数理解析研究所講究録
第 323 巻 1978 年 102-123

Riemann面上の等角写像

京大・理　　柴　雅和

種数有限な開Riemann面Rからtorus (=種数1の閉Riemann面) Tへの解析写像についてしらべる．このような解析写像fがあれば，$f(R)$はT上に拡がる被覆面と考えることができ，fはRから$f(R)$への等角写像を与える．一般的なfの存在，fの境界挙動（すなわち$f(R)$の境界の形状）を指定した時の存在条件，T上の被覆面$f(R)$の被覆状態（たとえば被覆葉数），fの誘導する，R, Tの1次元homology群間の準同型などを考察の対象とする．

まず，与えられた準同型が，Rの1次元homology群からTの1次元homology群の間にあるとき，これをひきおこす解析写像$f: R \to T$がつねに存在する（閉Riemann面の場合には，これは成立しない —— Gerstenhaber [2]）．じっさい，fはBehnke-Steinの定理（[8], p.205）を用いて構成される．§1．命題9, 10, 11を参照．しかし境界挙動などに制限がつけば，fがつねに存在すると

は限らない.

ここで問題の背景にふれる. 我々の問題は2つの異なる歴史的起源をもつ; 1つはKoebeの一般化された一意化定理であり, もう1つは(開Riemann面上の)Abel積分の楕円積分への還元問題, とくにPoincaréの定理である.

よく知られているように, 任意の単葉型Riemann面 R は, ある水平截線領域の上に1対1等角に写像される; すなわち, Rは, その境界がすべて実軸に平行な線分(点も含める)からなる, 補集合の面積0の, $\hat{\mathbb{C}}$ 上の領域と等角同値である—Koebeの一般化された一意化定理([8], p.351). この結果は種数有限な任意の開Riemann面へと拡張された(Kusunoki[6]). Kusunoki[8], Mori[12]も参照. 我々の問題は: 種数 $g(<\infty)$ の任意の開Riemann面 R を測地的平行截線写像(§2, 定義9)によって, torus T の上に拡がる被覆面として実現すること. 定理4, 7を参照. とくに $g=1$ のときには, [6], [8]とは別の型の, Koebeの一意化定理の直接的拡張を得る(定理5): 種数1の任意の開Riemann面は, canonicalに定まる1つのtorus上の測地的平行截線領域と等角同値である. 截線集合の極値的長さによる特徴づけも与える(定理6). これも平面の場合の拡張になっている(Suita[20]参照). 測地的平行截線写像がde Possel型の極値問題の解になっていることもわかる(定理8).

一方，Poincaréの定理とは，閉Riemann面Rがtorusへの解析写像をゆるせば，Rの第1種正規微分による周期行列の形が制限されることをのべたものである．我々は開Riemann面に対して類似の問題を考察し，結論：有限葉測地的平行截線写像が存在するための1つの十分条件はRのVirtanen-Kusunoki-Sainouchiの意味での周期行列([6][15])が特定の形をもつことであることを主張する(定理3,4)．Rが所謂有限な面の場合には必要条件でもある．またHaupt-Wirtingerの定理([2][3])の開Riemann面への拡張も与える(定理2)．

上にのべた定理1～8が§2の主な内容である．証明はすべて方針を示す程度にとどめる．§2の基礎になるのは，(開又は閉)Riemann面からtorusへの解析写像に関するAbelの定理である．これはKusunokiによる開Riemann面上のAbelの定理([6],[8]；[1]も参照)およびその拡張(Mizumoto[11], Yoshida[22], Sainouchi[16], Watanabe[21])などとは少し趣を異にするので，念のため§1でのべる．[§2では$g<\infty$として用いるが一応$g\leqq\infty$のもとで(しかし他の条件は適宜簡略化して)のべる]．証明は一切略する．詳細は，[17][18]を参照されたい．

1. Abelの定理

Rを任意の開Riemann面，その種数を$g(\leq\infty)$とする．Rの

Kerékjártó-Stoïlow の理想境界を ∂R とかく．R の標準近似列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ をひとつとり，これに随伴する R の標準 homology 基底 (mod ∂R) $\{A_j, B_j\}_{j=1}^{g}$ をとって固定する．(以下 $R_0=\phi$ と約束して近似列は $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ と考える)．$\{A_j, B_j\}_{j=1}^{g}$ は次の性質をみたすとする：(i) 各 A_j, B_j は解析的な単純閉曲線，(ii) $A_j\times B_k=\delta_{jk}$, $A_j\times A_k=B_j\times B_k=0$，(ii′) A_j と B_k は δ_{jk} 個の点で交わり，A_j と A_k; B_j と B_k とは交わらない．(iii) $\{A_j, B_j\}_{j=g(n)+1}^{g(n+1)}$ は $R_{n+1}-\overline{R_n}$ の，border を法とする homology 基底である．($g(n)$ は R_n の種数，$g(0)=0$.) 交点数の定義は [8]. [19] に従がう．

