数理解析研究所講究録
第 323 巻 1978 年 154-172

特異点を持つ極値二乗可積調和函数

名工大　　中井三留

0. 緒言. 複素平面 $\mathbb{C}$ の部分領域 R の一点 ζ に対数特異点

$$l_\zeta(z) = -\log|z-\zeta| = \mathrm{Re}(-\log(z-\zeta))$$

を持つ $R-\zeta$ 上の実数値調和函数 $u(z)$ の族に対する極値問題

(1) $$\min \int_R (u(z))^2 dxdy \qquad (z = x+iy)$$

を考える. これを有限とする極値函数 u_j $(j=1,2)$ が二個あったとすると, $v = u_1 - u_2$ とおくとき

$$\int_R (u_j(z) + t v(z))^2 dxdy \geqq \int_R (u_j(z))^2 dxdy \quad (j=1,2)$$

がすべての実数 t について成立するから

$$\int_R u_j(z) v(z) dxdy = 0 \quad (j=1,2)$$

となり, 従って $v = u_1 - u_2 \equiv 0$ となるから, 極値函数は高々一つである. この様な極値函数が存在するとき, それを

(2) $$h_R(z,\zeta)$$

と記すことにする. 本稿の第一のそして主要な目的は, R のどの点 ζ に対しても $h_R(z,\zeta)$ が存在する様な領域, 強領域と呼ぶことにする, を決定することにある. 次に強領域 R 及

びその一点ζ夫々の独立な変化に応じて$t_R(z,\zeta)$がどの様に変化するかを調らべることが才二の主なる目的である．次に函数$t_R(z,\zeta)$が数学的な興味にとゞまらず物理学的な意味があることを示す一例として$t_R(z,\zeta)$の弾性論への応用について述べる．これらと関連する所は詳しく[5]に論じてあるが，その補遺と言った部分を本稿にまとめたので，[5]も参照されたい．最后にp乗可積調和函数の空间の共役空间に関する一注意と，本稿に関連する未解決问題をのべる．

1．<u>空间</u> $H_2(R)$．　$L_2(\mathbb{C})$を$\mathbb{C}$上のLebesgue測度で考える二乗可積実函数の作るHilbert空间としそのnormと内積を

$$\|\varphi\| = \left(\int_R (\varphi(z))^2 dxdy\right)^{1/2}, \quad (\varphi,\psi) = \int_R \varphi(z)\psi(z)\,dxdy$$

と記す．Rを$\mathbb{C}$の部分領域とするとき$H_2(R)$を次の3条件をみたす$\mathbb{C}$上の実函数uの全体とする：$u|R \in H(R)$（R上の調和函数の全体），$u|\mathbb{C}-R \equiv 0$，$u \in L_2(\mathbb{C})$．$H_2(R)$は$L_2(R)$の閉部分空间としてそれ自身又Hilbert空间を作る．函数fの定義域がRを含むとき，$f \in H_2(R)$と言ったり考えたりするときは，$\mathbb{C}-R$上fを零と定義しなおして居るものと暗黙の了解をすることに約束する．

$\mathbb{C}$の互に異る有限m個の点$\zeta_1,\cdots,\zeta_m$の集合$\underset{\sim}{\zeta}$に対して領域$R_{\underset{\sim}{\zeta}} = \mathbb{C} - \underset{\sim}{\zeta}$を考える．又$\underset{\sim}{\zeta}$に対してmatrix

$$(3) \qquad A(\underset{\sim}{\zeta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathrm{Re}\,\zeta_1 & \mathrm{Re}\,\zeta_2 & \cdots & \mathrm{Re}\,\zeta_m \\ \mathrm{Im}\,\zeta_1 & \mathrm{Im}\,\zeta_2 & \cdots & \mathrm{Im}\,\zeta_m \end{pmatrix}$$

を考える．我々の議論の基礎となるのは $H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}})$ の次元を与える次の公式である：

$$(4) \qquad \dim H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}}) = m - \mathrm{rank}\, A(\underset{\sim}{\zeta}).$$

以下この公式を証明する．$\underset{\sim}{t}$ を実数 $t_1, \cdots, t_m$ を成分とする列 vector とし，

$$h_{\underset{\sim}{t}}(z) = \sum_{j=1}^{m} t_j l_{\zeta_j}(z)$$

とおくことにする．こゝに $l_\zeta(z)$ は ζ における対数特異点であり，従って $\mathbb{C}$ の無限遠点 ∞ において

$$l_\zeta(z) = \mathrm{Re}\left(-\log z + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\zeta^n z^{-n}\right)$$

