数理解析研究所講究録
第 323 巻 1978 年 65-83

Ahlfors function

阪大・工　　米谷文男

1. 与えられた領域を標準領域に等角写像することは興味深い基本的な問題であり，特に平行截線領域，放射截線領域円弧截線領域等への等角写像は種々の極値問題とも結びついて詳しい研究がなされてきた[22]。又領域の円板上への解析写像はRiemannの等角写像に関する基本定理を始めとして，Bieberbach [3]，Grunsky [10]，Ahlfors [1] 等の平面領域における結果をふまえ，Ahlforsは次の定理を証明した。

定理 (Ahlfors [2])　m個の解析曲線を境界とする種数gのリーマン面R上に，Rを単位円板$\{w; |w|<1\}$上に丁度ν葉$(m \leq \nu \leq 2g+m)$に写像する解析函数$w=F(P)$が存在する。

Ahlforsはこれを Garabedian による双対極値問題の考えを用いて示した。リーマン面R上に2点a, bを固定する。

極値問題(A)　リーマン面R上の絶対値が1以下である有界正則函数fで$f(a)=0$を満たす函数族の中から

$f(b)$の実部を最大にする函数を求めること。

極値問題(A′) R上の有理型微分 ω でその因子(ω)が因子 $a'b'$の倍元で条件 $\int_{\partial R}|\omega| \leq 2\pi$ を満たす微分の族の中から ω の bにおける留数 $\operatorname{Res}_b \omega$ の実部を最大にする微分を求めること。

これら2つの極値問題の解は存在し，それをF, Φによって表わせば，∂R上 $F\Phi \geq 0$，$|F|=1$ を満たすことが知られ，$F\Phi$ がSchottky微分となることを考慮して結論を得る。又Fは一意である。このようなFがAhlfors functionと呼ばれている。極値問題(A)は次の極値を達成する問題：

$$\sup\{\operatorname{Re} L_0 f \,;\, f \in \mathcal{C},\ L_i f = x_i,\ \|f\| \leq 1\}$$

において函数族$\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$上の汎函数L_i，束縛条件，境界条件を選ぶことによって種々の拡張が考えられる。実際Function algebra, Hardy classにおいて，Gamelin[7] Fisher[5] Hejhal[13]を始めとして多くの研究がなされている。

2．極値函数の境界挙動とその一意性が問題となる。考えている面Rを一般化して極値問題(A)を考える時 有界正則函数に対する零集合があることを考慮すれば，必ずしもすべての境界点で極値函数は絶対値1をとるとは限らないが，Fisher [4]は次の定理を証明している。

定理（Fisher[4]）　任意の平面領域Rにおいて極値問題(A)の極値函数Fは一意であって，有界正則函数族に対するシーロフ境界上$|F|=1$である。

又Hejhal[12]はMyrberg型の面を利用して境界における束縛条件を変えれば極値函数は一意でないことを示している。その考えは，閉円板Δ上に有界正則函数$f_1 \neq f_2$ s.t $f_1(a)=f_2(a)=0$，$f_1(b)=f_2(b)>0$をとりΔ上2葉のMyrberg型の面Rで1つの葉にその射影がbを含むslitを持ちR上有界な正則函数は2つの葉で同じ挙動をする面を考えれば，f_1，f_2は極値問題

$$\sup\{\mathrm{Re}\, f(b)\,;\, f\in AB(R),\ f(a)=0,\ R\text{の境界上 } |f|\le \max(|f_1|,|f_2|)\}$$

の極値函数である。しかしこの境界条件は内部的な束縛条件とも考えられ　極値問題(A)とは事情が異なっているようにも思われる。極値問題(A)の極値函数F_bに対し，aを中心とする局所変数を固定し，この変数に関する函数fの微分をf'で表わすことにして次の極値問題

$$\sup\{\mathrm{Re}\, f'(a)\,;\, f\in AB(R),\ f(a)=0\ \ |f|\le 1\}$$

の極値函数を${}_aF$とすれば，これらの極値函数の間に次の関係がある。点列b_nが点aに収束するとしよう。そのとき極値函数$\{F_{b_n}\}$は正規族をなすから部分列をとればF_{b_n}はR上のある正則函数F_0 s.t $F_0(a)=0$，$|F_0|\le 1$に収束するとしてよい。もし$|F_0'(a)|<{}_aF'(a)$ならば　あるaの近傍V_aが存在して