R の局所変数 $z=x+iy$ によって，R 上の Lebesgue 可測な微分形式 λ は $\lambda=a(x,y)dx+b(x,y)dy$ とかかれる．以下とくに断わらない限り微分形式は，1 位の複素微分を表わす．$\|\lambda\|^2=\iint_R\lambda\wedge\overline{\lambda}^*$ $=\iint_R(|a|^2+|b|^2)dxdy<\infty$ をみたす λ は 2 乗可積分であるという．($\lambda^*=-b\,dx+a\,dy$, $\overline{\lambda}=\overline{a}\,dx+\overline{b}\,dy$)．$R$ 上 2 乗可積分な(複素)微分の全体 $\Lambda=\Lambda(R)$ は，内積 $\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle=Re\iint_R\lambda_1\wedge\overline{\lambda_2}^*=Re\iint_R(a_1\overline{a_2}+b_1\overline{b_2})\,dxdy$, $\lambda_j=a_jdx+b_jdy$, $j=1,2$ によって実 Hilbert 空間となる．$\Lambda_h:=\{\lambda\in\Lambda\mid\lambda$: 調和, i.e., λ は局所的に $\lambda=du$, u: 調和とかける$\}$, $\Lambda_{hse}:=\{\lambda\in\Lambda_h\mid\lambda$ は半完全, i.e. 任意の分離 cycle d について $\int_d\lambda=0\}$, $\Lambda_{eo}^{(1)}:=\{\lambda\in\Lambda\mid{}^{\exists}f\in C^2(R), {}^{\exists}f_n\in C_0^2(R)$, $\lambda=df$ かつ $\|df-df_n\|\to 0, n\to\infty\}$.

<u>定義 1</u>.「$\mathcal{L}=\{L_j\}_{j=1}^{g}$ を，複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を通る直線 L_j の族とする．Λ_{hse} の(閉)部分空間 $\Lambda_0=\Lambda_0(R,\mathcal{L})$ が次の性質をみたすと

き，Λ_0 を $\mathcal{L}$ に随伴する__挙動空間__という：(i) $\Lambda_R = \Lambda_0 \oplus i\Lambda_0^*$（直和），(ii) $\forall \lambda \in \Lambda_0$, $\int_{A_j} \lambda \equiv \int_{B_j} \lambda \equiv 0 \mod L_j$, $j=1,2,\cdots,g$．［以下原点を通る直線を単に直線という．また直線 L と，$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して，$z_1 - z_2 \in L$ を $z_1 \equiv z_2 \mod L$ と書き表わす］」

__注意__．「上の定義の $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^{g}$ において，順序は重要である．たとえば $g=2$ とき，$L_1 \neq L_2$ とすれば，$\{L_1, L_2\}$ に随伴する挙動空間と $\{L_1', L_2'\}$ $(L_1'=L_2, L_2'=L_1)$ に随伴する挙動空間とは異なる」

__定義 2__．「∂R の近傍（i.e. ある compact 集合の外部）で定義された C^1 級微分 φ が__Λ_0 挙動をもつ__とは，$\exists \lambda_0 \in \Lambda_0$, $\exists \lambda_{e0} \in \Lambda_{e0}^{(1)}$, $\varphi = \lambda_0 + \lambda_{e0}$ near ∂R とかけることをいう」

__定義 3__．「2つの挙動空間 $\Lambda_0 = \Lambda_0(R, \mathcal{L})$ と $\Lambda_0' = \Lambda_0(R, \mathcal{L}')$ ($\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^{g}$, $\mathcal{L}' = \{L_j'\}_{j=1}^{g}$) は条件 $\langle \lambda_0, i\overline{\lambda_0'^*} \rangle = 0$, $\forall(\lambda_0, \lambda_0') \in \Lambda_0 \times \Lambda_0'$ をみたすとき，［実軸 $\mathbb{R}$ に関して］互いに__双対的__であるという」

__命題 1__．「$\Lambda_0 = \Lambda_0(R, \mathcal{L})$, $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^{g}$ が1つの挙動空間であれば，Λ_0 の双対挙動空間はつねに唯1つ存在して，それは $\Lambda_0' = \overline{\Lambda_0} = \{\lambda \in \Lambda_{hse} \mid \overline{\lambda} \in \Lambda_0\}$ で与えられる．従って Λ_0' は $\overline{\mathcal{L}} = \{\overline{L_j}\}_{j=1}^{g}$, $\overline{L_j} = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in L_j\}$ に随伴する．（定義3では，必然的に，$L_j' = \overline{L_j}$）」

R 上の，実調和測度の空間を Γ_{hm} とかき，また $\Gamma_{hse} = \{\lambda \in \Lambda_{hse} \mid \lambda : \text{real}\}$ とおく（[1], [8] 参照）．このとき，

__命題 2__．「$\Lambda_K = \Gamma_{hm} + i\Gamma_{hse}$ とおくとき，Λ_K は直線族 $\mathcal{L} = \{i\mathbb{R}\}$（$i\mathbb{R}$ は虚軸を表わす）に随伴する挙動空間である．Λ_K は自分自

身に双対的である」

Λ_K-挙動をもつR上の有理型微分は、<u>半完全標準微分</u>とよばれ、とくに重要である([6], [8], [9]).

<u>定義4</u>.「∂Rの近傍で定義された(2乗可積分とは限らない)解析的微分φで、$\int_{\partial R}\varphi=0$ *) かつ定義域に含まれるA_j, B_jに対して$\int_{A_j}\varphi\equiv\int_{B_j}\varphi\equiv 0 \mod L_j$ をみたすものの全体$\mathcal{A}_L(\partial R)$は、実vector空間をなす。ただし、$\varphi, \psi\in\mathcal{A}_L(\partial R)$は、$\partial R$のある近傍$U$上で$\varphi=\psi$となるとき同一視する。同じ約束を適用すれば、$\mathcal{A}_{\Lambda_0}:=\{\lambda\in\mathcal{A}_L(\partial R)\mid\lambda$は$\Lambda_0$-挙動をもつ$\}$ は $\mathcal{A}_L(\partial R)$の部分空間である。商空間$\mathcal{A}_L(\partial R)/\mathcal{A}_{\Lambda_0}$の元を<u>(I)$\Lambda_0$特異性</u>とよぶ。$R$上の解析的微分$\varphi$が<u>(I)$\Lambda_0$特異性$\sigma$をもつ</u>とは、$\partial R$の近くで、$\varphi=ds+\lambda_0+\lambda_{e0}$, $ds\in\sigma$, $\lambda_0\in\Lambda_0$, $\lambda_{e0}\in\Lambda_{e0}^{(1)}$ とかけるとき、すなわちφが類σを法としてΛ_0挙動をもつときをいう。以下では、しばしば代表元dsも類σと同じ記号でかく」