の展開をもつ．故に ∞ において

$$h_{\underset{\sim}{t}}(z) = \mathrm{Re}\left(-\left(\sum_{j=1}^{m} t_j\right)\log z + \left(\sum_{j=1}^{m} t_j\zeta_j\right)z^{-1} + \left(\sum_{j=1}^{m} t_j\zeta_j^2\right)\frac{z^{-2}}{2} + \cdots\right)$$

となるから，$h_{\underset{\sim}{t}} \in H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}})$ となる必要十分条件は

$$\underset{\sim}{t} \in S(\underset{\sim}{\zeta}) = \{\underset{\sim}{t}\,;\ A(\underset{\sim}{\zeta})\underset{\sim}{t} = 3\text{次零列 vector}\}$$

となることである．従って $\underset{\sim}{t} \mapsto h_{\underset{\sim}{t}}$ は $S(\underset{\sim}{\zeta})$ から $H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}})$ への 1:1 線型写像を与える．これが上への写像であることを示す為に任意の $h \in H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}})$ をとる．各 ζ_j の近傍で h が調和で二乗可積分となることから，実数 t_j が存在して

$$h(z) = \mathrm{Re}\left(-t_j \log(z-\zeta_j) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\zeta_j)^n\right) \quad (j=1,\cdots,m)$$

の形の展開をもつ．又 h は ∞ の近傍で調和で二乗可積分故

$$h(z) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{-n}\right)$$

の形の展開をもつ．従って $t_1, \cdots, t_m$ を成分とする m 次列 vector $\underset{\sim}{t}$ に対し $u = \dot{h} - h_{\underset{\sim}{t}}$ を考えると，$u \in H(\mathbb{C})$ であって，∞ の近傍では

$$u(z) = \mathrm{Re}\left(-\left(\sum_{j=1}^{m} t_j\right) \log z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}\right)$$

の形の展開をもつ．特に $u(\infty) = +\infty, -\infty$，又は 0 のいずれかであるから最大値の原理により $\mathbb{C}$ 上 $u \equiv 0$ となる．故に

$$h_{\underset{\sim}{t}} \equiv h \in H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}})$$

で $\underset{\sim}{t} \in S(\underset{\sim}{\zeta})$ となる．以上により $H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}})$ は $S(\underset{\sim}{\zeta})$ に線型同型であることがわかり，$\dim S(\underset{\sim}{\zeta})$ が (4) の右辺で与えられることから，(4) 式の成立を知る．　　　　（証明終り）

$H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}})$ の次元の計算は $A(\underset{\sim}{\zeta})$ の階数の計算に帰することがわかったが，一般に $1 \leqq \mathrm{rank}\, A(\underset{\sim}{\zeta}) \leqq 3$ であり，$\mathrm{rank}\, A(\underset{\sim}{\zeta}) = 1$ は $\underset{\sim}{\zeta}$ が唯一点からなること，$\mathrm{rank}\, A(\underset{\sim}{\zeta}) = 2$ は $\underset{\sim}{\zeta}$ が少く共二点を含んで共線なこと，$\mathrm{rank}\, A(\underset{\sim}{\zeta}) = 3$ は $\underset{\sim}{\zeta}$ が共線でない三点を含むことゝ夫々同値である．

この事の第一の応用として，$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ を共線でない三点とし，それに，それらと異り互に異る k 個の点 $\zeta_4, \cdots, \zeta_{k+3}$ をつけ加えて得られる点集合を $\underset{\sim}{\zeta}(k)$ とし（$k = 0, 1, 2, \cdots$），

$R_k = \mathbb{C} - \underset{\sim}{\zeta}(k)$ とおけば，$\mathrm{rank}\, A(\underset{\sim}{\zeta}(k)) = 3$ で点の個数は $k+3$ だから

$$\dim H_2(R_k) = k$$

となる．又元々 $\dim L_2(\mathbb{C})$ は可算無限計測数をもつから，無限個の点 $\zeta_4, \zeta_5, \cdots$ をつけ加えた集合 $\underset{\sim}{\zeta}(+\infty)$ を使えば上式で k を可算無限計測数とすることが出来る．故に