$^{\exists}N \leq {}^{\forall}n$ に対して $|F_{b_n}/{}_aF|<1$ on V_a，これは F_{b_n} の極値性に矛盾する。従って $|F_0(a)| = {}_aF'(a)$．又 Ahlfors の定理における有限型の面 R においては ${}_aF$ も定理の主張を満足し，極値函数としては一意である。そこで定数倍 $(e^{i\theta_n})$ の調節を行なえば $e^{i\theta_n}F_{b_n}$ は ${}_aF$ に収束すると言える。

3。極値函数が境界を単位円周上に写すことを期待できる極値問題として次のものを考える。リーマン面 R 上の点 $\{a_i\}_{i=1\cdots n}$ と整数 $\{\mu_i\}_{i=1\cdots n}$ で作られた因子 $\delta = a_1^{\mu_1}\cdots a_n^{\mu_n}$ を固定し，点 $\{a_i\}_{i=1\cdots n}$ と異なる点 b，整数 k に対し，

$M(\delta, b^{-k}, R) = \{f$; i f は R 上の有理型函数，ii f は境界近傍で有界，iii f の因子 (f) は $\delta\cdot b^{-k}$ の倍元である $\}$

を考える。ここで b を中心とする局所円板，局所変数 $V_b=\{z;|z|<1\}$ を固定すれば $M(\delta, b^{-k}, R)$ に属する有理函数 f の展開は

$$f(z) = C_f z^{-k} + \sum_{i=-k+1} c_i z^i$$

の形で表わされる。函数 f の境界集積値集合 $\mathcal{C}(f,\Delta)=\cap\overline{f(R-R_n)}$ (R_n は R の正則近似列) を用いて

$M_1(\delta, b^{-k}, R) = M_1 = \{f\in M(\delta, b^{-k}, R)$; $\mathcal{C}(f,\Delta)\subseteq\{w;|w|\leq 1\}\}$

とおき次の極値問題を設定する。

A) $\sup\{\mathrm{Re}\, C_f$; $f\in M_1(\delta, b^{-k}, R)\}$ の極値を達成する問題．

今 R を双曲型リーマン面とし M_1 に属する非定数函数 f があれ

ば $\log|f| \le k g_b - \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_{a_i}$

(g_p は P を極とする Green 函数, $R \notin O_{MB}^{*}$ を知る 中井 - Sario[17])
正規族の理論から極値に達する極値函数の存在を知る。又

$$\log|C_f| = \lim_{z\to b}\left(\log|f(z)| - \log\frac{1}{|z|^{k}}\right)$$
$$\le \lim_{z\to b}\left[k\left(g_b(z) - \log\frac{1}{|z|}\right) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i g_{a_i}\right] = k\gamma_b - \sum_{i=1}^{n}\mu_i g_{a_i}(b)$$

($\gamma_b = \lim g_b(z) - \log\frac{1}{|z|}$ は平面領域のロバン定数に対応する)
によって極値の評価を得る。この極値問題をまず解析曲線で囲まれた種数有限の面において次の Royden による Cauchy-Read 型, F&M Riesz 型の定理を用いた議論によって考える。

補題 (Royden[19]) f, g を円環 $\{z;\ r_0<|z|<1\}$ 上の正則函数で, f は $|f|$ が調和な優函数を持つ($|f|\le u$)とし, g は有界であるとする。このとき函数 fg, g は動径方向の極限を $|z|=1$ 上 Lebesgue 測度に関して殆ど至る所に持つが, 今 Lebesgue 測度に関して殆ど至る所 $fg\ge 0$, $|g|=1$ を満足すると仮定すれば, ある $r_1>1$ が存在して, f, g は円環 $\{z;\ r_0<|z|<r_1\}$ 上正則。

次に $\mathbf{R}$ を有限個の解析曲線で囲まれた種数有限の面とする。∂R 上の測度 $d\mu$ が有理型微分 ω の境界値であるとは, R の正則近似列 R_n と ∂R の近傍で連続な函数 φ に対し $\int_{\partial R}\varphi\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\partial R_n}\varphi\omega$ を満足することとする。

$A'(\partial R) = \{f;\ f$ は $R - {}^{\exists}R_n$ 上の正則函数, $|f|$ は調和な優函数をもつ $\}$
ω_0 を $\overline{R}$ 上 0 をとらない正則微分とし, R 上の因子 δ に対し

