数理解析研究所講究録
第 324 巻 1978 年 64-96



# Classical Euclidean Yang-Mills 場に於ける Self-Dualityの幾何学的意味について

東大 理 村瀬元彦

## §1. Gauge 場の出現

*All such theories may be expressed as superpositions of certain "simple" theories; we show that each "simple" theory is associated with a simple Lie algebra.*

*Glashow & Gell-Mann*

M : 4次元 Minkowski 空間, $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$ をその metric tensor とする. よく用いられる座標 $x_0, x_1, x_2, x_3$ に対し $dx_0\wedge dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ を volume element とする orientation を fix する. $\phi : M \longrightarrow \mathbb{C}^n$ なる vector値函数に対し, 積を $\phi\cdot\phi' = {}^t\bar{\phi}\cdot\phi'$ によって定めるとき,

(1) $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}d\phi\wedge * d\phi + \frac{1}{2}m^2\phi\wedge *\phi$ を自由場の Lagrangean density という. (定符号でない内積を持った空間上の $*$-operator については例えば H.Flanders [8] 参照) また $S = \int_M \mathcal{L}$ を作用という. Sの変分が0として Euler-Lagrange の運動方程式を導くと $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = d\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta d\phi}$ となる. 但し

$$\begin{cases}\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} : \phi\text{を一番目に持ってきて消す}\\[2mm] \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta d\phi} : d\phi\text{を一番前に持ってきて消す}\end{cases}$$

で，$\phi, *\phi, d\phi, *d\phi$ をすべて独立だと思って計算する．(1)の場合は $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = \frac{1}{2} m^2 * \phi$ ，$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta d\phi} = -\frac{1}{2} * d\phi$ ゆえ

(2) $d * d\phi + m^2 * \phi = 0$ を得る．これを Klein-Gordon 方程式という．

今，$\phi: M \to \mathbb{C}^1$ が電荷を持った粒子の場を表わすものとしよう．我々は $|\phi|^2$ を電荷を通して存在確率として認識するだけだから，$\phi \to g\phi$ $(g: M \to U(1))$ なる変換を行なっても我々は知ることが出来ない．従って $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, d\phi)$ は $\phi \to g \cdot \phi$ によって不変なように出来ていなければならない．(1)のかわりにどのようなものをとればよいだろうか？

$\phi \to g \cdot \phi$ は何かを変えているのではなく，同じものを違った風にとらえているのだ，と考えるならば，それを vector bundle の sectionの表示の変換としてとらえることが出来る．そこで，

E : M上の $\mathbb{C}^1$-bundle ，structure group は $U(1)$．

$\phi \in \Gamma(M, E)$ ，とし，exterior covariant differentiation D を用い，

(3) $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} D\phi \wedge * D\phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \wedge * \phi$ とすると，これは section の表示のしかたにはよらない．（$D\phi$ は tensorial 1-form ゆえ M上の 1-form と見做せる．$*D\phi$ は M上の 3-formとして定義される．）さて，(1)の形の Lagrangean を(3)にかえるには connection を導入せねばならない．P を M上の $U(1)$-principal bundle，A を P上の connection form とする．D は A を含んでいるから，(3)の $\mathcal{L}$ は，

$\phi$だけでなく新しい「場」Aを含んでいる．「場」と見たときのconnection formを gauge field と呼ぶ．

Aに対する運動方程式を導びく為に，AのLagrangean densityを定めよう．Aはtensorial 1-formではないからM上のformとは見なせない．従ってAだけの項（質量項）でsectionの表示によらないものはとれない．そこで，gauge場のLagrangeanを

(4) $$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2} DA \wedge * DA$$

と定める．DAはtensorial 2-formゆえ$\mathcal{L}_G$はM上の4-formとしてwell-defined．

作用 $S_G = \int_M \mathcal{L}_G$ の変分方程式からEuler-Lagrange方程式を導くと，$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta A} = (-1)^{\deg A} D \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta DA}$ となるから，整理して

(5) $$D * DA = 0$$

を得る．Aは可換Lie環に値を持つ1-formゆえ $DA = dA + \frac{1}{2}[A, A] = dA$．よって(5)は $d * dA = 0$ と書かれる．$d * dA = 0$ は4元vector potential Aを用いて書いたMaxwellの電磁場の方程式に他ならない．

$g : M \to U(1)$ を用いて $\phi \rightsquigarrow g \cdot \phi$ と変換することをgauge変換と呼ぶ．以上で判ったことは；電荷を持った場のLagrangeanはgauge invariantでなければならない．そのとき，Lagrangeanには新しいgauge場Aが出現する．そしてAはMaxwellの方程式を満たす．

Maxwellの方程式を満たす場は光子の場であるから，電磁相互作用が光によって媒介されることの数学的表現が出来た，と解釈される．

1954年に楊振寧とR.L.Mills[1]は，以上に述べたことの拡張としてB-fieldなる概念を導入した．B-fieldの必要性や物理的意味については[1]のintroductionに述べられているので，ここではその数学的定義を一般化して述べる．

$G$ : compact Lie group, $\rho: G \to U(n)$ をその$n$次元unitary表現，

$P \xrightarrow{\pi} M$ を$M$上の$G$-principal bundle (real analytic) とする．

$\widetilde{G} = \{ g : M \to G \mid M$ から $G$ へのreal analytic map$\}$ をgauge群と呼ぶ．

$B$ : $P$上のconnection form (real analytic)

$D$ : $B$によって定まるexterior covariant diferentiation

$\phi \in \Gamma(M, E)$

$E$ : $P, \rho$にassociateした$M$上の$\mathbb{C}^n$-vector bundle.