定理 1．$\{\dim H_2(R)\,;\ R$ は $\mathbb{C}$ の部分領域$\}$ は可算計測数の全体である．

分類論の記号を使って，$\dim H_2(R) = 0$，即ち $H_2(R) = \{0\}$，となる $\mathbb{C}$ の部分領域 R の全体を O_{H_2} と記すとき，上に述べた所の第二の応用として O_{H_2} を決定する．$\underset{\sim}{\zeta}$ が少く共 4 点を含めば $\dim H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}}) \geqq 4-3=1$，$\underset{\sim}{\zeta}$ が 3 点からなる場合は，3 点が共線か否かにより $\dim H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}}) = 1, 0$，$\underset{\sim}{\zeta}$ が 2 点又は 1 点からなるときは $\dim H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}}) = 0$ となる．又明らかに $\dim H_2(\mathbb{C}) = 0$ である．以上の考察と，$R \subset R'$ なら $H_2(R) \supset H_2(R')$ となることに注目すれば直ちに次の結論をうる：

定理 2．$R \in O_{H_2}$ となる為の必要十分条件は $\mathbb{C} - R$ が高々二点からなるか又は共線でない三点からなることである．

従って最も境界点の少ない $R \notin O_{H_2}$ の一例としては $R = \mathbb{C} - \{0, 1, 2\}$ である.

2. 強領域. R を $\mathbb{C}$ の部分領域とする. R のどの点 ζ に対しても極値問題(1)を有限とする極値函数 $h_R(z, \zeta)$ が存在する様な R を強, R のどの点 ζ に対しても $h_R(z, \zeta)$ が存在しない様な R を弱, このいずれでもない R を不安定と言うことにする.

$H_2(R)$ は $H_2(R-\zeta)$ の閉部分空間であるがその直交補空間を $H_2(R)_\zeta^\perp$ と記す: $H_2(R-\zeta) = H_2(R) \oplus H_2(R)_\zeta^\perp$. $u \in H_2(R)_\zeta^\perp$ は ζ の近傍で調和で二乗可積なことから, 実数 c が存在して

$$u(z) = \mathrm{Re}\left(-c \log(z-\zeta) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\zeta)^n\right)$$

の形の展開をもつ. 従って $\dim H_2(R)_\zeta^\perp \leqq 1$ であるが, 容易にわかる様に, $h_R(z, \zeta)$ が存在する必要十分条件は $\dim H_2(R)_\zeta^\perp = 1$ であり, その時 $\mathbb{R}$ を実数体として, $H_2(R)_\zeta^\perp = \mathbb{R}\, h_R(\cdot, \zeta)$ となる.

そこで 1 におけると同様 $\underset{\sim}{\zeta} = \{\zeta_1, \cdots, \zeta_m\}$, $R_{\underset{\sim}{\zeta}} = \mathbb{C} - \underset{\sim}{\zeta}$ とおき, $\zeta \in R_{\underset{\sim}{\zeta}}$ に対し $\underset{\sim}{\zeta}' = \underset{\sim}{\zeta} \cup \{\zeta\} = \{\zeta_1, \cdots, \zeta_m, \zeta\}$ と書く. さて $\dim H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}})_\zeta^\perp = \dim H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}'}) - \dim H_2(R_{\underset{\sim}{\zeta}})$ の右辺を公式(4)により計算することにより

$$\dim H_2(R)_\zeta^\perp = 1 - \left(\mathrm{rank}\, A(\underset{\sim}{\zeta}') - \mathrm{rank}\, A(\underset{\sim}{\zeta})\right)$$

を知る．故に $R_{\underset{\sim}{\zeta}}$ とその一点 ζ に対し $h_{R_{\underset{\sim}{\zeta}}}(z,\zeta)$ が存在する為の必要十分条件は

$$(5) \qquad \operatorname{rank} A(\underset{\sim}{\zeta}) = \operatorname{rank} A(\underset{\sim}{\zeta}')$$