R上いたるところ正則でかつΛ_0-挙動をもつ微分は、上の意味でも特異性をもたず、古典論における(閉面上の)第1種Abel微分に相当する。

<u>定義5</u>.「R上正則な、Λ_0挙動をもつ微分を<u>第1種Λ_0Abel微分</u>とよぶ。(I)Λ_0特異性σをもつ(R上正則な)微分は、σが半完

*) Iを∂Rの恒等分割とするとき、任意の(I)分離cycle dに対して$\int_d\varphi=0$ の成りたつことを意味する。

全((Q)semiexact, Qは標準分割)であるか否かに従って<u>第2種又は第3種</u>のΛ_0-Abel微分とよぶ．これらを総称して<u>Λ_0-Abel微分</u>とよぶ」

<u>命題3</u>．「$\Lambda_0=\Lambda_0(R.\mathcal{L})$を任意の挙動空間とし，直線族$\mathcal{L}=\{L_j\}_{j=1}^g$は複素数列$\{\zeta_j\}_{j=1}^g$によって定まるものとする：$L_j=\{z=t\zeta_j \mid t\in\mathbb{R}\}$．このとき$R$上の第1種$\Lambda_0$-Abel微分$d\Phi_{A_j}$, $d\Phi_{B_j}$, $j=1,2,\cdots,g$で，$\int_{A_k}d\Phi_{A_j}\equiv\int_{B_k}d\Phi_{B_j}\equiv 0$, $\int_{B_k}d\Phi_{A_j}\equiv-\int_{A_k}d\Phi_{B_j}\equiv-2\pi i/\zeta_j \mod L_k$, $k=1,2,\cdots,g$をみたすものがuniqueに存在する．これらの$d\Phi_{A_j}$, $d\Phi_{B_j}$は$\{\zeta_j\}_{j=1}^g$に関する，第1種Λ_0-Abel微分の基底である」

<u>命題4</u>．「任意に与えられた(I)Λ_0-特異性σに対して，ちょうどσを(I)Λ_0-特異性としてもつような，R上の(第2又は第3種)Λ_0-Abel微分ψ_σが存在する．ψ_σは次の意味で正規化すれば唯1つである：$\int_{A_j}\psi_\sigma\equiv\int_{B_j}\psi_\sigma\equiv 0 \mod L_j$, $j=1,2,\cdots,g$」

<u>命題5</u>．「$\Lambda_0=\Lambda_0(R.\mathcal{L})$を1つの挙動空間，$\Lambda_0^*(=\bar{\Lambda}_0)$をその双対挙動空間とする．$\varphi'=d\Phi'$ *) が第1種又は第2種のΛ_0^*-Abel微分，ψが任意種のΛ_0-Abel微分であれば，(i) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}\int_{\partial R_n}\Phi'\psi$はつねに(有限確定値で)存在する．(ii) ψの(I)Λ_0-特異性をσとすれば，$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}\int_{\partial R_n}\Phi'\sigma$は$\sigma$の代表元のとり方によらず定まり，かつ
$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}\int_{\partial R_n}\Phi'\sigma=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}\int_{\partial R_n}\Phi'\psi\text{」}$$

---

*) Φ'はφ'の，$R'=R-\bigcup_{j=1}^g(A_j\cup B_j)$上での1価な積分を表わす．$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}\int_{\partial R_n}\Phi'\psi$は$\Phi'$の分枝のとり方にもよらない．

定義6.「$\varphi'=d\Phi'$, ψは上にのべられたものとする．このとき $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial R_n}\Phi'\psi\right]$ を $\mathcal{R}\underset{\partial R}{es}\,\Phi'\psi$ とかいて，これを微分$\Phi'\psi$(厳密な意味では微分ではない)の∂Rにおける[一般化された]留数とよぶ．$\mathcal{R}\underset{\partial R}{es}\,\Phi'\sigma$ についても同様」

命題6.「$\varphi'=d\Phi'$, ψは命題5と同様とすれば，つぎの，Riemannの周期関係式が成り立つ：

$$\mathcal{R}\underset{\partial R}{es}\,\Phi'\sigma = \mathcal{R}\underset{\partial R}{es}\,\Phi'\psi = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{g}\left(\int_{A_j}\varphi'\int_{B_j}\psi - \int_{B_j}\varphi'\int_{A_j}\psi\right)$$

