数理解析研究所講究録
第 323 巻 1978 年 17-30

H^pによる平面領域の分類

茨城大・理　　荷見 守助

1. 序.　平面領域即ちRiemann球面Sの連結開集合をHardy族H^pを用ゐて分類する問題についての最近の結果を述べる. 平面領域全体のなす集合族を$\mathcal{D}$と書く. 任意の$D \in \mathcal{D}$と実数$0 < p < \infty$に対し$H^p(D)$によりD上の正則函数fで$|f|^p$がD上で調和優函数を持つもの全体の集合を表はす. Dが單位開円板の時はこの定義が古典的なHardy族を与へることは周知である. 分類論の記法に従って$O_p = \{D \in \mathcal{D} : H^p(D) = \{\text{定数}\}\}$とおく. O_pに属するDを特徴付ける問題は極めて興味があるが, 可成難しいと思はれる. そこで相異なるp, qに対するO_p, O_qの関係を調べることにする. $q < p$ならば$H^q(D) \supseteqq H^p(D)$であるから, $O_q \subseteqq O_p$は直ぐ分る. 更に$O_p^- = \bigcup_{q<p} O_q$, $O_p^+ = \bigcap_{q>p} O_q$とおけば次の事は容易である:

(1)　$O_G \subseteqq O_{LA} \subseteqq \bigcap_{q>0} O_q \subseteqq O_p^- \subseteqq O_p \subseteqq O_p^+ \subseteqq \bigcup_{q<\infty} O_q \subseteqq O_{AB}$.

但し, $D \in \mathcal{D}$に対し$AB(D) = \{D\text{上の有界正則函数}\}$, $LA(D)$

$=\{f: f$ は D 上で正則で，$\log^+|f|$ は D 上で調和優函数を持つ$\}$ で，$O_{AB}=\{D\in\mathcal{P}: AB(D)=\{$定数$\}\}$，$O_{LA}=\{D\in\mathcal{P}: LA(D)=\{$定数$\}\}$ である．O_G は Green 函数のない $D\in\mathcal{P}$ の全体を表はす．(1) の包含関係の中で $O_G=O_{LA}$ は既知なのでその他を考察する．統一的に考へる為に Orlicz 族を導入する．先づ，$[0,\infty)$ 上で定義された実函数 $\varphi(t)$ が <u>Orlicz 函数</u>であるとは，φ が連続，非減少，非定数で $\varphi(0)=0$ 且つ $\varphi(e^t)$ が凸函数であることを云ふ．Orlicz 函数 φ と $D\in\mathcal{P}$ に対し，$H^\varphi(D)=\{f: f$ は D 上で正則で，$\varphi(|f|)$ は D 上で調和優函数を持つ$\}$ とおく．例へば $\varphi(t)=t^p$ ならば $H^\varphi=H^p$，$\varphi(t)=\log^+t$ ならば $H^\varphi=LA$ である．$O_\varphi=\{D\in\mathcal{P}: H^\varphi(D)=\{$定数$\}\}$ とおく．

<u>定理 1.</u> φ，ψ を Orlicz 函数とする．任意の $\alpha>0$ に対し $\psi(\alpha t)/\varphi(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$ が成立つ時は，$O_\psi \subsetneq O_\varphi$．

定理の証明を応用して，$D\in O_\varphi$ 且つ $\dim H^\psi(D)=\infty$（しかも H^ψ は真性特異点を持つ函数を含む）なる D を作ることが出来る．又 $AB(D)$ が充分多くの函数を含む（例へば $AB(D)\cong AB($単位円板$)$）としても，$AB(D)$ の Hilbert 空間 $H^2(D)$ の中での直交補空間が無限次元になり得る．

以前の結果について述べておく．Hardy 族による分類論に於ける最初の著しい結果は Heins [ ] で，Riemann 面の族の範囲では (1) の包含関係は全て不等号であることが示されたが，

