数理解析研究所講究録
第 324 巻 1978 年 40-48

強結合フェルミ場の模型
(Holonomic Quantum Fields I)

京大数理研　神保　道夫

文献[1],[2],[4]において、補助の自由フェルミ場から出発して強結合のボーズ場の模型が構成され，それが線型微分方程式系の変形理論と深い関係にあることが明らかにされて来た。本稿では、自由ボーズ場を補助場にとって類似をたどることにより強結合フェルミ場が構成されることを示す。これら2つの理論は互いに相反的な関係にあり，両者を同時に考察することが自然である。

1. まず指導原理として、有限次元における回転の理論(の symplectic version)を確立しておきたい。

次のものから出発する。

W : N(偶数)次元複素ベクトル空間

$\langle\ ,\ \rangle$: W上の非退化反対称内積

$A(W)$: 基本関係式 $ww'-w'w=\langle w,w'\rangle$ $(w,w'\in W)$

によりWから生成された enveloping algebra

orthogonal space の場合と異なって，$A(W)$は無限次元空間になる。今Wの holonomic 分解 $W=V^{\dagger}\oplus V$ ($V, V^{\dagger}$ は $N/2$

次元部分空間で，その上で内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が恒等的に 0 となる）が一つ与えられるごとに，W 上の symmetric tensor algebra $S(W)$ への線型全単射

(1) $\quad Nr : A(W) \xrightarrow{\sim} S(W) \quad , \quad Nr(1) = 1$

が定義される[(*)]。$A(W)$ は多項式係数微分作用素環（$N/2$ 変数）と同一視でき，そのとき Nr は total symbol をとる写像にあたる。$A(W)$ の元 a に対し，$Nr(a)$ の定数項（degree 0 の項）を $\langle a \rangle$ と書いて a の真空期待値と呼ぶ。

我々が考える対象は，$A(W)$ の元のうち特に次のような性質をもつ g である：

(2) $\quad \exists T_g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \quad \text{s.t.} \quad g w = T_g(w) g \quad \forall w \in W$.

（実は，このような g を考えるためには，ある種の無限級数を許容するように $A(W)$, $S(W)$ を少し拡張しないと具合が悪い。どう拡張するべきかは筆者は正確に知らないので，以下の議論は既にこのような拡張ができたものとして進める。目的は無限次元の W に適用すべき指導原理を探すことにあるので差支えはない。）

orthogonal の場合と同様に，(2) をみたす最も基本的な g は次の形をしている：

(3) $\quad Nr(g) = \langle g \rangle e^{\frac{1}{2}\rho} \quad , \quad \rho \in S^2(W)$.

この ρ と（symplectic な）回転 T_g の関係を与えるために，W の

(*) より一般な Nr 写像が定義できる（cf. [3], [5]）がここでは触れない。

基 $v_1, \cdots, v_N$ を任意に選んで

$$(4) \qquad \tfrac{1}{2}\rho = (v_1, \cdots, v_N) R \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \qquad {}^tR = R$$

$$(T_g(v_1), \cdots, T_g(v_N)) = (v_1, \cdots, v_N) T$$

とおく。

(5) 公式 (symplectic case)

$$R = (T-1)(K - {}^tKT)^{-1}$$

$$\langle g \rangle^2 = nr(g) \det((K - {}^tKT)(K - {}^tK)^{-1})^{-1}$$

ここに，Kは真空期待値の表

$$K = (\langle v_\mu v_\nu \rangle)_{\mu, \nu = 1, \cdots, N}$$

また $nr(g) = gg^* = g^*g \in \mathbb{C}$，但し $a \mapsto a^*$ は $w^* = \sqrt{-1}\,w$ $(w \in W)$ で特徴づけられる $A(W)$ の反自己同型。

比較のため orthogonal の公式を揚げておく。

(6) 公式 (orthogonal case)

$$R = (T-1)(K + {}^tKT)^{-1}$$

$$\langle g \rangle^2 = nr(g) \det((K + {}^tKT)(K + {}^tK)^{-1})$$

${}^tK$ の符号と det の指数のみ変更されることに注意されたい。

2. (複素)自由ボーズ場の生成消滅演算子を $\phi(u), \phi^*(u)$ とする $(u \in GL(1, \mathbb{R}))$。即ちこれらは次の式を満たす場の量であるとする：

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} [\phi(u), \phi(u')] & [\phi(u), \phi^*(u')] \\ [\phi^*(u), \phi(u')] & [\phi^*(u), \phi^*(u')] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} 2\pi u\, \delta(u+u')$$

$$(8)\qquad \begin{pmatrix} \langle \phi(u)\phi(u')\rangle & \langle \phi(u)\phi^*(u')\rangle \\ \langle \phi^*(u)\phi(u')\rangle & \langle \phi^*(u)\phi^*(u')\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} 2\pi u_+ \delta(u+u') \quad {}^{(*)}$$