(有限和)」

上に考えた一般の開Riemann面Rとは別に，任意に，種数1の閉Riemann面$\mathcal{T}$を考える．$\mathcal{T}$の1つの標準homology基底を$\{C_0, C_1\}$とする．この基底に関する$\mathcal{T}$の第1種正規積分E_0をとる：$\int_{C_0} dE_0 = 1$, $\int_{C_1} dE_0 = \tau$, $\mathrm{Im}\,\tau>0$．このとき$\forall\lambda\in\mathbb{C}-\{0\}$に対して，$E=\lambda E_0$は$\mathcal{T}$上の一般の第1種積分を与え，かつ$E^{-1}=\rho$とおくと，$\rho$は$\mathcal{T}$の普遍被覆写像 $\rho:\mathbb{C}\longrightarrow\mathcal{T}$ を与える．$\lambda=\pi_0$, $\lambda\tau=\pi_1$ と書きなおして，さらに一般性を失うことなく，「C_0, C_1は$\mathcal{T}-C_0\cup C_1$がEの1つの分枝によって平行四辺形$(0, \pi_0, \pi_0+\pi_1, \pi_1)$に写されるようにとられている」としてよい．我々は，$\mathcal{T}=\mathcal{T}(\pi_0,\pi_1)$と表示する．(このように書くとき，標準homology基底$\{C_0, C_1\}$も指定されてあると考えることに注意．) $\gamma_0: z\longmapsto z+\pi_0$, $\gamma_1: z\longmapsto z+\pi_1$ で生成される$\mathbb{C}$の

平行移動群Πによって，$\mathcal{T} \cong \mathbb{C}/\Pi$（双正則）である．我々は格子点の集合$\{z = m\pi_0 + n\pi_1 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$もまた$\Pi$とかくことにする．

<u>命題 7.</u>「π_0, π_1によって定まる$\mathbb{C}$内の直線をL_0, L_1とする：$L_k = \{z = t\pi_k \mid t \in \mathbb{R}\}$．任意の写像$\varepsilon : \{1, 2, \cdots, g\} \longrightarrow \{0, 1\}$に，族$\mathcal{L}_\varepsilon = \{L_{\varepsilon(j)}\}_{j=1}^{g}$が対応するが，$\mathcal{L}_\varepsilon$に随伴する挙動空間およびその双対挙動空間がつねに存在する（[10] 参照）．これを<u>Πに属するε-許容な挙動空間</u>という．（定義 1 のあとの注意によって，εが異なれば，ε-許容な挙動空間は互いにことなる）」

<u>定義 7.</u>「Λ_0を挙動空間とし，Πを格子とする．(I) Λ_0特異性σがΠと<u>両立する</u>というのは，$\int_d \sigma \equiv 0 \mod \Pi$が任意の分離曲線$d$に対して成り立つときをいう」

$\mathcal{T}$の1次元（整係数）homology 群を$H_1(\mathcal{T})$で示す．またRの，∂Rを法とした1次元 homology 群を$H_1^*(R)$で示す．一般に cycle Xの属する homology 類を$[X]$で示すことにすれば，任意の準同型$\eta : H_1^*(R) \longrightarrow H_1(\mathcal{T})$は上に定めた$\{A_j, B_j\}_{j=1}^{g}$，$\{C_0, C_1\}$によって

$$(*) \quad \begin{cases} \eta([A_j]) = m_{j0}[C_0] + m_{j1}[C_1] \\ \eta([B_j]) = n_{j0}[C_0] + n_{j1}[C_1], \end{cases} \quad j = 1, 2, \cdots, g$$

とかける，ここに$m_{jk}, n_{jk} \in \mathbb{Z}$．

<u>定義 8.</u>「準同型$\eta : H_1^*(R) \longrightarrow H_1(\mathcal{T})$が，[標準 homology 基底の組

$(\{A_j, B_j\}_{j=1}^{g}, \{C_0, C_1\})$ に関して]有限型であるとは，η が$(*)$で表現されているとしたとき $\sum_{j=1}^{g}(m_{j0}^2+n_{j0}^2)(m_{j1}^2+n_{j1}^2)<\infty$ が満たされることをいう」

命題8.「準同型 $H_1^*(R)\longrightarrow H_1(\mathcal{T})$ が有限型ならば，適当な写像 $\varepsilon:\{1,2,\cdots,g\}\longrightarrow\{0,1\}$ が存在して，$\varepsilon^*(j)=1-\varepsilon(j)$ とするとき

$$(**)\quad\begin{cases}\eta([A_j])=m_j[C_{\varepsilon(j)}]+m_j^*[C_{\varepsilon^*(j)}]\\ \eta([B_j])=n_j[C_{\varepsilon(j)}]+n_j^*[C_{\varepsilon^*(j)}],\end{cases}\quad j=1,2,\cdots,g,$$

とあらわされる．ここで $m_j, m_j^*, n_j, n_j^*\in\mathbb{Z}$，かつ $m_j^*=n_j^*=0$ が有限個を除くすべての j についてなりたつ」

一般に，連続写像 $g:R\to\mathcal{T}$ によってひきおこされる準同型 $H_1^*(R)\longrightarrow H_1(\mathcal{T})$ を f_* で表わすことにする．

定理(Abelの定理の拡張).「$(**)$で表現された有限型の準同型 $\eta:H_1^*(R)\to H_1(\mathcal{T})$ が与えられているとする．また Λ_0 は Π に属する ε-許容な任意の挙動空間とし，σ は Π と両立する(I)Λ_0-特異性とする．このとき，解析写像 $f:R\to\mathcal{T}$ で，$d(\rho^{-1}\circ f)$ が σ を特異性としてもちかつ $f_*=\eta$ となるものが存在するためには，次式をみたす R 上の第1種 Λ_0-Abel微分 ψ_0 の存在することが必要十分である：

$$\begin{cases}\int_{A_j}\psi_0=-\pi_{\varepsilon(j)}\operatorname{Res}_{\partial R}\Phi'_{A_j}\sigma+m_j\pi_{\varepsilon(j)}+m_j^*\pi_{\varepsilon^*(j)}\\ \int_{B_j}\psi_0=-\pi_{\varepsilon(j)}\operatorname{Res}_{\partial R}\Phi'_{B_j}\sigma+n_j\pi_{\varepsilon(j)}+n_j^*\pi_{\varepsilon^*(j)}\end{cases},\ j=1,2,\cdots,g.$$