である．従ってすべての $\zeta \in R_{\underset{\sim}{\zeta}}$ に対し (5) が成り立つ（又は成り立たぬ）ことゝ $R_{\underset{\sim}{\zeta}}$ が強領域（又は弱領域）なことゝが同等となる．すべての $\zeta \in R_{\underset{\sim}{\zeta}}$ に対して (5) が成り立つ条件は $\operatorname{rank} A(\underset{\sim}{\zeta}) = 3$，従って $\underset{\sim}{\zeta}$ が共線でない三点を含むことである．どの $\zeta \in R_{\underset{\sim}{\zeta}}$ に対しても (5) が成り立たぬ条件は $\operatorname{rank} A(\underset{\sim}{\zeta}) = 1$，従って $\underset{\sim}{\zeta}$ が一点からなることである．又定理2によりどの $\zeta \in \mathbb{C}$ に対しても $H_2(\mathbb{C}) = H_2(\mathbb{C}-\zeta) = \{0\}$ だから $\dim H_2(\mathbb{C})^{\perp}_{\zeta} = 0$ で，$\mathbb{C}$ は弱領域である．以上の考察と $R \subset R'$ で R' が強領域（又は R が弱領域）なら R も又強領域（又は R' も弱領域）となることに注意すれば，次の結論に到達する：

定理3．$\mathbb{C}$ の部分領域 R が強領域となる必要十分条件は $\mathbb{C}-R$ が共線でない三点を含むこと，弱領域となる必要十分条件は $\mathbb{C}-R$ が高々一点からなること，不安定領域となる必要十分条件は $\mathbb{C}-R$ が少く共二点を含み同時にある直線の真部分集合となることである．

従って最も境界点の少ない強領域の例は $R=\mathbb{C}-\{0,1,i\}$ である．しかしこの R は $R\in O_{H_2}$ である．$R'=\mathbb{C}-\{0,1,2\}$ は $R'\notin O_{H_2}$ だけれど不安定である．

3．特異点に関する連続性．　R を強領域とするとき，$h_R(z,\zeta)$ が $\zeta\in R$ にどの様に依存するかを考える．定理3により $\mathbb{C}-R$ から共線でない三点 ζ_1,ζ_2,ζ_3 をえらび得る．各 $\zeta\in R$ に対し，ζ_1,ζ_2,ζ_3 が共線でないから

$$(6)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Re\,\zeta_1 & Re\,\zeta_2 & Re\,\zeta_3 \\ Im\,\zeta_1 & Im\,\zeta_2 & Im\,\zeta_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1(\zeta) \\ t_2(\zeta) \\ t_3(\zeta)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ Re\,\zeta \\ Im\,\zeta \end{pmatrix}$$

となる $t_j(\zeta)$ $(j=1,2,3)$ が一意的に定まり $t_j(\cdot)\in H(R)$ で，

$$(7)\qquad g(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{3} t_j(\zeta)\,l_{\zeta_j}(z)+l_\zeta(z)$$

とおくと，$g(\cdot,\zeta)\in H(\mathbb{C}-\{\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta\})$ であって，各 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta$ の近傍ではもとより，(6) により ∞ の近傍においても二乗可積であるから $g(\cdot,\zeta)\in H_2(R-\zeta)$ となる．又 $g(z,\cdot)\in H(R-z)$ も明らかである．評価の詳細は省くが

$$(8)\qquad \lim_{\zeta\to\zeta'}\|g(\cdot,\zeta)-g(\cdot,\zeta')\|=0$$

が各 $\zeta,\zeta'\in R$ に対して成立することが示される．$g(\cdot,\zeta)\in H_2(R-\zeta)$ の $H_2(R)_\zeta^\perp$ への射影が $h_R(\cdot,\zeta)$ だから

$$(9)\qquad \|h_R(\cdot,\zeta)-h_R(\cdot,\zeta')\|\leqq\|g(\cdot,\zeta)-g(\cdot,\zeta')\|$$

を得る．(8) と (9) から直ちに

定理 4．強領域 R に対して $\zeta \mapsto k_R$ は R から $L_2(\mathbb{C})$ への連続写像である：

(10) $$\lim_{\zeta \to \zeta'} \| k_R(\cdot, \zeta) - k_R(\cdot, \zeta') \| = 0.$$

4．領域に関する連続性．R', R'' を $\mathbb{C}$ の強領域とし $R' \subset R''$ とする．$\zeta \in R'$ に対し $k_{R''}(\cdot, \zeta) - k_{R'}(\cdot, \zeta)$ は $k_{R'}(\cdot, \zeta)$ に直交することに注意すれば等式

(11) $$\| k_{R''}(\cdot, \zeta) - k_{R'}(\cdot, \zeta) \|^2 = \| k_{R''}(\cdot, \zeta) \|^2 - \| k_{R'}(\cdot, \zeta) \|^2$$