$Q'(\delta, R) = \{\omega ;$ i ω は R 上の有理型微分, ii (ω) は δ の倍元, iii $\frac{\omega}{\omega_0} \in A'(\partial G)\}$

$M(1/\delta, \overline{R}) = \{f ;$ i f は $\overline{R}$ 上の有理型函数, ii (f) は $1/\delta$ の倍元 $\}$ とおく。

定理 (Cauchy-Read 型 [19] [18]) ∂R 上の測度 μ が $Q'(\delta, R)$ に属する有理型微分の境界値になっている為の必要十分条件は $M(1/\delta, \overline{R})$ に属する任意の f に対して $\int f\, d\mu = 0$

定理 (F & M Riesz 型 [19] [14]) ∂R 上の測度 $d\mu$ が $M(1/\delta, \overline{R})$ に属する任意の f に対して $\int f\, d\mu = 0$ を満足すれば, $d\mu$ は ∂R 上の Lebesgue 測度に関して絶対連続である。

定理 ([19]) ∂R の近傍で有界な有理型函数 f と有理型微分 ω が Lebesgue 測度に関して殆ど至る所 $f\omega \geq 0$, $|f| = 1$ を満足していれば f, ω は ∂R 上正則である。 ($\omega \in Q'(\delta, R)$ を仮定)

命題 m 個の解析曲線に囲まれた種数 g のリーマン面 R において $\sup\{\mathrm{Re}\, C_f ; f \in M_1(\delta, b^{-k}, R)\}$ の極値を達成する極値函数 $F_{\delta,k}$ は一意に存在して ∂R 上 $|F_{\delta,k}| = 1$, そして高々 $2g + m - 1 + \sum_{i=1}^{n} \max(\mu_i, 0)$ 個の零と $\sum_{i=1}^{n} \max(-\mu_i, 0)$ 個の極をもつ。

略証 $M(\delta \cdot b^{k}, \overline{R})$ 上の線型汎函数 $L_1 f = C_f$ は Hahn-Banach の定理によって sup norm による norm を保存して $C(\partial R)$ 上の線型汎函数 $\hat{L}_1$ に拡張される。$\hat{L}_1$ は Riesz の定理によって ∂R 上の測度 μ_1 により $\hat{L}_1(f) = \int_{\partial R} f\, d\mu_1$, $\|L_1\| = \int |d\mu_1|$ と表現される。$M(\delta b^{-k+1}, \overline{R})$ に属する任意の函数 f に対して $\int_{\partial R} f\, d\mu = 0$ 故 Cauchy-Read 型の定理から $d\mu$ は $Q(\delta^{-1} b^{k-1}, R)$ に属する微分

ωの境界値である。正規族の理論により存在を保証された極値函数Fに対して

$$C_F=\int_{\partial V_b}F\omega=\lim_{n\to\infty}\int_{\partial R_n}F\omega=\int_{\partial R}F\omega\leq\int_{\partial R}|F\omega|\leq\int_{\partial R}|\omega|=C_F$$

$C_f\neq 0$なる$M(\delta,b^{-k},R)$の函数の存在はすぐわかるから$C_F>0$

$\int fF\omega=0 \quad {}^{\forall}f\in M(b,R)$ 故 F&M Riesz型の定理から$F\omega$はLebesgue測度に関して絶対連続，そしてLebesgue測度に関して殆ど至る所$F\omega=|\omega|\geq 0$，$|F|=1$を得る。結局∂R上至る所$F\omega\geq 0$，$|F|=1$となり　F，ωは∂R上正則となる。

これから$F\omega$がSchottky微分であることが結論され$F\omega$のR上の零と極の個数の差は$2g+m-2$，$F\omega$は高々1個の極を持つのみだから$F\omega$の零の個数は高々$2g+m-1$，Fの零の個数は高々$2g+m-1+\sum_{i=1}^{n}\max(\mu_i,0)$，極の個数は高々$\sum_{i=1}^{n}\max(-\mu_i,0)$（但し重複度も数えて），$F$が一意であることも明らか。

$M(\delta,b^{-k},R)$に属し，境界を単位円周上に写像する函数Fは適当なR上の有限個の点ξ_jを取って

$$\log|F|=k\,g_b-\sum_{i=1}^{n}\mu_i g_{a_i}-\sum\nu_j g_{\xi_j}\qquad(\nu_j>0)$$