Gauge invariantな$\phi$のLagrangeanは

(6) $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} D\phi \wedge * D\phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \wedge * \phi$

と表わされる．$B$を場と見たとき，Yang-Mills場（あるいはG-gauge場）と呼ぶ．$B$のLagrangeanは(4)のまねをして

(7) $\mathcal{L}_{Y.M.} = -\frac{1}{2} \operatorname{trace}(DB \wedge * DB)$

と定める．$B$は$n$次反エルミート行列に値を持つ1-formであ

るから(4)とは違って(7)には"trace"をつけた．

$S_{Y\text{-}M.} = \int_M \mathcal{L}_{Y\text{-}M.}$ の変分方程式から Euler-Lagrange 方程式を導くと，形式的に $\dfrac{\delta \mathcal{L}_{Y\text{-}M.}}{\delta B} = -D \cdot \dfrac{\delta \mathcal{L}_{Y\text{-}M.}}{\delta DB}$ となり，

(8) $D * DB = 0$

を得る．(8)を Yang-Mills 方程式という．これは2階非線型方程式である．

$G = U(1)$ のとき connection form $A$ が電磁相互作用を記述したのと同様に，$G = SU(2)$ のときの Yang-Mills 場 $B$ が弱い相互作用を記述することが知られている．(例えば E.S. Abers & B.W. Lee [2].) 1974年頃からは，$G = SU(3)$ or もっと大きな群，とした場合の Yang-Mills 場が強い相互作用を記述するのではないか，と予想されている．

## §2. Euclidean Yang-Mills 方程式

Minkowski 空間ではなく metric tensor $\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$ を持った $\mathbb{R}^4$ 上で §1 と同じことをして得られる $B$ を Euclidean Yang-Mills 場という．(Euclidean で考えることの物理的意味については例えば吉川圭二[9].)

以下では $\mathbb{R}^4$ 上の Yang-Mills 場のみを考察する．

$\mathbb{R}^4$ の座標を $x_0, x_1, x_2, x_3$ とし，$dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ を volume element とする orientation をひとつ fix する．

改めて記号を定義する．（$G=SU(n)$ の場合のみ扱う．）

$P \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ：$SU(n)$ を fibre に持つ real analytic principal bundle

$B$ ：$P$ 上定義された connection form．値は $n$ 次反エルミート行列にもつものと考える．（$B$ は real analytic）

$D$ ：$B$ によって定まる exterior covariant differentiation

$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\,(DB \wedge * DB)$ ：Yang-Mills Lagrangean．

§1 では注意しなかったが，$DB$ は tensorial 2-form であり，$\mathcal{L}$ は $\mathbb{R}^4$ 上の 4-form として well-defined である．

$DB = dB + \frac{1}{2}[B, B]$ は $P$ 上の curvature form である．従って $F = DB$ とおけば

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\, F \wedge * F$$

は各点で正の値をとるから，

$$\|F\|^2 \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{trace}\, F \wedge * F$$

は curvature form の正定値 norm を定義する．Yang-Mills 方程式 $D * DB = 0$ の解 $B$ は $\|F\|^2$ の極値に対応している．

我々は $\|F\|^2$ が有限になる様な $B, F$ を扱いたい．そこで条件を強くして，$\infty$ 遠で十分早く $0$ になる $F$ を考える．このとき $B$ は $\infty$ 遠で constant．問題を幾何学化して扱う為に更に強く $F$ も $B$ も $\mathbb{R}^4 \sqcup \{\infty\} = S^4$ 上の real analytic form である，と仮定する．$P$ も $S^4$ 上定義された $SU(n)$-principal bundle と考える．

$$\|F\|^2 = \int_{S^4} -\frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\, F \wedge * F \,.$$

（$\mathbb{R}^4$ の metric と orientation から定まる metric と orientation を $S^4$ に与え，それを用いて $S^4$ 上の $*$-operator が定義されている）

$S^4$ 上の Yang-Mills 方程式

(9) $D*DB = 0$

の解を instanton solution と呼ぶ．

Bianchi の恒等式 $DDB = 0$ により，

(10) $*DB = \pm DB$ （or $*F = \pm F$）

なる B は (9) の解である．(+) の方を self-dual Y.-M. 方程式，(−) の方を anti-self-dual Y.-M. 方程式という．群が $SU(2)$ のとき，(9) の解であって (10) を満たさないものはまだひとつも知られていない．（[3]）

Real analytic fiber bundle $P \longrightarrow S^4$ の first Pontrjagin number は，

(11) $$p_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{S^4} \mathrm{trace}\, F \wedge F$$

で与えられる．Bundle $P$ を与えれば $p_1$ は定まる．

命題 1.