平面領域については $O_{LA} \subsetneqq O_1$ を示したに止った．平面領域に関する本質的な進歩は Hejhal [ ] により，

$$O_{LA} \subseteqq O_1^- \subsetneqq O_1 \subseteqq O_{3/2}^- \subsetneqq O_{3/2} \subseteqq O_2^- \subsetneqq O_2 \subseteqq O_{5/2}^- \subsetneqq O_{5/2} \subseteqq \cdots \subsetneqq \bigcup_{\ell<\infty} O_\ell \subsetneqq O_{AB}$$

が示された．其後，小林昇治 [ ] により $1 \leqq n/2 < p$ (n は整数，p は実数) ならば $O_{n/2} \subsetneqq O_p$ が注意された．小林氏は亦 $p \geqq 1$ に対する不等関係を証明された由であるが未発表である．一方 Heins に続いて Obrock [ ] は Orlicz 族による Riemann 面の分類を試み次の結果を得た．"φ, ψ が Orlicz 函数で $\int^\infty \psi(\alpha\varphi^{-1}(t))(1+t^2)^{-1}dt < \infty$ ($\forall\alpha>0$) ならば，$O_\psi^{(R)} \subsetneqq O_\varphi^{(R)}$." ここで $O_\varphi^{(R)}$ は Riemann 面の範囲で O_φ を考へることを意味する．$\int^\infty \psi(\varphi^{-1}(t))(1+t^2)^{-1}dt < \infty \Rightarrow \psi(t)/\varphi(t) \to 0$ ($t \to +\infty$) (逆は不成立) であるので，Obrock の結果は我々の定理に含まれる．

2. 除外集合 N_φ の構成．φ を Orlicz 函数とする．$E \subset S$ が <u>N_φ 級の除外集合</u> (或は単に <u>N_φ 集合</u>) であるとは，E が有界な全非連結閉集合であって，E を含む任意の平面領域 V に対し $H^\varphi(V-E) = H^\varphi(V)$ が成立つことを云ふ．

<u>補題 1.</u> Orlicz 函数 $\varphi(t)$ が $(\log t)/\varphi(t) \to 0$ ($t \to +\infty$) を満足する時は，次の條件を満たす Orlicz 函数 $\lambda(t)$ が存在する：(i) 充分大きな全ての t に対し $\lambda(2t) \leqq 2\lambda(t)$；(ii) $(\log t)/\lambda(t) \to 0$ ($t \to +\infty$)；(iii) $\lambda(t)/\varphi(t) \to 0$，$\lambda(t)/(\log t)^2 \to 0$ ($t \to +\infty$)．

補題 2. φ は Orlicz 函数で，$(\log t)/\varphi(t) = o(1)$，$\varphi(2t)/\varphi(t) = O(1)$，$t \to +\infty$，を満たすとする．又 E を全非連結な有界閉集合 $\subset S$ とすると，$E \in N_\varphi \Leftrightarrow S-E \in O_\varphi$．（［　］参照）

$z_0 \in S$ $(|z_0| \neq \infty)$，$0 < r_0 < +\infty$，に対して，$\Gamma(z_0; r_0) = \{|z - z_0| = r_0\}$ とおく．特に $z_0 = 0$ の時は単に $\Gamma(r_0)$ と書く．

補題 3. $0 < a < b < +\infty$ とし，F を $\{|z| \geqq b\}$ に含まれる有界閉集合で $D_0 = \{a < |z| \leqq \infty\} - F$ が連結なるものとする．μ を D_0 に関する ∞ の調和測度とすると，

$$\max\left\{\frac{ds}{d\mu}(z) : z \in \Gamma(a)\right\} \leqq A\left(\frac{a}{b}\right)\frac{2\pi a}{\mu(\Gamma(a))}.$$