が成立することがわかる．R を任意の領域，$\{\Omega\}$ を強領域の増加有向列で $\overline{\Omega} \subset R$, $\bigcup \Omega = R$ とする．(11) より $\{\| k_\Omega(\cdot, \zeta) \|\}$ は増加有向列であり，それが有界となることが，R が強領域となる為の必要十分条件であることがわかる．そのとき，$\{ k_\Omega(\cdot, \zeta) \}$ は $L_2(\mathbb{C})$ 内の Cauchy 列で，その極限は $k_R(\cdot, \zeta)$ である．R の完閉集合 E を固定し，$\Omega \supset E$ として，

$$\| k_R(\cdot, \zeta) - k_\Omega(\cdot, \zeta) \|^2 = \| k_R(\cdot, \zeta) \|^2 - \| k_\Omega(\cdot, \zeta) \|^2$$

に注目すると，定理 4 より，上式の右辺，従って左辺は $\zeta \in E$ の連続函数であり，Ω に関する減小列で零に収束する．従って Dini の定理により上式の左辺は ζ に関して E 上零に一様収束する．$\{\Omega\}$ を強領域の減小列で $\Omega \supset \overline{R}$, $\bigcap \Omega = R$ としても

上と同様の結論に到達する．

$\mathbb{C}$ 内の強領域の全体を $\mathcal{S}$ とする．$\mathcal{S}$ 内の有向列 $\{R_\lambda\}$ と $R_0 \in \mathcal{S}$ をとる．$\bar{\Omega}_1 \subset R_0 \subset \bar{R}_0 \subset \Omega_2$ となる $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{S}$ を（存在するかぎり）任意にとるとき，ある λ_0 があって，$\lambda_0 < \lambda$ なるかぎり $\Omega_1 \subset R_\lambda \subset \Omega_2$ と出来るならば，$R_\lambda \to R_0$ であると定めて，$\mathcal{S}$ 内に収束を定義する．すると

定理 5．$R \longmapsto h_R(\cdot, \zeta)$ は ζ に関して広義一様に $\mathcal{S}$ から $L_2(\mathbb{C})$ への連続写像である：任意の $R_0 \in \mathcal{S}$ とその完閉部分集合 E に対して，$R \in \mathcal{S}$ とするとき

(12) $$\lim_{R \to R_0} \left(\sup_{\zeta \in E} \| h_{R_0}(\cdot, \zeta) - h_R(\cdot, \zeta) \| \right) = 0.$$

5．弾性論的 Green 函数． R を強領域とし，$\zeta, \zeta' \in R$ に対して h_R から生ずる反復核

(13) $$\beta_R(\zeta, \zeta') = \int_R h_R(z, \zeta) h_R(z, \zeta')\, dx\, dy$$

を考える．これは対称核である．有限個の解析的閉曲線で囲まれた $\mathbb{C}$ の有界領域 Ω を正則領域と呼べば，それは又強領域でもある．$\{\Omega\}$ を R の正則領域による内側からの近似とすると，定理 5 により，$R \times R$ 上広義一様に

(14) $$\beta_R(\zeta, \zeta') = \lim_{\Omega \to R} \beta_\Omega(\zeta, \zeta')$$

となる．$g_\Omega(z, \zeta) = g_\Omega(\zeta, z)$ を Ω 上の調和 Green 函数とする

とき，$g_\Omega(\cdot,\zeta)-h_\Omega(\cdot,\zeta)$ は $h_\Omega(\cdot,\zeta')$ に直交するから

(15)
$$\beta_\Omega(\zeta,\zeta')=\int_\Omega g_\Omega(\zeta,z)\,h_\Omega(z,\zeta')\,dxdy$$

となる．証明は省略するが（簡単でない）正則領域 Ω に対しては $h_\Omega(\cdot,\zeta')$ は $\partial\Omega$ で連続な境界値をもつことが示される．$u\in H(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ を任意にとるとき，$\partial/\partial n$ 及び ds を $\partial\Omega$ 上の内法線微分及び線素として，$u\in H_2(R)$ と考えることにより

$$\int_{\partial\Omega}u(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\beta_\Omega(\zeta,\zeta')\,ds_\zeta=2\pi\int_\Omega\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}u(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}g_\Omega(\zeta,z)\,ds_\zeta\right)h_\Omega(z,\zeta)\,dxdy$$
$$=2\pi\left(u,\ h_\Omega(\cdot,\zeta')\right)=0$$