$p_1 \leqq 0$ ならば，$*F = -F \Longleftrightarrow \|F\|^2$ が最小．

$p_1 \geqq 0$ ならば，$*F = F \Longleftrightarrow \|F\|^2$ が最小．

<u>証明</u>　(Atiyah [7])

$su(n)$ ($n$次反エルミート行列全体) に値を持つ $S^4$ 上の 2-form の空間を $\Lambda^2$ と書く．$*: \Lambda^2 \to \Lambda^2$ で，$*^2 = 1$ ゆえ $*$ の固有値は $\pm 1$．$+1$ に属する固有空間を $\Lambda^+$，$-1$ に属する固有空間を $\Lambda^-$ で表わす．$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ である．この直和分解に従って，$F = F^+ \oplus F^-$ と分解する．$F^\pm \in \Lambda^\pm$．

$a \in \Lambda^+$，$b \in \Lambda^-$ に対し，

$$\begin{aligned} \mathrm{trace}\ a\wedge b &= \mathrm{trace}\ a\wedge(-*b) = \mathrm{trace}\ (-b)\wedge *a \\ &= \mathrm{trace}\ (-b\wedge a) = -\mathrm{trace}\ a\wedge b \end{aligned}$$

であるから $\mathrm{trace}\ a\wedge b = 0$ が成り立つ．

従って，

$$\begin{aligned} \|F\|^2 &= \int_{S^4} -\frac{1}{2}\mathrm{trace}\ F\wedge *F = \int_{S^4} -\frac{1}{2}\mathrm{trace}\,(F^+ + F^-)\wedge(F^+ - F^-) \\ &= \int_{S^4} -\frac{1}{2}\mathrm{trace}\ F^+\wedge *F^+ + \int_{S^4} -\frac{1}{2}\mathrm{trace}\ F^-\wedge *F^- \\ &\quad + \int_{S^4} \frac{1}{2}\mathrm{trace}\ F^+\wedge F^- - \int_{S^4}\frac{1}{2}\mathrm{trace}\ F^-\wedge F^+ \\ &= \|F^+\|^2 + \|F^-\|^2 . \end{aligned}$$

同様にして，

$$2\pi^2 p_1 = \|F^+\|^2 - \|F^-\|^2 .$$

$p_1 \leqq 0$ としよう．$\|F\|^2 + 2\pi^2 p_1 = 2\|F^+\|^2 \geqq 0$．

$\therefore\ \|F\|^2 \geqq -2\pi^2 p_1$　で，$\|F\|^2 = -2\pi p_1 \Leftrightarrow \|F^+\|^2 = 0 \Leftrightarrow F^+ = 0$．

よって $*F = -F$ のとき $\|F\|^2$ が最小値をとる．$p_1 \geqq 0$ の場合も同様．∎

Note

1°. $P_1 \leq 0$ かつ $*F = F \Rightarrow F = 0,\ P_1 = 0$.

実際, $\|F^+\|^2 \leq \|F^-\|^2$ で, $F^- = 0$ だから $F^+ = 0$ となる.
同様に $P_1 \geqq 0$ かつ $*F = -F$ なる解も 0 しかない.

2°. $S^4$ の orientation をかえると, $*$ の固有空間が入れかわり, $P_1$ の符号がかわる. 従って, $P_1 \geqq 0$ のとき $*F = F$ なる解があれば, それは orientation をかえれば $P_1 \leq 0$ のときの $*F = -F$ なる解に他ならない.

このように, self-dual と anti-self-dual とは本質的に同じものであるから, 以下では $S^4$ に (前に述べたような) orientation を fix し, もっぱら anti-self-dual Y.-M. 方程式のみを扱うことにする.

方程式 (9) $D*DB = 0$ は norm $\|F\|^2$ の極値に対応していたが, 方程式 (10) $*DB = \pm DB$ は norm $\|F\|^2$ の最小値に対応している訳である.