但し，ds は $\Gamma(a)$ 上の線素で，$A(t)$ $(t > 0)$ は非減少函数である．

証明は円環 $\{a < |z| < b\}$ 上で Harnack 不等式を用ゐる．

補題 4. $0 < a_0 < a < b < +\infty$ とし，$F_1, \cdots, F_k$ を $\{|z| > b\}$ に含まれる有限個の有界閉集合で，各 $i = 1, \cdots, k$ に対し $S - F_i$ は連結で全ての F_j，$j \neq i$，を含むものとする．$l(n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は正数の増加列で $l(n)/n = o(1)$，$n \to \infty$，且つ $l(n) \geqq n^{1/2}$ なるものとする．又，$w_{n,j} = a_0 \exp(2\pi j i/n)$，$K_{n,j} = \{|z - w_{n,j}| \leqq e^{-l(n)}\}$，$1 \leqq j \leqq n$，且つ $K_n = \bigcup_{j=1}^{n} K_{n,j}$ とおく．全ての F_j の対数容量は正であるとし，充分大きな n のみを考へることにする．従って $K_n \subset \{|z| < a\}$ 且つ $K_{n,j}$ $(1 \leqq j \leqq n)$ は互に素であるとする．更に，μ (μ_n) により $\{a_0 < |z| \leqq \infty\} - F$ $(S - K_n - F)$ に関する ∞ の調和測度とする．但し $F = \bigcup_{j=1}^{k} F_j$．この時，任意の正

数 $\varepsilon>0$ に対し整数 $N(\varepsilon)=N>0$ を適当に大きく取れば，$n\geqq N$ の時

$$|\mu(\Gamma(a_0))-\mu_n(\partial K_n)|<\varepsilon\ ;\ |\mu(F_j)-\mu_n(F_j)|<\varepsilon\quad(1\leqq j\leqq k);$$

$$\mu_n(\partial K_{n,j})\geqq(Bn)^{-1}\mu(\Gamma(a_0)),\quad(1\leqq j\leqq n).$$

但し，$B=B(a/b)$ は比 a/b のみに依存する定数で a/b の増加函数である．

<u>証明</u>．$b=1$ と仮定して証明する．先づ $\varepsilon'>0$ を

$$\max\{(1+\varepsilon')-(1+\varepsilon')^{-3},\ \varepsilon'\}<2^{-1}\mu(\Gamma(a_0))^{-1}\varepsilon$$

とし，$0<a'<a_0<a''<a$ を

$$(1+\varepsilon')^{-1}\mu(\Gamma(a_0))<\mu'(\Gamma(a'))<\mu''(\Gamma(a''))<(1+\varepsilon')\mu(\Gamma(a_0))$$

（但し，μ'，μ'' は夫々 $\{a'<|z|\leqq\infty\}-F$，$\{a''<|z|\leqq\infty\}-F$ に関する ∞ の調和測度）を満たすやうに選ぶ．

$G(z,w)=\log(|1-z\bar{w}|/|z-w|)$ を単位円板の Green 函数とし，ν_n により ∂K_n 上の正測度で一様な密度を持ち且つ全質量が 1 であるものを表はす．ν_n による Green ポテンシャルを $U_n(z)$ と書けば，

$$U_n(z)=\int_{\partial K_n}G(z,w)d\nu_n(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}G(z,w_{n,j}), & z\notin K_n,\\[2ex] \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j\neq i}G(z,w_{n,j})+\dfrac{1}{n}\log|1-z\bar{w}_{n,j}|+\dfrac{l(n)}{n}, & z\in K_{n,i}.\end{cases}$$

$l(n)/n\to 0$ であるから，$U_n(z)$ は $\Gamma(a')$ 上で一様に $\log\frac{1}{a_0}$ に収束し，整数 $N'=N'(\varepsilon')>0$ を大きく取れば

$$(1+\varepsilon')^{-1}\log\frac{1}{a_0}<U_n(z)<(1+\varepsilon')\log\frac{1}{a_0},\quad z\in K_n,\ n\geqq N'.$$