の表現を持ち

$$\log|C_F|=k\,\gamma_b-\sum_{i=1}^{n}\mu_i g_{a_i}(b)-\sum\nu_j g_{\xi_j}(b)$$

故これらの函数の中で$F_{\delta,k}$は$\sum\nu_j g_{\xi_j}(b)$を最小にする函数である。逆にFを境界を単位円周上に写像する有理型函数とし，その因子$(F)=\delta b^{-k}$とすれば　Fは$M_1(\delta,b^{-k},R)$に対する極値函

数である。さて Köditz & Timmann [15] は Behnke Stein の定理から

定理 ([15]) リーマン面 R のダブル $\bar{R}\cup R_1$ と間接的等角写像 τ に対し ∂R の近傍 $\bar{U}$ ($\tau(\bar{U})=U$) 上の有理型函数 h が $h(P)=\overline{h(\tau(P))}$ を満足すれば $\hat{R}$ の対称な有理型函数 g ($g(P)=\overline{g(\tau P)}$) によって一様に近似される。

この定理を示している。これを用いて R の各境界成分 γ_i を含む対称な円環領域において境界成分 γ_i を単位円周全体あるいは単位円周上の円弧に l_i 葉に写像する有理型函数を与えて適用すれば、R 上に各境界成分 γ_i を単位円周又は単位円周上の円弧に l_i 葉に写す有理型函数が存在することが示される。

これらの函数も極値函数として表現される筈であるが、因子 δb^{-k} に対する条件から円弧が表われる場合とそうでない場合を区別することができるだろうか。$kg_b-\sum_{i=1}^{n}\mu_i g_{a_i}$ が負になる点で極値函数 $F_{\delta,k}$ の絶対値は1より小さい故、もし境界近傍で $kg_b-\sum\mu_i g_{a_i}$ が負になるならば点 P が境界に近づくとき極値函数 $F_{\delta,k}$ による点 P の像は単位円板内から単位円周に近づく。このとき R は少なくとも m 葉の円板と多くとも $\min(\sum_{i=1}^{n}\max(-\mu_i,0)-m,\ 2g-1+\sum_{i=1}^{n}\max(\mu_i,0))$ 葉の全複素平面によって表わされる。又例えば $\{a_i\}=\phi$, $k=1$, R が円環領域ならば極値函数によって境界は円弧截線として表わされる。

4. Rを任意の双曲型リーマン面としてRのWiener完閉化をR_W^*, Wiener境界をΔとする。$M(\delta, b^{*}, R) \neq \phi$と仮定する。$M(\delta, b^{*}, R)$に属する函数はWiener函数であるから，$\Delta$上の連続函数と考えてよい。$M(\delta, b^{*}, R)$上の有界な線型汎函数$Lf = C_f$はHarn-Banachの定理により$C(\Delta)$上のnormを保存する有界な線型汎函数$\hat{L}$に拡張される。又Rieszの定理によってこれを$\Delta$上の測度$d\mu$によって$\hat{L}f = \int_\Delta f d\mu$，$\|\hat{L}\| = \int |d\mu|$と表現すれば，正規族の理論によって存在を保証された極値函数Fに対して

$$C_F = \int_\Delta F d\mu \leq \int_\Delta |F d\mu| \leq \int_\Delta |d\mu| = C_F$$

極値が正，即$C_F > 0$とすればμ-a.e に$F d\mu = |d\mu|$, $|F| = 1$である。FはΔ上の連続函数であるから$d\mu$の台上至る所で$|F| = 1$，又別に極値函数F_1が存在するならば$d\mu$の台上$F = F_1$である。そこでもしμの台の調和測度が正ならばLusin-Privaloff型の定理により一意であることがわかる。

しかしながらGamelin[8]は極値函数の絶対値が1となる境界集合の調和測度が0となる例をあげている。
有界な正則函数に対する零集合と容量正の集合のギャップを利用して零集合でその調和測度が1になる集合が構成されるからである。従って一意性をこのような議論から結論することはできない。