G. Girardi et.al. [3] によれば, SU(2) − Yang−Mills 場に対しては, 方程式 (10) 即ち (anti−) self-duality とエネルギー・運動量テンソルが消えることとが同値であるという. [3] には SU(n) $n \geqq 3$ の場合については証

明されていない。

Yang-Mills 場より易しい場合に，type (9) の方程式と type (10) の方程式がどのくらいちがっているか，について§5. で少し触れることにする。

## §3. Anti-self-duality と complex structure I.

M.F.Atiyah は [5] で，anti-self-dual Y.-M. 方程式が，ある実多様体上の概複素構造の積分可能性条件と同値であることを指摘した。§3 ではその正確な statement と証明を与える。

Hamilton の四元数体を $\mathbb{H}$ で表わし，$\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ と見なす。

$\pi : \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \longrightarrow S^4$ を次のように定める。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^4/\mathbb{C}^* \arrow[drr, dashed, "\pi"'] & \cong & \mathbb{H}^2/\mathbb{C}^* \arrow[d, "\text{natural projection}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& & S^4 \cong \mathbb{H}^2/\mathbb{H}^*
\end{tikzcd}$$

Projective space は $\mathbb{C}$ 上のものしか扱わないので，以下 $\mathbb{C}$ を略す。

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "SU(n)"] & \pi^*(P) \arrow[l, dashed] \arrow[d, "SU(n)"] & \arrow[r, Rightarrow, "\text{fibre を複素化}"'] & {} & \pi^*(P)^{\mathbb{C}} \arrow[d, "{SL(n,\mathbb{C})}"] \\
S^4 & \mathbb{P}^3 \arrow[l, "\pi"'] & & & \mathbb{P}^3
\end{tikzcd}$$

SU(n)-principal bundle $P \to S^4$ の $\pi$ による induced bundle を $\pi^*(P)$ とかく。$\pi^*(P)$ の fibre を複素化した bundle を $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$

で表わす．$P$ 上の real analytic な connection form $B$ と curvature form $F = DB$ の $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ への引きもどしを $B^{\mathbb{C}}$, $F^{\mathbb{C}}$ と書く．$B^{\mathbb{C}}$, $F^{\mathbb{C}}$ は $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ 上の real analytic な connection, curvature form である．

$\pi^*(P)^{\mathbb{C}} \ni u$ に於ける接空間 $T_u(\pi^*(P)^{\mathbb{C}})$ は，$B^{\mathbb{C}}$ によって horizontal 成分 $H_u$ と vertical 成分 $V_u$ とに直和分解されている．$H_u = \mathbb{C}^3$, $V_u = \mathbb{C}^{n^2-1}$ ゆえ $B^{\mathbb{C}}$ は

$T_u(\pi^*(P)^{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^{n^2-1}$ を与えていると言ってよい．即ち $B^{\mathbb{C}}$ は $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ の almost complex structure を unique に定めている．それを $J_B$ と書く．次の定理が知られている．

__定理 1.__

$J_B$ が integrable （i.e. $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ が複素多様体）

$\Longleftrightarrow$ $F^{\mathbb{C}}$ が type $(1,1)$ の form．

これを使って，[5] で述べられた次の定理が示される．

__定理 2.__ (Atiyah?)

$J_B$ が integrable $\Longleftrightarrow$ $*DB = -DB$ (anti-self-dual) on $S^4$．

<u>証明</u>　まず$\Leftarrow$を言う.

$S^4-\{\infty\}=\mathbb{R}^4$ の局所座標を $x_0, x_1, x_2, x_3$, $\mathbb{P}^3$ の同次座標を $\zeta_0:\zeta_1:\zeta_2:\zeta_3$ とする. $\pi:\mathbb{P}^3\longrightarrow S^4$ は,

$$
(12)\begin{cases}
x_0=\dfrac{1}{2\alpha}(\bar{\zeta}_0\zeta_2+\zeta_0\bar{\zeta}_2+\zeta_1\bar{\zeta}_3+\bar{\zeta}_1\zeta_3)\\
x_1=\dfrac{-i}{2\alpha}(\bar{\zeta}_0\zeta_2-\zeta_0\bar{\zeta}_2+\zeta_1\bar{\zeta}_3-\bar{\zeta}_1\zeta_3)\\
x_2=\dfrac{1}{2\alpha}(\bar{\zeta}_0\zeta_3+\zeta_0\bar{\zeta}_3-\zeta_1\bar{\zeta}_2-\bar{\zeta}_1\zeta_2)\\
x_3=\dfrac{-i}{2\alpha}(\bar{\zeta}_0\zeta_3-\zeta_0\bar{\zeta}_3-\zeta_1\bar{\zeta}_2+\bar{\zeta}_1\zeta_2)
\end{cases}
\qquad \alpha=|\zeta_0|^2+|\zeta_1|^2.
$$

で与えられる.

$F^{\mathbb{C}}$ は自然に $\mathbb{P}^3$ 上の 2-form と見なせるから, $\pi^*(dx_\mu\wedge dx_\nu)$ の ( $su(n)$-係数の) 一次結合で表わされる. 従って,

(※)　$\pi^*(\Lambda^-)\hookrightarrow\Lambda^{(1,1)}(\mathbb{P}^3)=\{\mathbb{P}^3$ 上の type$(1,1)$ form 全体$\}$

を言えばよい. ( $\Lambda^-$ は $S^4$ 上の anti-self-dual 2-form 全体. )

その為には, $\pi^* dx_\mu\wedge dx_\nu$ を具体的に計算すればよい.