u'（又は u_n）により領域 $\{a'<|z|\leqq\infty\}-F$（又は $S-K_n-F$）上の Dirichlet 問題の解で，境界値：$\Gamma(a')$ 上で 1，∂F 上で 0（又は，∂K_n 上で 1，∂F 上で 0）に対応するものを表はす．$N''=N''(\varepsilon')$ を充分大きく取り，$n\geqq N''$ に対しては $K_n\subset\{a'<|z|<a''\}$ と $\overline{U}_n(z)\geqq(1+\varepsilon')^{-1}\log\frac{1}{a_0}$（$z\in\Gamma(a')$）が成立つやうにし，$N(\varepsilon)=\max\{N',N''\}$ とおく．この時，$n\geqq N(\varepsilon)$ ならば，∂K_n 上では

$$u_n(z)=1\geqq(1+\varepsilon')^{-1}\left(\log\frac{1}{a_0}\right)^{-1}\overline{U}_n(z)$$

が成立つから，同じ不等式が $|z|\leqq 1$ 上至る処成立つ．これから $\Gamma(a')$ 上で $u_n(z)\geqq(1+\varepsilon')^{-2}=(1+\varepsilon')^{-2}u'(z)$．従って同じ不等式が $\{|z|>a'\}-F$ 上で成立つ．これから

$$\mu_n(\partial K_n)=u_n(\infty)\geqq(1+\varepsilon')^{-2}\mu'(\Gamma(a'))\geqq(1+\varepsilon')^{-3}\mu(\Gamma(a_0)).$$

一方 K_n は $\Gamma(a'')$ の内側にあるので，

$$\mu_n(\partial K_n)\leqq\mu''(\Gamma(a''))\leqq(1+\varepsilon')\mu(\Gamma(a_0)).$$

これらより，$|\mu(\Gamma(a_0))-\mu_n(\partial K_n)|<\varepsilon$，　$|\mu(F_j)-\mu_n(F_j)|<\varepsilon$ を得る．

残りの不等式を得る為に n を $e^{-\ell(n)}<a-a_0$ となる様に固定し，$c=a^{1/2}$ とおく．u_j（u_{1j}，u_{2j}），$1\leqq j\leqq n$，により，領域 $S-K_n-F$（$S-K_n$，$\{|z|<1\}-K_n$）上の Dirichlet 問題の解で境界値：$\partial K_{n,j}$ 上で 1，他で 0，を満足するものを表はす．$m_i=\min\{u_{ij}(z):|z|=c\}$，$M_i=\max\{u_{ij}(z):|z|=c\}$，$i=1,2$，は j に無関係であり，Harnack 不等式より $M_i\leqq A'(a)\,m_i$，$i=1,2$，

なる定数 $A'(a)$ がある. A' は a の増加函数である. $\sum_{j=1}^{n} u_{1j}(z) \equiv 1$ $(z \in S-K_n)$ だから, $1 \leqq n M_1 \leqq A' n m_1 \leqq A'$ となり, $M_1 \leqq A'/n$. n を充分大きく取っておけば, $\Gamma(a)$ 上で

$$\sum_{j=1}^{n} u_{2j}(z) \geqq \frac{1}{2} \frac{\log a}{\log a_0}$$

と出来るから, $A' n m_2 \geqq n M_2 \geqq \sum_{j=1}^{n} u_{2j}(z) \geqq \frac{1}{4} \frac{\log a}{\log a_0}$ $(z \in \Gamma(c))$ となり, $A' m_2 \geqq \frac{1}{4n} \frac{\log a}{\log a_0} \geqq \frac{M_1}{4A'} \frac{\log a}{\log a_0}$. 円環 $\{a < |z| < b\}$ 上では $u_{2j}(z) \leqq u_j(z) \leqq u_{1j}(z)$, $j=1, \cdots, n$, だから

$$u_i(z) \leqq B' u_j(z), \quad z \in \Gamma(c), \quad 1 \leqq i, j \leqq n,$$

となる. 但し $B' = 4A'(a)(\log a_0)/(\log a)$. 上の不等式は $|z|>c$ に対しても成立つから, $\mu_n(\partial K_{n,i}) \leqq B' \mu_n(\partial K_{n,j})$, $1 \leqq i, j \leqq n$, となり, $\mu_n(\partial K_{n,j}) \geqq B'^{-1} n^{-1} \mu_n(\partial K_n)$. 充分大きな n に対しては $\mu_n(\partial K_n) \geqq \mu(\Gamma(a_0))/2$ となっているから, $B = 2B'$ とおくことにより, $\mu_n(\partial K_{n,j}) \geqq B^{-1} n^{-1} \mu(\Gamma(a_0))$. (終)