となるから，又 (15) の表示により，$\beta_\Omega(\cdot,\zeta')$ は次の境界条件をみたす：

(16)
$$\beta_\Omega(\zeta,\zeta')=\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\beta_\Omega(\zeta,\zeta')=0\qquad(\zeta\in\partial\Omega).$$

再び (15) の表示により，$\delta_{\zeta'}$ を Dirac 測度として Ω 上

(17)
$$\Delta_\zeta^2\beta_\Omega(\zeta,\zeta')=\Delta_\zeta\left(\Delta_\zeta\beta_\Omega(\zeta,\zeta')\right)=4\pi^2\delta_{\zeta'}$$

となることがわかる．従って $\beta_\Omega(\zeta,\zeta')$ は<u>弾性 Green 函数</u>となる：弾性的薄板 Ω の縁を水平に万力状に固定して，Ω の一点 ζ' に垂直方向の力を加へた時，$\zeta\in\Omega$ における水平の位置からの変位が $\beta_\Omega(\zeta,\zeta')$ である．その極限の状態としての $\beta_R(\zeta,\zeta')$ は R 上の弾性的な Green 函数，<u>弾性 Green 函数</u>，と呼んでよいであろう（[3] 参照）．即ち‘理想的な意味で’R の境界で水平に万力状に R を固定した時，ζ' に垂直方

向の力を加えたとき，破壊が起こらず弾性論的状況が保たれるRの条件が，Rが強なことであると解することが出来る．

特に正則領域Ωに対する$\beta_\Omega(\zeta,\zeta')$について，どちらかと言えば異常と思われる現象が起るか否かを問題とするときいかにも異常現象が起きそうな極限的な強領域Rをとり，Rを正則領域Ωで$\Omega\to R$と近似して(14)を使えば，$\beta_\Omega(\zeta,\zeta')$は$\beta_R(\zeta,\zeta')$に近くて，$\beta_R(\zeta,\zeta')$のもつ異常さを$\beta_\Omega(\zeta,\zeta')$も持つことになろう．これが本来正則領域$\Omega$に対してのみ具体的な意味をもつ$\beta_\Omega(\zeta,\zeta')$を一般領域$R$に迄拡げて考えることが重要となる一理由である．一例として<u>Hadamardの予想</u>：$\beta_\Omega(\zeta,\zeta')>0$，が否定的なことを上にのべた考え方に基づいて示そう．無限の帯

$$R=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|\operatorname{Im} z|<1\}$$

は強領域であるが，Fourier変換等が利用出来ると言うRの好都合な形状から，(16)，(17)を直接具体的に解くことが出来て（常に$\beta_R(\zeta',\zeta')=\|h_R(\cdot,\zeta')\|^2>0$だけれど）$\beta_R(\zeta,\zeta')<0$となる点$(\zeta,\zeta')$の存在することがわかる（Duffin）．このRを（必然的に細長い）楕円で近似すれば，楕円をΩとして，$\beta_\Omega(\zeta,\zeta')<0$となり（Garabedian），矩形$\Omega$で近似すれば，又$\beta_\Omega(\zeta,\zeta')<0$となる（[2]）．

劣調和函数に対する平均値不等式により，任意の$\mathbb{C}$の部分

領域Rに対して $H_2(R)$ は局所有界な Hilbert 空間だから，再生核 $k_R(z,\zeta)$ を持つ（即ち $u\in H_2(R)$ に対し $(u, k_R(\cdot,\zeta)) = 2\pi u(\zeta)$）．Rが強領域のとき，即ち $\beta_R(\zeta,\zeta')$ が存在するときには

$$\Delta_z \Delta_\zeta \beta_R(z,\zeta) = k_R(z,\zeta)$$

が示される（Garabedian [1] 参照）．従って強領域Rに対しては

$$(18) \qquad \begin{cases} \Delta_z \beta_R(z,\zeta) = -2\pi h_R(z,\zeta) \\ \Delta_\zeta h_R(z,\zeta) = -\dfrac{1}{2\pi} k_R(z,\zeta). \end{cases}$$