そこで以下の仮定の下で考える。δ_0を整因子とし

仮定(B)　$\sup\{\mathrm{Re}\, C_f : f \in M_1(\delta_0, b^{-1}, R)\} > 0$

リーマン面Rが仮定(B)を満足すれば，この極値函数$F_{\delta_0, b}$は一意である。なんとなれば$F_{\delta_0, b}$と異なる極値函数F_1が存在すれば　ある正数nが存在して　$(F_{\delta_0, b} - F_1) F_{\delta_0, b}^n = f$が$M(\delta_0, b^{-1}, R)$に属ししかも$C_f \neq 0$とできる故　$0 \neq \int_\Delta (F_{\delta_0, b} - F_1) F_{\delta_0, b}^n \, d\mu = 0$となって矛盾が生じるからである。

仮定Bの下で　任意の因子δに対し

$\sup\{\mathrm{Re}\, C_f : f \in M_1(\delta, b^{-k}, R)\}$

の極値を達成する極値函数F_{δ, b^k}は一意である。

仮定(C)　ある正数mと整因子δ_0に対し

$\sup\{\mathrm{Re}\, C_f ; f \in M_1(\delta_0, b^{-m}, R)\} > 0$

をリーマン面Rが満足するとすれば　整因子δに対し

$\sup\{\mathrm{Re}\, C_f : f \in M_1(\delta, b^{-k}, R)\}$

の極値を達成する極値函数F_{δ, b^k}は一意である。

リーマン面RがO_{AB}に属せず仮定(C)を満足するならば任意の因子δに対し　$\sup\{\mathrm{Re}\, C_f : f \in M_1(\delta, b^{-k}, R)\}$の極値を達成する極値函数も一意である。

5．次にFisher[4]の議論を用いて極値函数の境界挙動について述べる。

仮定(D)　R上の任意の点bで仮定(B)が成立する。

仮定(E)　R上の任意の点bで仮定(C)が成立する。

命題　リーマン面Rの境界Δ上の測度$d\mu_{b_0}$（台をKとする）によって点$b_0 \in R$の有界正則函数に対する表現

$$f(b_0) = \int f\, d\mu_{b_0} \qquad {}^{\forall} f \in AB$$

が与えられているとする。もしRが仮定(E)を満足すれば

$$\sup_{\Delta \ni x} |f(x)| = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

略証　まず仮定(D)を満たすとして証明しよう。

集合$X = \bigcap_{f \in AB} \{x \in R : |f(x)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)|\}$はR上の閉集合である。$\sup_{x \in K} |f(x)| \leq 1$を満足する有界正則函数fに対して

$$f^n(b_0) = \int_\Delta f^n\, d\mu_{b_0} \leq \int |d\mu_{b_0}|$$

故$|f(b_0)| \leq 1$，$b_0 \in X$．任意の$b \in X$に対して台がKに含まれるbの表現測度μ_bが存在することは明らかである。$b \in X$に対して仮定(D)より$H_b(w, z) = -F_{\delta_0 b}(z) / (F_{\delta_0 b}(w) - F_{\delta_0 b}(z))$はzがbに収束するときwの函数として境界上1に一様収束する。従ってbのある近傍V_bに属するzに対し$H_b(w, z)$はzにのみ一位の極をもち境界上有界であり，

$$A(z) = \int_\Delta H_b(w, z)\, d\mu_b \neq 0$$

を満足していると仮定してよい。任意の有界正則函数fに対して$h(w) = (f(w) - f(z)) H_b(w, z)$は有界正則函数であり，

$$0 = h(b) = \int (f(w) - f(z)) H_b(w, z)\, d\mu_b$$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{A(z)}\int_{\Delta} f(w)\,H_b(w,z)\,d\mu_b$$

従ってzの表現測度で台がKに含まれるものがある。最初の議論によって$V_b\subset X$を得る。Xは開集合でもあるから、Rの連結性により $X=R$ となり結論を得る。仮定(E)の仮定(D)と異なる所は、bにのみ位数1の極をもち境界近傍で有界な有理型函数の存在が保証されない点にある。bを中心とする局所円板V_b局所変数zを適当に選べば $F_{S,b^m}=\frac{1}{z^m}$ on V_b と考えてよい。$H_b(w,z)=-F_{S,b^m}(w)/(F_{S,b^m}(w)-F_{S,b^m}(z))$ は $z_k(z)=z\cdot e^{2\pi i k/m}$ に極をもつ。R上の有界な正則函数fに対し整数$k_1\cdots k_s$を適当にとって$f(z_{k_1}(z)),\ \ldots\ f(z_{k_s}(z))$はすべて異なり任意の整数kに対し$f(z_k(z))$はこの中の1つに一致するようにできる。これが$V_b$必要なら小さくとり直して上のすべてのzに対して成立していると仮定できる。$h(w)=\prod_{i=1}^{s}[f(w)-f(z_{k_i}(z))]\,H_b(w,z)$ は有界な正則函数故 $0=h(b)=\int_{\Delta}h(b)\,d\mu_b$