$\mathbb{P}^3\cap\{\zeta_0\neq 0\}$ の局所座標を $(1:\zeta_1:\zeta_2:\zeta_3)$ で与える. このとき,

$$
(13)\begin{cases}
\pi^*dx_0=\dfrac{1}{2\alpha}(w_0d\zeta_1+\bar{w}_0d\bar{\zeta}_1+\quad d\zeta_2+\quad d\bar{\zeta}_2+\bar{\zeta}_1d\zeta_3+\zeta_1d\bar{\zeta}_3)\\
\pi^*dx_1=\dfrac{i}{2\alpha}(w_1d\zeta_1-\bar{w}_1d\bar{\zeta}_1-\quad d\zeta_2+\quad d\bar{\zeta}_2+\bar{\zeta}_1d\zeta_3-\zeta_1d\bar{\zeta}_3)\\
\pi^*dx_2=\dfrac{1}{2\alpha}(w_2d\zeta_1+\bar{w}_2d\bar{\zeta}_1-\bar{\zeta}_1d\zeta_2-\zeta_1d\bar{\zeta}_2+\quad d\zeta_3+\quad d\bar{\zeta}_3)\\
\pi^*dx_3=\dfrac{i}{2\alpha}(w_3d\zeta_1-\bar{w}_3d\bar{\zeta}_1-\bar{\zeta}_1d\zeta_2+\zeta_1d\bar{\zeta}_2-\quad d\zeta_3+\quad d\bar{\zeta}_3)
\end{cases}
$$

$$
\alpha=1+|\zeta_1|^2,\quad w_0=\bar{\zeta}_3-2x_0\bar{\zeta}_1,\quad w_1=-\bar{\zeta}_3+2ix_1\bar{\zeta}_1
$$
$$
w_2=-\bar{\zeta}_2-2x_2\bar{\zeta}_1,\quad w_3=\bar{\zeta}_2+2ix_3\bar{\zeta}_1
$$

である.

$\mathbb{R}^4$ 上の anti-self-dual 2-form の base は

$\langle dx_0\wedge dx_1 - dx_2\wedge dx_3\ ,\ dx_0\wedge dx_2 + dx_1\wedge dx_3\ ,\ dx_0\wedge dx_3 - dx_1\wedge dx_2\rangle$

であるから，$\pi^* dx_\mu\wedge dx_\nu = \pi^* dx_\mu \wedge \pi^* dx_\nu$ を計算して

(14) :

$$\pi^*(dx_0\wedge dx_1 - dx_2\wedge dx_3)$$

$$= \frac{-i}{2\alpha^3}\left\{2(\bar{\zeta}_1\zeta_2\zeta_3 + \zeta_1\bar{\zeta}_2\bar{\zeta}_3) + (1-|\zeta_1|^2)(|\zeta_2|^2-|\zeta_3|^2)\right\} d\zeta_1\wedge d\bar{\zeta}_1$$

$$+ \frac{-i}{2\alpha^2}\left\{(\bar{\zeta}_1\zeta_2 - \bar{\zeta}_3)\,d\zeta_1\wedge d\bar{\zeta}_2 + (\zeta_1\bar{\zeta}_2 - \zeta_3)\,d\zeta_2\wedge d\bar{\zeta}_1\right\}$$

$$+ \frac{i}{2\alpha^2}\left\{(\bar{\zeta}_1\zeta_3 + \bar{\zeta}_2)\,d\zeta_1\wedge d\bar{\zeta}_3 + (\zeta_1\bar{\zeta}_3 + \zeta_2)\,d\zeta_3\wedge d\bar{\zeta}_1\right\}$$

$$+ \frac{i}{2\alpha}\left(d\zeta_2\wedge d\bar{\zeta}_2 - d\zeta_3\wedge d\bar{\zeta}_3\right)$$

$$\pi^*(dx_0\wedge dx_2 + dx_1\wedge dx_3)$$

$$= \frac{1}{2\alpha^3}\left\{(\bar{\zeta}_1\zeta_2^2 - \zeta_1\bar{\zeta}_2^2) + (\bar{\zeta}_1\zeta_3^2 - \zeta_1\bar{\zeta}_3^2) + (1-|\zeta_1|^2)(\bar{\zeta}_2\zeta_3 - \zeta_2\bar{\zeta}_3)\right\} d\zeta_1\wedge d\bar{\zeta}_1$$

$$+ \frac{1}{2\alpha^2}\left\{(\bar{\zeta}_1\zeta_3 + \bar{\zeta}_2)\,d\zeta_1\wedge d\bar{\zeta}_2 - (\zeta_1\bar{\zeta}_3 + \zeta_2)\,d\zeta_2\wedge d\bar{\zeta}_1\right\}$$

$$+ \frac{1}{2\alpha^2}\left\{(-\bar{\zeta}_1\zeta_2 + \bar{\zeta}_3)\,d\zeta_1\wedge d\bar{\zeta}_3 - (-\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_3)\,d\zeta_3\wedge d\bar{\zeta}_1\right\}$$