ここで，$d\Phi'_{A_j}$，$d\Phi'_{B_j}$ は $\{2\pi i/\pi_{\varepsilon(j)}\}_{j=1}^{g}$ に関する，第1種 Λ_0'-Abel微分の基底である（Λ_0' は Λ_0 の双対挙動空間）」

命題1～8が全体としてこの定理の証明を形成するが，詳細は略する．[18]を参照されたい．

2. 測地的平行截線写像

以下 R の種数 g は正でかつ有限とする．このときには，任意の準同型 $H_1^*(R)\to H_1(T)$ は有限型である．

命題9．「与えられたtorus T に対し，R を T 上の有限葉被覆面として実現することは，いつもできるとは限らない」

R としていわゆる有限型のRiemann面を考える．すなわち，閉Riemann面 R_0 とその上の有限個の(異なる)点 $p_1,\cdots,p_N$ に対して，$R=R_0-\{p_1,\cdots,p_N\}$ とおく($N\geqq 1$)．R が T を有限葉に覆う被覆面として実現されるのは，R_0 が T 上(有限葉)の被覆面として実現されることと同値である．古典論によって(Krazer[5]参照)，任意の R_0 が与えられた T(の上)への解析写像を許す訳ではないから命題9がなりたつ．

命題9は§1のAbelの定理からもわかる．序文で述べたPoincaréの定理および後述する定理4も参照．

次の命題はBehnke-Steinの定理の直接的帰結である：

<u>命題10</u>.「任意の torus $\mathcal{T}$ と任意の準同型 $\eta: H_1^*(R) \longrightarrow H_1(\mathcal{T})$ に対し，解析写像 $f: R \to \mathcal{T}$ で $f_* = \eta$ をみたすものが存在する」

この結果は $g=\infty$ でも正しい．しかし f の境界挙動を制限すれば($g<\infty$ でも) $f_* = \eta$ となる解析的な $f: R \to \mathcal{T}$ があるとは限らない(定理4).

<u>定義9</u>.「torus $\mathcal{T}$ の標準 homology 基底を $\{C_0, C_1\}$ とし，この基底に関する $\mathcal{T}$ の正規微分によって定められる曲率 0 の Riemann 計量について，C_0 は測地線であるとする．解析写像 $f: R \to \mathcal{T}$ による R の，被覆面としての像 $f(R)$ の相対境界の成分[の $\mathcal{T}$ への射影]がすべて（上にのべた計量で測ったとき）C_0 に測地的平行であるとき，f を $\{C_0, C_1\}$ に関する<u>測地的平行截線写像</u>とよぶ．$\{C_0, C_1\}$ によって $\mathcal{T} = \mathcal{T}(1, \tau)$ である時には，$f: R \to \mathcal{T}(1, \tau)$ が測地的平行截線写像であるともいう(p.8 参照)」

上の命題9において考えられた Riemann 面の例によって，次のこともわかる．

<u>命題11</u>.「torus $\mathcal{T} = \mathcal{T}(1, \tau)$ ((と準同型 $\eta: H_1^*(R) \longrightarrow H_1(\mathcal{T})$))を任意に与えるとき，(($f_* = \eta$ をみたす))有限葉測地的平行截線写像がつねにあるとは限らない」

与えられた Riemann 面 R から与えられた torus $\mathcal{T}$ への，(有限葉もしくは無限葉の)測地的平行截線写像の存在条件をしらべるための準備として，

補題1.「Rを種数$g(<\infty)$の任意の開Riemann面，φをR上の第1種半完全標準微分(i.e. 第1種Λ_K-Abel微分)とする．このときφの零点の個数は(重複度もこめて数えて) $2g-2$ をこえない」

これは閉面上の，よく知られた結果の一般化である．証明は所謂Hurwitzの定理を用いて与えられる．

さて，$\varphi=d\Phi$をR上の第1種半完全標準微分とする．Rの標準homology基底$\{A_j, B_j\}_{j=1}^{g}$を，すべてのcyclesが解析的で，唯1つの点Oで交わり，他には交点をもたないようにとっておく．さらにφの零点のまわりに小さな円を描きそれをK_iとする．φの零点は前補題によって有限個しかない．いまh個であったとする．各∂K_i $(i=1,2,\cdots,h)$上の1点とOとを，互いに交わらずまたA_j, B_jとも交わらぬような解析的曲線γ_iで結ぶ．$R''=R-\bigcup_{j=1}^{g}(A_j\cup B_j)-\bigcup_{i=1}^{h}(K_i\cup\gamma_i)$ とおくと，R''はplanarなRiemann面である．Φは$\overline{R''}$の上で1価正則となる．$S''=\Phi(R'')$は$\mathbb{C}$上の不分岐な被覆面と考えられる．$\Phi(R'')$の境界のうち，Rの理想境界に対応しない部分は，閉曲線$C'=\sum_{j=1}^{g}(A_j^{+}+B_j^{+}+A_j^{-}+B_j^{-})+\sum_{i=1}^{h}(\gamma_i^{+}-\partial K_i+\gamma_i^{-})$ のΦによる像である．ここで一般に曲線γの左側をγ^{+}，右側をγ^{-}で示した．

次の補題はKoebe-Courantの補題の拡張を与える：

補題2.「w-平面$\mathbb{C}$の被覆面$S''=\Phi(R'')$上の2乗可積分なC^1級函数λで $\Phi(C')$上$\lambda=0$ となるものは，

$$\iint_{S''} \frac{\partial \lambda}{\partial v}\, du\, dv = 0 , \qquad w = u + iv$$

をみたす」

この補題は、$\lambda \circ \Phi$ が R'' 上では C^1 級で, $R - R''$ 上では $=0$ となる R 上の連続函数 Λ, $\|d\Lambda\|_R < \infty$ に拡張されることを用いれば, 古典的な場合と同様にして示される([8][9]を参照).