k_R は常に存在，h_R と β_R の存在は同等でそれはRが強領域のときかつそのときに限ることを強調しておく．

弾性 Green 函数の単独点境界における挙動も興味深い．Rを強領域とし，Rからその一点 a を取り除いた領域 $R_a = R - a$ を考えると，これは無論強領域である．Rに対する h_R, β_R を単に h, β，R_a に対するそれらを h_a, β_a と記そう．先ず $h(z,\zeta) - h_a(z,\zeta)$ は R_a 上二乗可積調和だから，a において $\mathrm{Re}\left(-t\log(z-a) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n\right)$ の形の展開をもつ．従って $u = h(\cdot,\zeta) - h_a(\cdot,\zeta) - t h(\cdot,a)$ はR上二乗可積調和だから $h_a(\cdot,\zeta)$ と直交する：$(u, h(\cdot,a)) = (h(\cdot,\zeta), h(\cdot,a)) - t\|h(\cdot,a)\|^2 = 0$．これから t を定めて

$$u = h(\cdot,\zeta) - h_a(\cdot,\zeta) - \beta(a,a)^{-1}\beta(\zeta,a) h(\cdot,a)$$

となる．$k_a(\cdot,\zeta')-k(\cdot,\zeta')$ は R_a 上二乗可積調和だから，$k_a(\cdot,\zeta)$ と直交する：$(k_a(\cdot,\zeta),\ k_a(\cdot,\zeta')-k(\cdot,\zeta'))=0$．これから $\beta_a(\zeta,\zeta')=(k_a(\cdot,\zeta),\ k(\cdot,\zeta'))$．これと $(u,\ k(\cdot,\zeta'))=0$ より β_R と β_{R_a} の関係を与える公式

(19) $\quad \beta_{R_a}(\zeta,\zeta')=\beta_R(\zeta,\zeta')-\beta_R(a,a)^{-1}\beta_R(\zeta,a)\beta_R(\zeta',a)$

が得られる．これから $\beta_{R_a}(a,\zeta')=0$ となり，たとえ唯一点からなる境界においても理想的な意味で万力状に固定すると水平（微分零）にはならぬ迄もとにかく変位零に固定される点が注目に値する．単純支持（境界条件が (16) と違って $v=\Delta v=0$ で与えられること）の場合には考えられぬ現象で，一点で単に支えの上におくことゝ，一点でも'ボルトじめ'で支えることゝの強力さの大きな違いを示している．

6．例．U を単位円板 $|z|<1$ とする．この場合の $H_2(U)$ の再生核 $k(z,\zeta)$，U での極値函数 $h(z,\zeta)$，U 上の弾性 Green 函数 $\beta(z,\zeta)$ を計算してみる．Hadamard が最初に与えた所の

(20) $\quad \beta(z,\zeta)=\dfrac{\pi}{2}|z-\zeta|^2\log\left|\dfrac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right|+\dfrac{\pi}{4}(|z|^2-1)(|\zeta|^2-1)$

から出発するのが最も簡単である．この表現から U の場合にはたしかに $\beta(z,\zeta)>0$ となりこれに基ずいて Hadamard が一般的にも正しいであろうと予想した．これが既述の Hadamard

の予想である．(18) に基ずいて $\Delta_z = 4\partial^2/\partial z\partial\bar{z}$ によって計算すると

$$(21) \quad h(z,\zeta) = \log\left|\frac{1-\bar{\zeta}z}{z-\zeta}\right| - \frac{1}{2}\frac{(1-|\zeta|^2)(1-|\zeta|^2|z|^2)}{|1-\bar{\zeta}z|^2},$$

$$(22) \quad k(z,\zeta) = 2\pi\frac{1-|z|^2|\zeta|^2|2-\bar{\zeta}z|^2}{|1-\bar{\zeta}z|^4}.$$

次に U_0 を $0<|z|<1$ としその弾性 Green 函数を $\beta_0(z,\zeta)$ とすると (19) から

$$(23) \quad \begin{aligned}\beta_0(z,\zeta) = {}& \frac{\pi}{2}|z-\zeta|^2\log\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right| + \frac{\pi}{4}(|z|^2-1)(|\zeta|^2-1) \\ & -\frac{\pi}{4}\left(2|z|^2\log|z|-(1-|z|^2)\right)\left(2|\zeta|^2\log|\zeta|-(1-|\zeta|^2)\right)\end{aligned}$$

となる．0 における θ 方向微分を D_θ とすると

$$D_\theta\beta_0(0,\zeta) = \frac{\pi}{2}|\zeta|(|\zeta|^2-2\log|\zeta|-1)\cos(\theta-\arg\zeta)$$

となるから，$\beta_0(0,\zeta)=0$ に注目すれば，$\beta_0(z,\zeta)$ は，0 と ζ を通る直線上 0 を通過するときに前后で符号を変えることがわかる．これは多分最も簡単な Hadamard 予想に対する反例であると思う（[4] 参照）．(23) から (21), (22) と同様にして $k_0(z,\zeta)$, $h_0(z,\zeta)$ が計算できる．