Fourier変換した時空表示

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{du}\; e^{-im(x^-u+x^+u^{-1})}\phi(u)$$

$$\phi^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{du}\; e^{-im(x^-u+x^+u^{-1})}\phi^*(u)$$

$$x = (x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2, \quad x^\pm = (x^0 \pm x^1)/2, \quad m > 0 \;;\; \underline{du} = \frac{du}{2\pi |u|}$$

は, Klein-Gordon 方程式

$$(9)\qquad \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + m^2\right)\phi = 0 \qquad (\phi^* \text{も同様})$$

を満たし, 同時刻で正準交換関係

$$\left[\phi(x), \frac{\partial}{\partial x^0}\phi^*(x')\right] = i\delta(x^1 - x'^1)$$
$$\left[\phi^*(x), \frac{\partial}{\partial x^0}\phi^*(x')\right] = i\delta(x^1 - x'^1) \qquad (x^0 = x'^0)$$

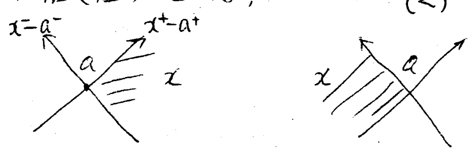
を満足する(φ同志, φ*同志は可換)。

さて, $l \in \mathbb{C}$ を与えた時, これら自由ボーズ場の演算子と次のような交換関係をもつ演算子 $\varphi_B(a;l)$ を導入する:

$$(10)\qquad \varphi_B(a;l)\phi(x) = \begin{cases} \phi(x)\varphi_B(a;l) & (x : a\text{の右のとき}) \\ e^{2\pi i(l-\frac{1}{2})}\phi(x)\varphi_B(a;l) & (\;〃\quad \text{左}\quad 〃\;) \end{cases}$$

$$\varphi_B(a;l)\phi^*(x) = \begin{cases} \phi^*(x)\varphi_B(a;l) & (x : a\text{の右のとき}) \\ e^{2\pi i(l-\frac{1}{2})}\phi^*(x)\varphi_B(a;l) & (\;〃\quad \text{左}\quad 〃\;) \end{cases}$$

ここに x が a の右(左)とは, $(x-a)^+ \underset{(<)}{>} 0$ かつ $(x-a)^- \underset{(>)}{<} 0$ のことを言う。



(*) $\phi^\dagger(u) = \phi^*(-u)$, $\phi(u)$ $(u>0)$ が粒子の生成・消滅を, $\phi^{*\dagger}(u) = \phi(-u)$, $\phi^*(u)$ $(u>0)$ が反粒子の生成・消滅を担う。

具体的には$\varphi_B(a;\ell)$として次のようにとればよい。

$$\mathrm{Nr}(\varphi_B(a;\ell)) = e^{\frac{1}{2}\rho_B(a;\ell)}$$

(11) $$\frac{1}{2}\rho_B(a;\ell) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{du}\,\underline{du'}\, R_B(u,u';\ell)\, e^{-im(\bar{a}(u+u')+a^+(u^{-1}+u'^{-1}))}\, \phi(u)\phi^*(u')$$

$$R_B(u,u';\ell) = -2\cos\pi\ell\,(0+iu)^{-\ell+\frac{1}{2}}(0+iu')^{\ell+\frac{1}{2}}\frac{-i}{u+u'-i0}.$$

これらは[4]で構成された$\varphi_F(a;\ell)$と殆んど同じ形をしている。実際ϕ, ϕ^*を自由フェルミ場ψ, ψ^*に，R_Bを

$$R_F(u,u';\ell) = 2i\sin\pi\ell\cdot(0+iu)^{-\ell+\frac{1}{2}}(0+iu')^{\ell+\frac{1}{2}}\frac{-i}{u+u'-i0}$$

にすれば，(10)に対応して

(12)
$$\varphi_F(a;\ell)\psi(x) = \begin{cases} \psi(x)\varphi_F(a;\ell) & (x : a\text{の右}) \\ e^{2\pi i\ell}\psi(x)\varphi_F(a;\ell) & (\quad〃\quad\text{左}) \end{cases}$$

$$\varphi_F(a;\ell)\psi^*(x) = \begin{cases} \psi^*(x)\varphi_F(a;\ell) & (x : a\text{の右}) \\ e^{-2\pi i\ell}\psi^*(x)\varphi_F(a;\ell) & (\quad〃\quad\text{左}) \end{cases}$$