<u>定理1.</u>「torus T は測地線による標準 homology 基底 $\{C_0, C_1\}$ によって $T = T(1, \tau)$ であるとする. 解析写像 $f: R \longrightarrow T$ は $d(p^{-1}\circ f)$ が第1種の Λ_K-Abel微分である(i.e. $i \cdot d(p^{-1}\circ f)$ が R 上正則な半完全標準微分である)とするならば, f は測地的平行截線写像である. $f(R)$ は T 上ほとんどいたるところ K 葉である――截線の射影の全面積は 0 ――ここで K は f_* によって定まる定数」

証明の方針のみのべる. $C = \sum_{j=1}^{g} (A_j^+ + B_j^+ + A_j^- + B_j^-)$, $R' = R - \bigcup_{j=1}^{g} (A_j \cup B_j)$ とおく. R' は単葉型の Riemann 面で, Φ はその上で1価正則. $S' = \Phi(R')$ は $\mathbb{C}$ 上分岐した被覆面である. C は区分的に解析的な閉曲線で, $\hat{\mathbb{C}} - \Phi(C)$ は有限個の成分 $S_1, \cdots, S_N$ に分かれる(Φ は $\overline{R'}$ 上で定義され, 従って $\Phi(C)$ は確定する). 閉曲線 $\Phi(C)$ の, S_k に関する回転数を q_k とするとき, 偏角の原理を用いて, Φ は S_k に属する ζ を R' 上では高々 q_k 回しかとらないことがわかる. また各成分 S_k で $q_k - 1$ 以下の被覆葉数をもつ点の集合の k に関する合併は, 2次元測度 0 であることもわかる. さらに補題

2によって，$\partial\Phi(R')-\Phi(C)$ の各連結成分は，すべて実軸に平行な線分よりなることもわかる．補題1に注意すれば，面Rを$\Phi(R')$を用いてcompact continuationすることができる（[12]参照）．このcontinuationをR^*とかく．Φが$R^*-\bigcup_{j=1}^{g}(A_j\cup B_j)$上で連続であることは明らかである．$\rho\circ\Phi=f$であるから，$f$は$R^*$から$T$（の上）への連続写像である．（$R$上では解析的）．従ってHopf [3]．定理$\mathrm{III}_a$によって，$f$が$R^*$を$T$上$K$葉の被覆面として実現していることがわかる．但し$K$は，$f_*([A_j])=m_{j0}[C_0]+m_{j1}[C_1]$，$f_*([B_j])=n_{j0}[C_0]+n_{j1}[C_1]$とかくとき，$K=\sum_{j=1}^{g}(m_{j0}n_{j1}-m_{j1}n_{j0})$で与えられる整数．（$K>0$であることは拡張されたRiemannの周期不等式からわかる．）故にfによって面RはT上ほとんどいたるところ（T上総面積0の截線集合を除いて）K葉の被覆面として実現されることがわかった．

注意1．「上の議論はφがR上に（有限個の）極をもつときにも平行に適用されうる．定理7を参照」

注意2．「平面領域の場合と同様に，截線（の射影）の全面積が正となるようなtorus（の被覆面）は存在することがわかる．従って上の定理1で構えたfは極値的である．すなわち平面領域の場合における極値的平行截線写像の拡張になっている．定理5および定理8を参照．

定理1の証明に用いた議論から，次の結果もわかる．(i)は Haupt-Wirtinger の定理 (Haupt [3]; [2] も参照) の拡張を与える

定理2. 「Rを種数 g が1より大きい開Riemann面とする．このとき，(i) R上の任意の標準homology基底に関して，$(1,\underbrace{0,\cdots,0}_{g-1};\tau,\underbrace{0,\cdots,0}_{g-1})$，$\mathrm{Im}\,\tau>0$ の形の周期をもつ第1種半完全標準微分は存在しえない．(ii) f が R からある torus $\mathcal{T}$ への解析写像で $d(p^{-1}\circ f)$ が第1種 $\zeta\Lambda_K$-Abel微分 ($\zeta\in\mathbb{C}-\{0\}$) となるものとする．f のひきおこすhomology群の準同型が $f_*([A_j])=m_{j0}[C_0]+m_{j1}[C_1]$, $f_*([B_j])=n_{j0}[C_0]+n_{j1}[C_1]$, $j=1,2,\cdots,g$ とかけたとすれば，$f(R)$ の被覆葉数は $K=\sum_{j=1}^{g}(m_{j0}n_{j1}-m_{j1}n_{j0})$ であって，さらに $K>d_i$ である．ここに $d_1=\underset{\substack{1\le j\le g\\ k=0,1}}{\mathrm{G.C.M.}}|m_{jk}|$, $d_2=\underset{\substack{1\le j\le g\\ k=0,1}}{\mathrm{G.C.M.}}|n_{jk}|$．」