7. 空間 $H_p(R)$ と双対性（付録）．L_2 の部分空間として H_2 を考えたが，その自然な一般化として，L_p の部分空間

として H_p を考える．(3)を導いたと同様の考え方で

$$(24) \qquad \dim H_p(R_{\underset{\sim}{\zeta}}) = \begin{cases} m-1 & (p\in(2,+\infty)) \\ m-\operatorname{rank} A(\underset{\sim}{\zeta}) & (p\in[1,2]) \end{cases}$$

が示される．$p\in[1,+\infty)$ に対して $1/p+1/p^*=1$ となる p^* を取ると $L_p^*=L_{p^*}$ であるが，もし

$$(25) \qquad H_p^* = H_{p^*} \quad (?)$$

となれば便利であるので，これが成り立つか否かを問題とした（[5, p.350] 参照）．もし

$$(26) \qquad L_p(R)=H_p(R)+Cl_p[\Delta C_0^\infty(R)] \quad (?)$$

が正しければ（Cl_p は L_p 内の閉包），これと $L_p^*=L_{p^*}$ より上の(25)も正しい．言う迄もなく $p=2$ に対しては(25)，(26)共に正しい．所が，(24)を使えば，$p\neq 2$ なるかぎり(25)，従って(26)，は一般には成立しないことが直ちにわかる．H を A（解析函数）におきかえた A_p についても同様に $A_p^*=A_{p^*}$ は $p\neq 2$ なら必ずしも成り立たない．

8．研究問題．本稿に関連して興味があると思われる未解決問題を列記する．本稿で論じた所の高次元化に関するものが多い．

(I) $\mathbb{R}^n$ を n 次元 Euclid 空間（$n\geqq 2$），従って $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$，とす

る．$n \geqq 3$ のとき，R を $\mathbb{R}^n$ の部分領域として $H_2(R)$ の次元分布はどの様であるか．又 $O_{H_2}^n$（$H_2(R)=\{0\}$ となる $\mathbb{R}^n$ の部分領域 R の全体）はどうなるか．定理1，2の本質は基本特異性 l_G の二乗可積性にあるから $n=3$ の場合には定理1，2と同様の結果が期待されるが，$n \geqq 4$ では全然異った様相を呈する筈と思う．

(II)　$n \geqq 3$ の場合 $\mathbb{R}^n$ の強領域を決定せよ．$n=3$ については定理3に近いものであろうが $n \geqq 4$ ではすっかり様子が異ると思われる．

(III)　$n \geqq 3$ の場合について定理4，5が成り立つであろうか．やはり $n=3$ の場合は $n=2$ と同様であると予想するが，$n \geqq 4$ では全然見当もつかない．

(IV)　$\beta(z, \zeta)$ について，弾性論的見地からは $n=2, 3$ の場合が具体的な意味があると言う点で重要であるが，数学的には一般次元でも興味はある．一般次元で単位球の弾性 Green 函数の具体的表示を求めよ．特に $n=3$ では断然重要で，単独境界（孤立点境界の意）における β の挙動を知る上で不可欠と思い色々試みたがいまだうまく求まらない．

(V) 上記問題(I)を $H_p(R)$ ($p \in [1, +\infty]$) で論ぜよ．やはり $n=3$ と $n \geqq 4$ ですっかり様子が違うであろうと思う．

(VI) $n=2$ で，常に $H_p^* \neq H_{p^*}$ ($p \neq 2$) であるのではないであろうか．又単位円の場合でどうなるか．$n \geqq 3$ で，特に $n \geqq 4$ で H_p^* と H_{p^*} の関係はどうなっているか．

参考文献

[1] P. Garabedian : Partial Differential Equations, Wiley, 1967.

[2] M. Nakai - L. Sario : Duffin's function and Hadamard's conjecture, Pacific J. Math., 68 (1977).

[3] ———— : Existence of biharmonic Green's functions, Proc. London Math. Soc., 36 (1978).

[4] ———— : Green's functions of the clamped punctured disk, J. Austral. Math. Soc., 発刊予定.

[5] L. Sario - M. Nakai - C. Wang - L. Chung : Classification Theory of Riemannian Manifolds, Lecture Note in Math., 605, Springer, 1977.