となるのであった。

3. 交換関係(10)の帰結として，真空期待値

(13) $$w_{B,\nu,\pm}(x) = \langle \phi(x)\varphi_B(a_1;\ell_1)\cdots\varphi^{*B}_{\ell_\nu\pm\frac{1}{2}}(a_\nu;\ell_\nu)\cdots\varphi_B(a_n;\ell_n)\rangle$$

は著しい性質をもつ。ここに

$$\mathrm{Nr}(\varphi^{*B}_{\ell'}(a;\ell)) = e^{\frac{1}{2}\rho_B(a;\ell)} \times \int \underline{du}\,(0+iu)^{\ell'} e^{-im(\bar{a}u+a^+u^{-1})}\phi^*(u).$$

即ち，$w_{B,\nu,\pm}$はEuclid時空 x^0 ($=-ix^2$ とおく) $\in i\mathbb{R}$ へ解析接続されて，(9)の結果 Euclid的 Klein-Gordon方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}} - m^2\right)w = 0 \qquad \left(z = \frac{x^1+ix^2}{2} = -x^-,\ \bar{z} = \frac{x^1-ix^2}{2} = x^+\right)$$

の解で無限遠($|z|\to\infty$)で指数減少するものになるが，更に

点a_μに対応するEuclid時空の点（それも$a_\mu \in \mathbb{C}$と書く）において

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
w_{B,\mu,+} &\sim c_0^{(\nu)} \cdot \delta_{\mu\nu} (z-a_\mu)^{-l_\mu - \frac{1}{2}} + c_{1,\nu,+}^{(\mu)} (z-a_\mu)^{-l_\mu+\frac{1}{2}} + \cdots \\
&\qquad\qquad + c_{1,\nu,+}^{*(\mu)} (\bar{z}-\bar{a}_\mu)^{+l_\mu+\frac{1}{2}} + \cdots \\
w_{B,\nu,-} &\sim \qquad\qquad c_{1,\nu,-}^{(\mu)} (z-a_\mu)^{-l_\mu+\frac{1}{2}} + \cdots \\
&\quad c_0^{*(\nu)} \cdot \delta_{\mu\nu} (\bar{z}-\bar{a}_\mu)^{+l_\mu-\frac{1}{2}} + c_{1,\nu,-}^{*(\mu)} (\bar{z}-\bar{a}_\mu)^{+l_\mu+\frac{1}{2}} + \cdots
\end{aligned}
$$

のような振舞をする（$\cdots$ は $(z-a_\mu)$, $(\bar{z}-\bar{a}_\mu)$ の高次項）。特にモノドロミー $e^{2\pi i(l_\mu-\frac{1}{2})}$ をもつことに注意。

以上のような函数全体の空間は有限次元となり(**)，[2]において与えられているのと全く同じ形の(*) holonomic system が基底 $w_{B,\nu,\pm}$ $(\nu=1,\cdots,n)$ の間に成立つ。この事実から，τ函数の対数微分が得られる機構も全く変更なしに移行できて，次の結果が得られる。

$$
\begin{aligned}
\tau_{B,n} &= \langle \varphi_B(a_1; l_1) \cdots \varphi_B(a_n; l_n) \rangle \\
\tau_{F,n} &= \langle \varphi_F(a_1; l_1-\tfrac{1}{2}) \cdots \varphi_F(a_n; l_n-\tfrac{1}{2}) \rangle
\end{aligned}
$$

とおけば

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
d\log\tau_{B,n} &= -d\log\tau_{F,n} \\
&= \mathrm{trace}\Big(\tfrac{1}{2}F\Theta + m^2(G^{-1}\bar{A}G-\bar{A})dA \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\bar{F}\bar{\Theta} + m^2(\bar{G}^{-1}A\bar{G}-A)d\bar{A}\Big)
\end{aligned}
$$

但し $A=(\delta_{\mu\nu}a_\nu)$，そして F, G, Θ は次の完全積分可能な全微分方程式系の解。

(*) 但し $M_F \Rightarrow z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv M_B$ とおきかえる。

(**) ここでは $-\frac{1}{2} < l_\nu < \frac{1}{2}$ とする。

$$
(16)\quad \begin{cases} dF = [\Theta, F] + m^2([dA, G^{-1}\bar{A}G] + [A, G^{-1}d\bar{A}G]) \\ dG = -G\Theta - {}^t\bar{\Theta}G \\ [F, dA] + [\Theta, A] = 0 \\ \text{diagonal of } \Theta = 0, \quad \text{diagonal of } F = \begin{pmatrix} l_1 & & \\ & \ddots & \\ & & l_n \end{pmatrix} \\ {}^t\bar{F} = GFG^{-1}, \quad {}^t\bar{G} = G. \end{cases}
$$