$$+ \frac{1}{2\alpha}\left(d\zeta_2\wedge d\bar{\zeta}_3 - d\zeta_3\wedge d\bar{\zeta}_2\right)$$

$$\pi^*(dx_0\wedge dx_3 - dx_1\wedge dx_2)$$

$$= \frac{-i}{2\alpha^3}\left\{(\zeta_1\bar{\zeta}_3^2 + \bar{\zeta}_1\zeta_3^2) - (\zeta_1\bar{\zeta}_2^2 + \bar{\zeta}_1\zeta_2^2) + (1-|\zeta_1|^2)(\zeta_2\bar{\zeta}_3 + \bar{\zeta}_2\zeta_3)\right\} d\zeta_1\wedge d\bar{\zeta}_1$$

$$+ \frac{-i}{2\alpha^2}\left\{(\bar{\zeta}_1\zeta_3 + \bar{\zeta}_2)\,d\zeta_1\wedge d\bar{\zeta}_2 + (\zeta_1\bar{\zeta}_3 + \zeta_2)\,d\zeta_2\wedge d\bar{\zeta}_1\right\}$$

$$+ \frac{-i}{2\alpha^2}\left\{(\bar{\zeta}_1\zeta_2 - \bar{\zeta}_3)\,d\zeta_1\wedge d\bar{\zeta}_3 + (\bar{\zeta}_2\zeta_1 - \zeta_3)\,d\zeta_3\wedge d\bar{\zeta}_1\right\}$$

$$+ \frac{i}{2\alpha}\left(d\zeta_2\wedge d\bar{\zeta}_3 + d\zeta_3\wedge d\bar{\zeta}_2\right)$$

を得る．確かにすべて $(1,1)$ 型の 2-form である．よって，

$*F = -F \Longrightarrow F^{\mathbb{C}}$ は type $(1,1) \Longleftrightarrow J_B$ は integrable が言えた．

次に $\Longrightarrow$ を言う．

$f = \sum_{\mu<\nu} f_{\mu\nu}\, dx_\mu \wedge dx_\nu$ を $S^4$ 上の 2-form とする．

$\pi^*(f)$ が type $(1,1)$ $\Longrightarrow$ $*f = -f$ を言えばよい．

$\pi^*(f)$ が type $(1,1)$ ならば，特に $d\zeta_2 \wedge d\zeta_3$ の係数は $0$ である．

$\pi^*(f) = \sum_{\mu<\nu} f_{\mu\nu}\circ\pi(\pi^* dx_\mu \wedge dx_\nu)$ ゆえ (13) を用いて計算すると

$\alpha \neq 0$ だから

$$2i\bar{\zeta}_1(f_{01}\circ\pi + f_{23}\circ\pi) + (1+|\zeta_1|^2)(f_{02}\circ\pi - f_{13}\circ\pi)$$

$$+ i(-1+|\zeta_1|^2)(f_{03}\circ\pi + f_{12}\circ\pi) = 0 \quad \text{となる．}$$

任意の $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ について上式が成立

$\Longleftrightarrow$ $f_{01} = -f_{23}$，$f_{02} = f_{13}$，$f_{03} = -f_{12}$

$\Longleftrightarrow$ $f = f_{01}(dx_0 \wedge dx_1 - dx_2 \wedge dx_3) + f_{02}(dx_0 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3)$
$\qquad + f_{03}(dx_0 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_2)$

$\Longleftrightarrow$ $*f = -f$ ．

$\infty$ 遠点のところは座標をとりかえて調べればよい．$\blacksquare$

これで $S^4$ 上の anti-self-dual Y.-M. 場から，$\mathbb{P}^3$ 上の bundle $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ の複素構造が unique に決まることが判った．
Complex analytic bundle $\pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ からは，$\mathbb{P}^3$ 上の rank $n$ の holomorphic（従って algebraic）vector bundle が決まるから，anti-self-dual Y.-M. 場と algebraic vector bundle との対応がついた．

今まで知られていた(anti-) self-dual solution がすべて有理函数だったのは，はじめから algebraic なものしかなかったからだ，ということが明らかになった．

Atiyah-Ward [4] には，$n=2$ の場合に，対応する vector bundle の性質が詳しく調べられているが，我々は anti-self-duality の幾何学的表現をもう少し詳しく調べることにしよう．

## §4. Anti-self-duality と complex structure II.

$\mathbb{P}^3$ の相異なる2点 $\xi=(\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3)$，$\eta=(\eta_0:\eta_1:\eta_2:\eta_3)$ を通る1次元 linear subspace（projective line）を $\langle\xi\eta\rangle$ と表わす．

$$\mathbb{P}^5 \ni g = (g_{01}:g_{02}:g_{03}:g_{12}:g_{13}:g_{23})$$

$$G \underset{\text{def}}{=} \{ g \in \mathbb{P}^5 \mid g_{01}g_{23} - g_{02}g_{13} + g_{03}g_{12} = 0 \}.$$