又 $h_k(z)=\int_{\Delta}f^k(w)\,H_b(w,z)\,d\mu_b$ はV_b上正則

$A_0=1,\ A_1=-\sum_{i=1}^{s}f(z_{k_i}(z))\ \ \ldots\ldots,\ A_s=(-1)^s\prod_{i=1}^{s}f(z_{k_i}(z))$ とおけば

$$0=\int_{\Delta}h(w)\,d\mu_b=h_s+A_1h_{s-1}+\cdots+A_sh_0,$$

$$0=\int_{\Delta}f^l\,h(w)\,d\mu_b=h_{s+l}+A_1h_{s+l-1}+\cdots+A_sh_l,$$

$$\begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&0&1\\-A_s&\cdots&&-A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_0\\ \vdots\\ h_{s-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_s\end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix}x&-1&&\\&x&-1&\\&&\ddots&\ddots\\&&x&-1\\A_s&\cdots&&x+A_1\end{vmatrix}=\prod(x-f(z_{k_i}(z)))$$

$$h_\ell(z) = \sum_{i=1}^{m} c_i(z) f(z_{k_i}(z))^\ell$$

の表現を得る。そこでもし V_p と $|f| \leq 1$ でなければある $z \in V_p$ が存在して $h_\ell(z)$ が発散することを知る。一方

$$h_\ell(z) \leq \int_\Delta |f^\ell(w) H_b(w, z) d\mu_b| \leq \int_\Delta |H_b(w, b) d\mu_b| < \infty$$

これは矛盾である。これより上と同じく結論を得る。

C_{AB} に属しない面 R が仮定(E)を満足するとすれば

$$C_{F_{\delta,b^k}} = \int_\Delta F_{\delta,b^k} d\mu > 0 \qquad (\mu は 4 参照)$$

従って任意の有界な正則函数 f に対して

$$f(b) = \frac{1}{C_{F_{\delta,b^k}}} \int_\Delta f F_{\delta,b^k} d\mu$$

と表現され F_{δ,b^k}、$d\mu$ の台を K_1 とすれば $\sup_{z \in \Delta} |f(z)| = \sup_{z \in K_1} |f(z)|$, $f \in AB$ 又 $d\mu$ の台上 $|F_{\delta,b^k}| = 1$ 故 これは有界正則函数に対するミーロフ境界上絶対値 1 をとるといえる。

6. リーマン面 R 上の 2 点 P, Q が AB 分離であるとは R 上に有界正則函数 f が存在し、$f(P) \neq f(Q)$ を満足することとし、R 上の任意の 2 点が AB 分離であるとき R は AB 分離であると定義する。仮定(E)は完閉な面から有限個の点を除いた面のように $R \in O_{AB}$ でも成立する。一方 Myrberg 型の面のように O_{AB} に属しない面で AB 分離でない面もある。

今 $R \notin O_{AB}$ とし仮定(E)を満足するとしよう。

i このときリーマン面 R は AB 分離である。

ii $A=\{b\in R;\ b$にのみ1位の極を持つ有理型函数は境界近傍で有界でない$\}$ この集合AはRで孤立している。

i は 有界正則函数fに対し適当なl, tをとれば
$S = (f-f(b))^{l}\, F_{\delta_0 b^m}^{t}$ は有界な正則函数で$S(b)\neq 0$とできることに注意すればよい。任意の2点はAB分離だから5.の命題証明中の$H_b(w,z)$の極を一点だけ残して消すことができることに注意すればiiを得る。

R上の点Pが境界とAB分離であるとは$Cl(f, \Delta)$が$f(P)$を含まないこととし，R上のすべての点が境界とAB分離であるときRは境界とAB分離であると定義する。

命題 リーマン面Rが仮定(F)を満足すれば，Rは境界とAB分離であるか，又はR上の任意の点が境界とAB分離にはならないかのいずれかである。

略証 少くとも1点境界とAB分離である点が存在すると仮定しよう。集合$Y=\{P;\ {}^{\exists}f_P\in AB,\ Cl(f_P\ \Delta)\not\ni f_P(P)\}$は空でない開集合である。今点列$P_n\subset Y$が点$P\in R$に収束したとして$Cl(f_{P_n}\ \Delta)\not\ni f_{P_n}(P_n)$を満足する有界正則函数$f_{P_n}$を選ぶ。$P\notin A$ならば$P$にのみ1位の極を持つ有理型函数$F_P$がとれる。