従って，$\tau_{B,n}\cdot\tau_{F,n}$ は $a_\nu, \bar{a}_\nu$ によらない定数であるが，無限遠の挙動により実際

$$
(17)\qquad \tau_{B,n}\cdot\tau_{F,n} = 1
$$

が確かめられる。τ函数が逆数になるのは，公式 (5), (6) における det の指数が互いに逆であることに起因している。

4　特に $l_\nu = 0$ である時は，中性の自由ボーズ場を用いても理論が作れる。この事情も orthogonal の場合と同じで，後者では特にそれが Ising 模型のスピン演算子のスケール極限に対応している。

今次の式で2成分の場 $\varphi^B(a) = {}^t(\varphi^B_+(a), \varphi^B_-(a))$ を導入する：

$$
\mathrm{Nr}(\varphi^B_\pm(a)) = e^{\frac{1}{2}\rho_B(a)}\cdot\int \underline{du}\,\sqrt{0+iu}^{\,\pm 1}\, e^{-im(\bar{a}u + a^{t}u^{-1})}\phi(u)
$$

$$
\frac{1}{2}\rho_B(a) = \frac{1}{2}\iint \underline{du}\,\underline{du'}\,\frac{-2\sqrt{u-i0}\sqrt{u'-i0}}{u+u'-i0}\, e^{-im(\bar{a}(u+u') + a^{t}(u^{-1}+u'^{-1}))}\phi(u)\phi(u')
$$

（ここの $\phi(u)$ は，$[\phi(u), \phi(u')] = 2\pi u\delta(u+u')$ をみたす中性ボーズ場で，2. の ϕ とは違う意味に用いている。）この時，φ^B は [1] の場 $\varphi^F(a)$ に対応する性質をもつ。今対照表を作れば次のようになる：

	$\varphi^B(a) = {}^t(\varphi_+^B(a), \varphi_-^B(a))$	$\varphi^F(a)$
補助場	ボーズ	フェルミ
微視的因果律	局所反可換	局所可換
漸近場	存在	存在
S行列 (N:粒子数)	$(-)^{N(N-1)/2}$	$(-)^{N(N-1)/2}$

漸近場の関係は相反的である。即ち，$\varphi^B(a)$の漸近場$\psi_{in}(u)$, $\psi_{out}(u)$は補助ボーズ場によって

$$(18)\quad \mathrm{Nr}(\psi_{\substack{in\\out}}(u)) = \phi(u)\exp\left\{-2\int_0^\infty du'\,\theta(\pm(|u|-|u'|))\,\phi^+(u)\phi(u)\right\}$$

と表わされる。自由ボーズ場から(18)式で与えられる$\psi(u)$は自由フェルミ場の反交換関係を満足する。逆に自由フェルミ場$\psi(u)$から

$$(19)\quad \mathrm{Nr}(\phi_{\substack{in\\out}}(u)) = \psi(u)\exp\left\{-2\int_0^\infty du'\,\theta(\pm(|u|-|u'|))\,\psi^+(u)\psi(u)\right\}$$

で定められる$\phi(u)$は，自由ボーズ場となる。これが$\varphi^F(a)$の漸近場に他ならない([1])。

τ函数の関係は(17)を少し修正して

$$(20)\qquad \tau_{B,n}\cdot\tau_{F,n} = \sqrt{\det(\mathrm{ch}\,H)}$$

となる。ここにHは全微分方程式(16)で$G = e^{-2H}$, ${}^tH = -H = \bar{H}$, で定義される。例えば$n=2$では

$$(21)\qquad \begin{aligned}\tau_{B,2} &= \exp\left(-\frac{1}{4}\int_t^\infty ds\cdot s\left(-\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 + \mathrm{sh}^2\psi\right)\right)\\ \tau_{F,2} &= \mathrm{ch}\left(\frac{\psi}{2}\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{4}\int_t^\infty ds\cdot s\left(-\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 + \mathrm{sh}^2\psi\right)\right)\end{aligned}$$

$$t = 2m\sqrt{(a_1-a_2)(\bar{a}_1-\bar{a}_2)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{t}{2}\,sh(2\psi)$$

因子 $ch(\frac{\psi}{2})$ は，φ^F の Landau 特異点における order of singularity の異常をひきおこす（[1] 参照）。

参考文献

[1] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo : Proc. Japan Acad 53 A, 6-10 (1977)

[2] ______________ : ibid.,

[3] ______________ ibid.,

[4] ______________ : RIMS preprint 239 (1977).

[5] ______________ : Publ. RIMS 14, to appear.