$G$ は $\mathbb{P}^5$ の中の4次元代数多様体．このとき，

$$\{\mathbb{P}^3 \text{ の projective line 全体}\} \ni \langle\xi\eta\rangle \longrightarrow \mathrm{Plü}\langle\xi\eta\rangle = g \in G$$

を，$g_{ij} = \xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i$ によって定めると，

$\mathrm{Plü}: \text{Grassmann of } \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sim} G$ である．$\mathrm{Plü}\langle\xi\eta\rangle$ を $\langle\xi\eta\rangle$ の Plücker 座標という．

$G$ の定義方程式は，$\mathbb{P}^5$ の中で次のように座標変換すれば，$w_0^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 + w_5^2$ と書ける．従って，$\mathbb{R}^5$ の中の単位球面 $S^4$ の複素化が $G$ になっている．

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i & & & & \\ i & i & & & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & i & i & & \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{01} \\ g_{23} \\ g_{02} \\ -g_{13} \\ g_{03} \\ g_{12} \end{bmatrix} .$$

我々は$G$の局所座標として，上の$w$ではなく別のものをとる．$G$は$g_{01}g_{23} - g_{02}g_{13} + g_{03}g_{12} = 0$で定義されているから，$G$の$\{g_{01} \neq 0\}$上の函数 $\frac{g_{02}}{g_{01}}, \frac{g_{13}}{g_{01}}, \frac{g_{03}}{g_{01}}, \frac{g_{12}}{g_{01}}$ は，独立変数と思うことが出来る．そこで，

$$(15) \begin{cases} z_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{g_{03}}{g_{01}} - \frac{g_{12}}{g_{01}}\right) \\ z_1 = \frac{i}{2}\left(\frac{g_{03}}{g_{01}} + \frac{g_{12}}{g_{01}}\right) \\ z_2 = \frac{-1}{2}\left(\frac{g_{02}}{g_{01}} + \frac{g_{13}}{g_{01}}\right) \\ z_3 = \frac{-i}{2}\left(\frac{g_{02}}{g_{01}} - \frac{g_{13}}{g_{01}}\right) \end{cases}$$

を$G$の$\{g_{01} \neq 0\}$の局所座標として採用する．

<u>定義</u>　各$z_0, z_1, z_2, z_3$が実数である$G$の点と，$g_{01} = g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0$，$g_{23} = 1$なる1点とを$G$の実点と呼ぶ．また，Plücker座標で実点に対応する$\mathbb{P}^3$のprojective lineをreal lineと呼ぶ．

$G \supset \{実点全体\} \cong S^4$である．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 2.

$$\mathrm{Plü} : \{\text{real line 全体}\} \longrightarrow \{\text{実点全体}\} \ (\hookrightarrow G)$$

は, §3. でみた fibering $\pi : \mathbb{P}^3 \longrightarrow S^4$ に対応する. 即ち, $\{\text{real line 全体}\} = \{\pi \text{ の fiber 全体}\}$ で, その元 $^\forall \ell$ に対し $\mathrm{Plü}(\ell) = \pi(\ell) \in S^4 \hookrightarrow G$ が成り立つ.

証明

1°. $\pi$ の fiber が $\mathbb{P}^3$ の projective line になること.

§.3 では $\mathbb{P}^3 \cong \mathbb{H}^2/\mathbb{C}^*$ として $\mathbb{P}^3$ を作った. $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ とおこう. $\mathbb{P}^3 \ni \mathfrak{z}$ は $(\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 j, \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 j)/\mathbb{C}^*$ と表わされる. そこで, $\mathbb{P}^3$ の自己同型 $\sigma : \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^3$ を

$$\mathbb{P}^3 \ni (\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 j, \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 j)/\mathbb{C}^* \xrightarrow{\sigma} (j\mathfrak{z}_0 + j\mathfrak{z}_1 j, j\mathfrak{z}_2 + j\mathfrak{z}_3 j)/\mathbb{C}^*$$ に

よって定める. $j^2 = -1 \in \mathbb{C}^*$ ゆえ $\sigma^2 = 1$. また, $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_0 : \mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 : \mathfrak{z}_3)$ に対しては $\sigma(\mathfrak{z}) = (-\bar{\mathfrak{z}}_1 : \bar{\mathfrak{z}}_0 : -\bar{\mathfrak{z}}_3 : \bar{\mathfrak{z}}_2)$ と表わされるので $\sigma$ は fixed point を持たないことが判る.

$\pi(\mathfrak{z}) = (\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 j)^{-1}(\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 j) \in \mathbb{H}^2/\mathbb{H}^*$ であるから,

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(\mathfrak{z})) &= \{ (h(\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 j), h(\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 j))/\mathbb{C}^* \mid h \in \mathbb{H} \} \\
&= \{ ((\lambda + \mu j)(\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 j), (\lambda + \mu j)(\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 j))/\mathbb{C}^* \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \} \\
&= \{ \lambda(\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 j, \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 j)/\mathbb{C}^* + \mu(j\mathfrak{z}_0 + j\mathfrak{z}_1 j, j\mathfrak{z}_2 + j\mathfrak{z}_3 j)/\mathbb{C}^* \mid \\
&\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \} \\
&= \langle \mathfrak{z}\, \sigma(\mathfrak{z}) \rangle
\end{aligned}$$

である.