<u>定理 2.</u> φ は Orlicz 函数で, $(\log t)/\varphi(t) = o(1)$, $\varphi(2t)/\varphi(t) = O(1)$, $t \to \infty$, を満足するものとする. $0 < a < b < \infty$ とし, $F_1, \cdots, F_k$ を $\{|z| > b\}$ に含まれる有界閉集合で, $S - F_i$ は連結で F_j $(j \neq i)$ を全て含むものとする. この時, 任意の $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$ に対し, $E \in N_\varphi$ で $E \subset \{\delta a < |z| < a\}$,

$$|\mu(F_j) - \mu_E(F_j)| < \varepsilon, \quad 1 \leqq j \leqq k,$$

$$|\mu(\Gamma(a)) - \mu_E(E)| < \varepsilon$$

を満足するものが存在する. 但し, μ (μ_E) は $\{a < |z| \leqq \infty\} - F$,

$(S-E-F)$ に関する ∞ の調和測度である．ここで $F=\bigcup_{j=1}^{k}F_j$.

<u>証明</u>. 補題 1 を Orlicz 函数 $\varphi(t^{1/2})$ に適用し Orlicz 函数 $\lambda(t)$ を $(\log t)/\lambda(t)=o(1)$, $\lambda(t)/\varphi(t^{1/2})=o(1)$, $t\to\infty$; $\lambda(t)\leqq(\log t)^2$, $t\geqq 1$, の様に作る． $h(t)$, $l(t)$ を夫々 $\varphi(e^t)$, $\lambda(e^t)$ の逆函数とする．これらは $t\geqq{}^{\exists}t_1$ で定義され，狭義の増加函数となる．この時， $l(t)/t=o(1)$, $t\to+\infty$; $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, t(\varepsilon)\,(\geqq t_1)$: $h(\varepsilon^{-1}t)\leqq\frac{1}{2}l(t)$ $(t\geqq t(\varepsilon))$; $l(t)\geqq t^{1/2}$ ． 従って $\{l(n): n\geqq t_1\}$ は補題 5 の條件を満たす． F は 0 でない容量を持つとしてよい．我々は $0<\varepsilon<(1-\mu(F))/\mu(F)$ を仮定し， $\rho=(b/a)^{1/4}$, $B=B(a/b)$ とおく．

帰納法により $\{|z|\leqq a\}$ に含まれる閉円板の族 $\mathcal{K}_n$, $\mathcal{K}_n'$, $n=0,1,\cdots$, を構成する． $\mathcal{K}_n$ ($\mathcal{K}_n'$) は半径 r_n (r_n') の閉円板の族で，この合併を K_n (K_n') と表はし，領域 $S-K_n-F$ ($S-K_n'-F$) に関する ∞ の調和測度を μ_n (μ_n') と書く．先づ， $\mathcal{K}_0$ は空， $\mathcal{K}_0'$ は唯一個の閉円板 $\{|z|\leqq a\}$ より成るとする．従って， $\mu_0'=\mu$, $r_0'=a$ ． ρ の定義により $\{|z|\leqq\rho^4 r_0'\}$ は F と共通分を有しない．次に $\mathcal{K}_n$, $\mathcal{K}_n'$ まで定義出来たとする．即ち， $\mathcal{K}_n'$ は閉円板 $D_\alpha'=\{|z-w_\alpha|\leqq r_n'\}$ $(1\leqq\alpha\leqq N(n))$ より成り，円板 $\{|z-w_\alpha|\leqq\rho^4 r_n'\}$ は互に素であり又 F からも素であるとする．