次の定理はPoincaréの定理の拡張である．

定理3. 「$\mathcal{T}=\mathcal{T}(1,\tau)$ とする．Rの種数 g が1より大きければ，次の2つは同値である．

(1) 解析写像 $f: R\longrightarrow\mathcal{T}$ で $d(p^{-1}\circ f)$ が第1種 $i\Lambda_K$-Abel微分となる(i.e. $i\,d(p^{-1}\circ f)$ が第1種半完全標準微分となる)ものが存在する．

(2) Rの，適当に選ばれた標準homology基底 (mod ∂R) に関する

Virtanen-Kusunoki-Sainouchi の意味での周期行列（Kusunoki [7], [8]; Sainouchi [15]）が

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & \frac{a+b\tau}{K_1}, & \frac{1}{K_2}, & 0, \cdots, 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & * & \end{bmatrix}$$

の形である．ここに $K_1, K_2 \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$, $K_2 | K_1$; $a, b \in \mathbb{Z}$」

［証明］ (2)⇒(1)はほとんど明らか．§1. Abelの定理による．(1)⇒(2)もまずAbelの定理を用い，次に R の標準homology基底(mod ∂R)をとりかえることによって得られる．詳細は略するが，古典的なtheta函数論における変換の理論を適用したことに相当することを注意しておく．Krazer [5], Siegel [19] などを参照．定理2も必要である．また整数 K_1, K_2 ; a, b は f_* にのみよる．（条件(2)の $*$ は $(g-1)\times g$ 行列でその第1列vectorは実数からなることもわかる（[7]）．）

定理1, 3から容易に，

<u>定理4.</u> 「種数 $g \geq 2$ の閉Riemann面 R の［適当な標準homology基底(mod ∂R)に関する］Virtanen-Kusunoki-Sainouchiの周期行列が

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0, & \frac{a+b\tau}{K_1}, & \frac{1}{K_2}, & 0, \cdots, 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1, & & \underbrace{\qquad * \qquad}_{g} & \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} K_1, K_2 \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}, \\ K_2 | K_1, \\ a, b \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

の形であるならば，Rから$T=T(1,\tau)$への有限葉測地的平行截線写像が存在する．截線集合の面積は0，この集合を除いて被覆葉数は一定である．Rが有限面(compact bordered Riemann surface)のときには逆も正しい」

$g=1$の場合について2つの結果をのべる．まず種数1の開Riemann面の一意化定理をのべ次にextremal lengthによる特徴づけを与える．第1の結果はKusunoki[7], Sainouchi[15]の結果(存在と一意性)ならびに定理1を用いて証明される．第2の結果はRodin[14]を利用して示される；平面領域の場合(Suita[20])の拡張になっている．

定理5.「種数1の任意の開Riemann面Rは，その1つの標準homology基底$\{A,B\}$ $(\mathrm{mod}\ \partial R)$を指定するとき，canonicalにきまるtorus $T=T(1,\tau)$から面積0の測地的平行截線集合をのぞいたものに1対1等角写像される」

定理6.「Rを定理5のように$T=T(1,\tau)$にうめこむとき，$\lambda(\mathfrak{F}_R)=\lambda(\mathfrak{F}_T)$. ここに$\mathfrak{F}_R$は面$R$上cycle Aに$\mathrm{mod}\ \partial R$でhomologousなすべての閉曲線の和(cycle)からなる族；$\mathfrak{F}_T$はT上cycle C_0にhomologousなすべてのcyclesからなる曲線族．λは極値的長さを表わす」

命題11(定理4も参照)によって，一般に，与えられたR, $\mathcal{T}(1,\tau)$の間に指定された準同型$H_1^*(R)\to H_1(\mathcal{T}(1,\tau))$をひきおこす有限葉測地的平行截線写像はない．しかしR上に任意に1点p_0を指定して$R_{p_0}=R-\{p_0\}$とおくとき，次の定理がなりたつ．

<u>定理7.</u>「Rを種数g $(1\leq g<\infty)$の任意の開Riemann面，$p_0\in R$，$\mathcal{T}=\mathcal{T}(1,\tau)$はtorusとする．任意に与えられた準同型$\eta: H_1^*(R)\to H_1(\mathcal{T})$に対して，測地的平行截線写像$f_{p_0}: R_{p_0}\to\mathcal{T}$で$(f_{p_0})_*=\eta$となるものがつねに存在する．$\rho^{-1}\circ f_{p_0}$は$p_0$で位数が高々$2g$の極をもつようにとれる．また$p_0$の任意の近傍$U$に対し，$f_{p_0}(R-U)$は$\mathcal{T}$上有限葉の被覆面である」

証明には§1. Abelの定理を使う．点p_0でσを具体的に表示して，線型方程式系を解く問題に帰着する．とくにp_0がRのnon-Weierstrass点であれば(そのような点はR上稠密；Mori [12]参照)，$2g$はgでおきかえられることもわかる．

<u>注意.</u>「$f(U)$は勿論$\mathcal{T}$を無限葉に被覆する．正確な被覆状況は直接に，あるいはAhlforsの被覆面の理論より分る(Ohtsuka [13]参照)．写像f_{p_0}はR_{p_0}の分離cyclesを$\mathcal{T}$上0にhomologous cyclesに写すことを注意しておく．Rが有限面ならば，この点に関してももっと精密な議論が可能である(定義7参照)」