$S_P = (f_{P_n} - f_{P_n}(P_n))/(F_P - F_P(P_n))$ （F_Pは境界近傍で有界）

とおけばS_Pは正則函数と考えてよく，$Cl(S_P\ \Delta)\not\ni 0 = S_P(P)$ 故 $P\in Y$，$Y\cap R-A$は$R-A$で開かつ閉集合となる。Aは

Rで孤立しているから$R-A$は連結であり Y は$R-A$を含む。又$P\in A$ならば $F_{g_i,pm}$を考え，$F_{g_0,pm}-C$の零点g_iは有限個でYに属するようにCを選べば，

$$T_P=\prod_{g_i}(f_{g_i}-f_{g_i}(g_i))/(F_{g_0,pm}-C)$$

は有界正則函数で $Cl(T_P\Delta)\ni c=T_P(P)$。従って$Y=R$。

逆にリーマン面RがAB 分離で境界ともAB 分離ならば仮定Eを満足する。

R上の2点P,QがAB 弱分離であるとは有界な正則函数f,gが存在して$f/g(P)\neq f/g(Q)$なることとし，R上の任意の2点がAB 弱分離であるときRはAB 弱分離であると定義する。さてRの2点P,QのAB 同値関係$P\sim Q$をP,QはAB 弱分離でないことによって定義し，商位相空間$R/\sim$をRから誘導する。Rから$R/\sim$への自然な射影をπと記す。有理型函数fの点Pにおける零，又は極(負で数える)の位数を $\mathrm{ord}_P f$ と表わし $n_P=\min\{\mathrm{ord}_P f/g\,;\,f,g\in AB,\ \mathrm{ord}_P f/g>0\}$ とおけば，これを達成する函数f_P,g_Pと適当な局所円板V_Pを選んで $f_P/g_P=z^{n_P}$ on V_P としてよい。任意の有界正則函数fはV_P上 $f=\sum d_{kn_P}(f_P/g_P)^k$ と展開され又PとAB 同値な点Qにおいても同じ展開を持つことに注意すれば $\pi(V_P)$に属する点$\pi(P')$に$f_P/g_P(P')$を対応させる写像φ_Pは$\pi(V_P)$と$f_P/g_P(V_P)$の同相写像となる。$(\pi(V_P),\varphi_P)_{P\in R}$は$R/\sim$の等角

構造を与え，又πの連続性から$R/\sim$は連結になる。

$\bigcup_{f,g\in AB}\{(p,q);\ f/g(p)\neq f/g(q)\}$は$R\times R$の開集合，$\{(p,q);\ p\sim q\}$は$R\times R$で閉集合であることに注意する。$O$を$R$の開集合とし$B$を$O$の点と$AB$同値な点の全体とすると$B$は又開集合となる。そこで$\pi$は開写像となり$R/\sim$は連結なHausdorff空間である。又$R$上の有界な正則函数$f$に対して$\tilde{f}(\pi p)=f(p)$によって$\tilde{f}$を定義すれば$\tilde{f}$は$R/\sim$上の有界な正則函数である。又明らかに$R/\sim$は$AB$弱分離である。以上により

命題（Royden [20]）O_{AB}に属しないリーマン面RからAB同値関係による商空間$R/\sim$に等角構造が誘導されて$R/\sim$はAB弱分離なリーマン面となりR上の任意の有界正則函数fに対して$R/\sim$上の有界な正則函数$\tilde{f}$が存在し$f=\tilde{f}\circ\pi$（πはRから$R/\sim$への自然な射影）。

この議論は有界正則函数の族である必要はない。Royden [20]はこれを一般の状況で証明している。

有界正則函数に対する議論はAB弱分離な面ですれば十分である。Myrberg型の面のもつ困難さを軽減できる。

Rが境界とAB分離でかつAB弱分離ならばRはAB分離である。そこで$R/\sim$が境界とAB分離ならば$R/\sim$はAB分離であることに注意して次を得る。

命題　AB 分離の面の相対完閉な領域 G 上の有限葉の非有界な被覆面を R とする。

i R が AB 弱分離ならば AB 分離である。

ii G 上に AB 分離な被覆面 R_1 と R から R_1 への解析写像 π が存在し，R 上の有界な正則函数 f に対し R_1 上の有界な正則函数 f_1 が存在し　$f = f_1 \circ \pi$　となる。