そこで $\mathcal{K}_{n+1}$, $\mathcal{K}_{n+1}'$ を次の様に定義する． $\delta r_n'<r_{n+1}<r_n'$

とし, $D_\alpha=\{|z-w_\alpha|\le r_{n+1}\}$, $1\le\alpha\le N(n)$, とおく. K_{n+1} はこれらの円板より成るとする. r_{n+1} を r_n' に近くとり

$$\mu_{n+1}(F_j)-\mu_n'(F_j)\le\varepsilon\mu(F_j)/2^{n+1},\quad 1\le j\le k,$$

$$\mu_{n+1}(\partial D_\alpha)\ge\mu_n'(\partial D_\alpha')/2,\quad 1\le\alpha\le N(n)$$

が成立つ様にする. K_{n+1}' を定義するために整数 $N'(n+1)\ge\max\{t_1, n+1\}$ を選ぶ, これは後で固定する.

$$w_{\alpha,j}=w_\alpha+r_{n+1}\exp[2\pi ji/N'(n+1)],\quad 1\le j\le N'(n+1),$$

$$N(n+1)=N(n)N'(n+1),\quad r_{n+1}'=\exp[-l(N(n+1))],$$

$$D_{\alpha,j}'=\{|z-w_{\alpha,j}|\le r_{n+1}'\},\quad 1\le j\le N'(n+1),$$

とおき, $K_{n+1}'=\{D_{\alpha,j}' : 1\le\alpha\le N(n),\ 1\le j\le N'(n+1)\}$ とする. そこで $N'(n+1)$ を充分大きく選んで次のことが成立つ様にする.

(a) $\{|z-w_{\alpha,j}|\le\rho^4 r_{n+1}'\}$ は互に素で, F からも素である;

(b) $|\mu_{n+1}(F_j)-\mu_{n+1}'(F_j)|\le\varepsilon\mu(F_j)/2^{n+2}$, $1\le j\le k$;

(c) $\mu_{n+1}'(\partial D_{\alpha,j}')\ge(BN'(n+1))^{-1}\mu_{n+1}(\partial D_\alpha)$, $1\le j\le N'(n+1)$, $1\le\alpha\le N(n)$

(d) $r_{n+1}'\le 3^{-1}\min\{r_n'-r_n,\ r_n-\delta r_n'\}$;

(e) $h((n+1)(2B)^{n+1}N(n+1))\le\frac{1}{2}l(N(n+1))$.

これらから直ちに

$$|\mu_n(F_j)-\mu_{n+1}(F_j)|<\varepsilon\mu(F_j)/2^n,\quad \mu_n'(\partial D_\alpha')\ge(2BN(n))^{-1}\mu(\Gamma(a))$$

が分る. そこで

$$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{Cl}\left(\bigcup_{s=n}^{\infty}K_s\right)\right)$$

とおくとこれが求めるものである.

Eの構成法から　$\mu(\Gamma(a))-\varepsilon\mu(F)\leqq\mu_E(E)\leqq\mu(\Gamma(a))$　及び $\mu(F_j)\leqq\mu_E(F_j)\leqq\mu(F_j)+\varepsilon\mu(F)$ が簡単に分るから，$E\in N_\varphi$ が示されればよい．$\varphi(2t)/\varphi(t)=O(1)$, $t\to\infty$, だから補題2により $S-E\in O_\varphi$ を証明すればよい．$f\in H^\varphi(S-E)$ を任意の 0 でない元とし，u を $S-E$ 上での $\varphi(|f|)$ の調和優函数とする．f が定数であることを示す為に，先づ E が K_n' の内部に含まれることに注意する．$n\geqq 0$ を固定し，$D'=\{|z-w'|\leqq r'\}$ を K_n' の元の一つとする．(a)より円環 $\{r'\leqq|z-w'|\leqq\rho^4 r'\}$ は E, F 及び $K_n'-D'$ と素である．$|w-w'|=\rho r'$ とし ξ_w を円環 $\{r'<|z-w'|<\rho^2 r'\}$ に関する w の調和測度とすれば，Harnack不等式より

$$\frac{d\xi_w}{ds}\leqq\begin{cases}A'/(4\pi r') & (\Gamma(w';r')\text{ 上})\\ A'/(4\pi\rho^2 r') & (\Gamma(w';\rho^2 r')\text{ 上}).\end{cases}$$

