方法を変えると多項式時間アルゴリズムの存在することはすでに知られていたが[3][5]，基本的な最小無矛盾集合を求める問題の場合，ネットワーク構造との関係については，単一ループの場合 $O(n)$ の手数でよいことが知られていたにすぎない[5]。

本稿の結果である"直並列（あるいはDチャート）ネットワークの最小無矛盾集合は多項式時間で求められる"は平面グラフの部分クラスに対する解法を示している。 したがって，ネットワーク構造として"平面グラフ"の場合，計算手数がどうなるかはやはり興味が残る[8]。

文献

(1) F.P. Preparata et al. : "On the connection assignment problem of diagnosable systems". IEEE Trans., EC-16, 6, pp. 848-854 (Dec. 1967)

(2) (モデル議論のまとめとして)
中野ほか : "自己診断可能なシステムに関する研究" 信学技報 R76-10 (1976-07)

(3) T. Kameda et al. : "A diagnosing algorithm for networks", Information & Control, 29, pp. 141-148 (1975)

(4) S.N. Maheshwari et al. : "On models for diagnosable systems and probabilistic fault diagnosis", IEEE Trans., C-25, 3. pp. 228-236 (March 1976)

(5) 藤原ほか : "システム診断における計算複雑度について", 信学技報 EC77-8 (1977)

(6) A.V. Aho et al. : "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison-Wesley (1974)

(7) 谷口ほか : "Dチャート状プログラムの最適化について ― IN関数を求めるO(N)アルゴリズム ―", 信学論(D), 57-D, 12, pp. 668-675 (1974-12)

(8) M.R. Garey et al. : "The planar hamiltonian circuit problem is NP-complete", SIAM J on Computing, 5, 4, pp. 704-714 (1976)