最後に，定理１又は７の測地的平行截線写像の極値性に関する de Possel 型の定理をのべる：

<u>**定理 8.**</u> 「R は種数 $g(<\infty)$ の閉 Riemann 面，T は torus とする．

(i) R 上に測地的平行截線写像 f_0 があるとする．$\mathcal{M}_{f_0}=\{f: R\to T,\ f_*=(f_0)_*,\ \|d(\rho^{-1}\circ f)\|_R<\infty\}$ とおくとき，f_0 が有限葉ならば，$\mathcal{M}_{f_0}\neq\phi$ であって，f_0 は $\mathcal{M}_{f_0}$ で汎函数 $I(f)=\mathrm{Im}\int_{\partial f(R)}\rho^{-1}d\bar{\rho}^{-1}$ を最大にする唯１つの写像である．極値は 0 である．

(ii) $p_0\in R$ とし $\eta: H_1^*(R)\longrightarrow H_1(T)$ を与えられた準同型とする．f_{p_0} は定理７のものとして，点 p_0 で $\rho^{-1}\circ f_{p_0}=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{z^n}$ + regular terms とする（$N\geqq 2g$ でよい）．$\mathcal{N}_\eta=\{f: R_{p_0}\longrightarrow T,\ f_*=\eta,\ p_0$ で $\rho^{-1}\circ f=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ \mathrm{Im}\int_{\partial f(R)}\rho^{-1}d\bar{\rho}^{-1}\geqq 0\}$ とおくとき $\mathcal{N}_\eta\neq\phi$ であって，f_{p_0} は $\mathcal{N}_\eta$ の中で汎函数 $J(f)=\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{N}na_nb_n$ を最小にする唯一の写像である」

証明には，(i) では $\|d(\rho^{-1}\circ f)-d(\rho^{-1}\circ f_0)\|$ を，(ii) では $\|d(\rho^{-1}\circ f)-d(\rho^{-1}\circ f_{p_0})\|$ を考えればよい．Kusunoki [6], [8] と類似の方法によるが，（実部ではなく）微分 $d(\rho^{-1}\circ f)$, $d(\rho^{-1}\circ f_0)$ etc. 自身を用いて計算する必要がある（[17] 参照）.

なお，上の定理においては明確に断わってはいないが，$f: R\to T$ は解析的であるとする．また $f(R)$ はいつものように，T 上に拡がる被覆面と考えている．

引用文献

[1] Ahlfors, L. & Sario, L. : Riemann surfaces. Princeton Univ. Press. 1960. 382pp.

[2] Gerstenhaber, M. : On a theorem of Haupt and Wirtinger concerning the periods of a differential of the first kind, and a related topological theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 4(1953), 476-481.

[3] Haupt, O. : Ein Satz über die Abelsche Integrale 1. Gattung. Math. Z., 6(1920), 219-237.

[4] Hopf, H. : Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen. J. Reine Angew. Math., 165(1931), 225-236.

[5] Krazer, A. : Lehrbuch der Thetafunktionen. Teubner. 1903. 509pp.

[6] Kusunoki, Y. : Theory of Abelian integrals and its applications to conformal mappings. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. Math., 32(1959), 235-258.

[7] ----- : Square integrable normal differentials on Riemann surfaces. J. Math. Kyoto Univ., 3(1963), 59-69.

[8] ----- : Theory of functions - Riemann surfaces and conformal mappings. (in Japanese). Asakura. 1973. 408pp.

[9] Kusunoki, Y. & Ota, M. : On parallel slit mappings of planar Riemann surfaces. Mem. Konan Univ., Sci. Ser., 17(1974), 31-37. Supplements. Ibid. 18(1975), 31-39.

[10] Matsui, K. : Convergence theorems of Abelian differentials with applications to conformal mappings. I. J. Math. Kyoto Univ., 15(1975), 73-100; II. Ibid 17(1977), 345-374.

[11] Mizumoto, H. : Theory of Abelian differentials and relative extremal length with applications to extremal slit mappings. Jap. J. Math., 37(1968), 1-58.

[12] Mori, M. : Canonical conformal mappings of open Riemann surfaces. J. Math. Kyoto Univ., 3(1963), 169-192.

[13] Ohtsuka, M. : On the behavior of an analytic function about an isolated boundary point. Nagoya Math. J., 4(1952), 103-108.

[14] Rodin, B. : Extremal length of weak homology classes on Riemann surfaces. Proc. Amer. Math. Soc., 15(1964), 369-372.

[15] Sainouchi, Y. : On the analytic semiexact differentials on an open Riemann surface. J. Math. Kyoto Univ., 2(1963), 277-293.

[16] ----- : On the meromorphic differentials with an infinite number of polar singularities on open Riemann surfaces. Ibid. 14(1974), 499-532.

[17] Shiba, M.: Some general properties of behavior spaces of harmonic semiexact differentials on an open Riemann surface. Hiroshima Math. J., 8(1978), 151-164.

[18] ----- : Abel's theorem for analytic mappings of an open Riemann surfaces of genus one. J. Math. Kyoto Univ., 18(1978).

[19] Siegel, C. L. : Topics in complex function theory, Vol. 2. Wiley-Interscience. 1971. 193pp.

[20] Suita, N. : The modern theory of functions -theory of conformal mappings. (in Japanese). Morikita. 1977. 196pp.

[21] Watanabe, O. : Theory of meromorphic differentials with infinitely many poles on open Riemann surfaces. J. Math. Kyoto Univ., 17(1977), 165-197.

[22] Yoshida, M. : The method of orthogonal decomposition for differentials on open Riemann surfaces. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 8(1968), 181-210.