こゝで，$A'=A'(\rho^{-2})$ は補題4の証明中に現はれたものである．又，$D'=\{r'<|z-w'|\leqq\infty\}-E$ （$D''=\{\rho^2 r'<|z-w'|\leqq\infty\}-E$）に関する ∞ の調和測度を η （η'）とすれば，$E\subseteq K_n'$ より

$$\eta'(\Gamma(w';\rho^2 r'))\geqq\eta(\Gamma(w';r'))\geqq\mu_n'(\partial D')$$
$$\geqq(2B)^{-n}N(n)^{-1}\mu(\Gamma(a)).$$

補題3より $A=A(\rho^{-2})$ として

$$\frac{ds}{d\eta}(z)\leqq A\frac{2\pi r'}{\eta(\Gamma(w';r'))}\qquad(z\in\Gamma(w';r')),$$
$$\frac{ds}{d\eta'}(z)\leqq A\frac{2\pi\rho^2 r'}{\eta'(\Gamma(w';\rho^2 r'))}\qquad(z\in\Gamma(w';\rho^2 r')).$$

さて，$|w-w'|=\rho r'$ に対して

$$\log|f(w)| \leqq \int \log|f(\xi)|\, d\xi_w(\xi).$$

$H(t)=\varphi(e^t)$ として

$$H(\log|f(w)|) \leqq \int H(\log|f(\xi)|)\, d\xi_w(\xi)$$
$$= \int \varphi(|f(\xi)|)\, d\xi_w(\xi) \leqq \int u(\xi)\, d\xi_w(\xi)$$
$$= \int_{\Gamma(w';r')} + \int_{\Gamma(w';\rho^2 r')} = I_1 + I_2 .$$

$$I_1 = \int_{\Gamma(w';r')} u(\xi) \frac{d\xi_w(\xi)}{ds(\xi)} \frac{ds(\xi)}{d\eta(\xi)} d\eta(\xi)$$
$$\leqq \frac{A'}{4\pi r'} \cdot \frac{2\pi A r'}{\eta(\Gamma(w';r'))} \int_{\Gamma(w';r')} u(\xi)\, d\eta(\xi)$$
$$\leqq \frac{AA'}{2\eta(\Gamma(w';r'))} \int_{\partial D'} u(\xi)\, d\eta(\xi) \leqq \frac{AA'u(\infty)}{2\mu(\Gamma(a))}(2B)^n N(n).$$

同様に，$I_2 \leqq \dfrac{AA'u(\infty)}{2\mu(\Gamma(a))}(2B)^n N(n)$．従って

$$H(\log|f(w)|) \leqq \frac{AA'u(\infty)}{\mu(\Gamma(a))}(2B)^n N(n).$$

nが充分大きければ，hを作用させて

$$|f(w)| \leqq \exp[h(C(2B)^n N(n))],$$

但し，$C = AA'u(\infty)/\mu(\Gamma(a))$．この両辺を円周$\Gamma(w';\rho r')$に沿って積分する．$r' = r_n' = \exp[-\ell(N(n))]$であるから，(e)により

$$\int_{\Gamma(w';\rho r')} |f(w)|\, ds(w) \leqq 2\pi\rho \exp[-\ell(N(n)) + h(C(2B)^n N(n))]$$
$$\leqq 2\pi\rho \exp[-\tfrac{1}{2}\ell(N(n))], \quad n \geqq \max\{n_0, C\}.$$