これは G が単位円板のとき Stanton[7] にも張されたものである。

7.　R_n を R の正則近似列とし $M_1(\delta, b^{-k} R_n)$, $M_1(\delta, b^{-k}, R)$ の極値函数を F_n, F_{δ, b^k} と表わせば $^\forall \varepsilon > 0$ に対し十分大きい n をとって $\{P : |F_{\delta, b^k}(P)| \geq 1 + \varepsilon\} \subset R_n$ としてよい。

このとき　$C_{F_n} \geq C_{F_{\delta b^k}} / (1+\varepsilon)$

F_n が $F \in M(\delta, b^{-k}, R)$ に収束したとすれば　$C_F \geq C_{F_{\delta, b^k}}$，

（R が双曲型ならば部分列をとって収束が保証される [E] による。）

更に　$\lim_{\zeta \to \Delta} (k\, g_b(\zeta) - \sum \mu_i\, g_{a_i}(\zeta)) \leq 0$ を満足しているならば，

$F \in M_1(\delta, b^{-k}, R)$ 故　$k > 0$，$C_{F_{\delta b^k}} > 0$，δ 整因子ならばその一意性によって $F = F_{\delta, b^k}$，F_n は F_{δ, b^k} に収束することを知る。

問題　$R \notin O_{AB}$，$\{a_i\} = \phi$，$k > 0$，$C_{F_n} \to 0$ のとき R は AB 分離となるであろうか？

AB 分離ならば AB 弱分離であるが，逆に AB 弱分離であって AB 分離でない面はあるだろうか？

参照文献

[1]. L. Ahlfors : Bounded analytic functions. Duke J 14 (1947) 1~11

[2]. 〃 : Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. Comm Math. H. 24 (1950), 100~134

[3]. L. Bieberbach : Über einen Riemannschen Satz aus der Lehre von der Konformen Abbildung. Berliner Math. Ges 24 (1925) 6~9

[4]. S. Fisher : The moduli of extremal functions. Mich Math J 19 (1972) 179~183

[5]. 〃 : Non linear extremal problems in H^∞. Indi Univ Math J. Vol 22 No 12. 1183~1190

[6]. T. Gamelin : The algebra of bounded analytic functions Bull. Amer Math. Soc. 79 (1973) 1095-1108

[7]. 〃 : Extremal problems in arbitrary domains Mich. Math J. 20 (1973) 3-11

[8]. 〃 : The Shilov boundary of $H^\infty(U)$. Amer J. Math 46 (1974) 79~103

[9]. P. Garabedian : Schwarz's lemma and the Szegö kernel function. Trans Amer Math Soc 67 (1949) 1~35

[10]. H. Grunsky : Über die Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf mehrblättrige Kreise Sitzung, Preuß Akad (1937) 40~46

[11]. M. Heins : Hardy classes on Riemann surfaces Springer

[12]. D. Hejhal : Linear extremal problems for analytic functions Acta Math. 128 (1972) 91~122

[13]. D. Hejhal : Linear extremal problems for analytic functions with interior side conditions. Ann Acad Sci. Fenn. 586

[14]. K. Hoffman : Banach spaces of analytic functions. Princeton

[15] H. Köditz & S. Timmann : Randschlichte meromorphe Funktionen auf endlichen Riemannschen Flächen. Math Ann, 217 (1975) 157–159

[16] 楠幸男 : 函数論. 朝倉書店

[17] M. Nakai & L. Sario : Classification of Riemann surfaces. Springer

[18] A. Read : A converse of Cauchy's theorem and application to extremal problems. Acta Math 100 (1958) 1~22

[19] H. Royden : The boundary values of analytic and harmonic functions. Math Z. 78 (1962) 1~24

[20] 〃 : Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces. Acta Math. 114 (1965) 113~142

[21] C. Stanton : Bounded analytic functions on a class of open Riemann surfaces. Pacif J. Math 59 (1975) 557–565

[22] 吹田信之 : 近代函数論 II. 森北出版

[23] H. Widom : H^p sections of vector bundles over Riemann surfaces. Ann of Math 94 (1971) 304–324