全ての$D' \in K_n'$に対する$\Gamma(w';\rho r')$の合併をΓ_nとおく．EはΓ_nの内部に含まれてゐる．fは∞の近傍で正則だから，

$$f(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots$$

の形の展開を持つ．$\varphi(2t)/\varphi(t) = O(1)$，$t \to +\infty$，であるから，

$f(z)-c_0 \in H^{\varphi}(S-E)$ であることが分る．従って $f(\infty)=c_0=0$ と仮定することが出来る．もし f が恒等的に 0 でないとすれば，c_p，$p \geqq 1$，を最初の 0 でない係数とすると，Γ_n に適当な向きをつけることにより

$$c_p = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} f(w)\, w^{p-1}\, dw, \qquad n \geqq 1.$$

上に得た評価を用ゐれば，

$$\begin{aligned}|c_p| &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n} |f(w)|\,|w|^{p-1}|dw| \\ &\leqq \rho\, b^{p-1} N(n) \exp\left[-\frac{1}{2}\, l(N(n))\right] \leqq \rho\, b^{p-1} N(n) \exp\left[-\frac{1}{2} N(n)^{1/2}\right] \\ &\to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となって矛盾になる。故に f は定数である．（終）

3．定理１の証明．定理１の條件を満たす Orlicz 函数 φ, ψ を考へる。先づ $(\log t)/\varphi(t) = o(1)$, $t \to \infty$，であることに注意する．次に減少列 $\{b_n : n \geqq 0\}$，$b_n > 0$，を $b_0 = 1$，$n \geqq 1$ に対しては

$$\psi(\delta^{-1}t)/\varphi(n^{-1}t) \leqq 2^{-n}, \qquad t \geqq b_n^{-1}$$

できめる．但し $0 < \rho < \delta < 1$ は固定された定数である．そこで $\{a_n : n \geqq 0\}$，$\{E_n : n \geqq 0\} \subset N_{\varphi}$ を次の様に選ぶ．

$$a_{n+1}/a_n \leqq \rho, \quad a_n \leqq b_n, \quad E_n \subseteq \{\delta a_n \leqq |z| \leqq a_n\} \quad (n \geqq 0);$$

$$\frac{1}{2} \leqq \varphi(n^{-1}a_n^{-1})\, m(E_n) \leqq 1, \quad n \geqq 1.$$

こゝで，m は $S-E$ （$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \cup \{0\}$）に関する ∞ の調和測

度である．これが可能なことは，$\{a_{n+1}<|z|\leqq\infty\}-(\bigcup_{j=0}^{n}E_j)$ に関する∞の調和測度を ν_n と書く時，$\nu_n(\Gamma(a_{n+1}))\sim(\log a_{n+1}^{-1})^{-1}$ $(a_{n+1}\to 0)$ であることと定理2を併用して分る．この構成が出来れば，$z^{-1}\in H^{\psi}(S-E)$，$H^{\varphi}(S-E)=\{定数\}$ を証明することは比較的容易である．前者は単純な計算であり，後者の証明は定理2の証明の後半に類似であるので省略する．

尚詳細は筆者の論文[1]に譲りたい．

文献

[1] M. Hasumi, Hardy classes on plane domains, Report No.2, Institut Mittag-Leffler, 1977 (Ark. Mat. に掲載予定)

[2] M. Hasumi, Null Orlicz classes of plane domains (未発表)

[3] M. Heins, Hardy Classes on Riemann Surfaces, Lecture Notes in Math., No. 98, Springer, 1969.

[4] D. A. Hejhal, Classification theory for Hardy classes of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 767-771; Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I. no. 566 (1973), 1-28.

[5] S. Kobayashi, On H_p classification of plane domains, Kōdai Math. Sem. Rep. 27 (1976), 458-463.

[6] A. Obrock, Null Orlicz classes of Riemann surfaces, Ann. Acad.

Sci. Fenn., Ser. A, I. no. 498 (1972), 1–22.

[7] L. Sario and M. Nakai, Classification Theory of Riemann Surfaces, Springer, 1970.