これで，$\pi$ の fiber が $\zeta \in \mathbb{P}^3$ によって $\langle \zeta \sigma(\zeta) \rangle$ と表わされることが判った．

$2°$．$\langle \zeta \sigma(\zeta) \rangle$ が real line であること．

Plü$\langle \zeta\sigma(\zeta)\rangle$ から (15) に従って $z_0, z_1, z_2, z_3$ を作ると，$\xi_{01} \neq 0$ のとき

$$
(16)\quad \begin{cases}
z_0 = \dfrac{1}{|\zeta_0|^2+|\zeta_1|^2}\,\mathrm{Re}(\zeta_0\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1\zeta_3) \\
z_1 = \dfrac{-1}{|\zeta_0|^2+|\zeta_1|^2}\,\mathrm{Im}(\zeta_0\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1\zeta_3) \\
z_2 = \dfrac{-1}{|\zeta_0|^2+|\zeta_1|^2}\,\mathrm{Re}(-\zeta_0\bar{\zeta}_3 + \bar{\zeta}_1\zeta_2) \\
z_3 = \dfrac{1}{|\zeta_0|^2+|\zeta_1|^2}\,\mathrm{Im}(-\zeta_0\bar{\zeta}_3 + \bar{\zeta}_1\zeta_2)
\end{cases}
$$

$\mathrm{Re}$ : real part

$\mathrm{Im}$ : imaginary part

を得る．これらはすべて実数．また $\xi_{01} = |\zeta_0|^2 + |\zeta_1|^2 = 0$ なら

Plü$\langle \zeta\sigma(\zeta)\rangle = (0:0:0:0:0:1)$ $(\xi_{01} = \xi_{02} = \xi_{03} = \xi_{12} = \xi_{13} = 0)$

で，やはり $\langle \zeta\sigma(\zeta)\rangle$ は real line である．

$3°$．すべての real line が $\pi$ の fiber になること．

$(0:0:0:0:0:1)$ に対応する場合は明らか．

任意の 4 実数 $z_0, z_1, z_2, z_3$ を与えたとき，方程式

$$
(17)\quad \begin{cases}
z_0 - i z_1 = \dfrac{\zeta_0\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1\zeta_3}{|\zeta_0|^2+|\zeta_1|^2} \\
-z_2 + i z_3 = \dfrac{-\zeta_0\bar{\zeta}_3 + \bar{\zeta}_1\zeta_2}{|\zeta_0|^2+|\zeta_1|^2}
\end{cases}
$$

が，複素数解 $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ を持つことが判ればよい．(一意ではない．) しかしそれは明らか．▨

§.3 では，anti-self-duality が，$\pi$ で引き上げられた場合には概複素構造の積分可能条件であることを証明した．では

$S^4 \xhookrightarrow[\text{複素化}]{} G$ の図式で anti-self-duality をとらえると，どうなるであろうか？

$$\begin{array}{c} B \\ \downarrow{\scriptstyle SL(n,\mathbb{C})} \\ G \end{array}$$

を，complex Lie group $SL(n,\mathbb{C})$ を fiber にもつ holomorphic principal bundle over $G$ とする．

$B$ には holomorphic connection form $\omega$ と，holomorphic curvature form $\Omega$ とが与えられている，とする．

$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$ ゆえ，$G$ 上の 2-form と見たとき $\Omega$ は type $(2,0)$ である．

$S^4$ は $G$ の holomorphic submanifold ではないから $\pi^*(B|_{S^4})$ は $\mathbb{P}^3$ 上の holomorphic bundle かどうかは判らない．但し，次の定理が成立する．

$$\begin{array}{l} \pi^*(B|_{S^4}) \\ \quad\downarrow \\ \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\pi} S^4 \hookrightarrow G \end{array}$$

定理 3.

$\Omega$ の $S^4$ への制限 $\Omega|_{S^4}$ は，real analytic bundle $B|_{S^4} \longrightarrow S^4$ の real analytic curvature であるが，$S^4$ 上の 2-form とみて $\Omega|_{S^4}$ が anti-self-dual ならば（i.e. $*\Omega|_{S^4} = -\Omega|_{S^4}$ ならば），$\pi^*(B|_{S^4}) \longrightarrow \mathbb{P}^3$ は $\mathbb{P}^3$ 上の holomorphic bundle になる．

証明

(16) で定義した $z_\mu$ に対し $\mathrm{Re}\, z_\mu = x_\mu$ $(\mu = 0, \cdots, 3)$ とおく.
$(x_0, x_1, x_2, x_3)$ は $\mathbb{R}^4 \hookrightarrow S^4$ の局所座標で, この順に正の向きとなる様な orientation が与えられている.

$\mathbb{R}^4$ 上の 2-form の base に対し, $*$ は次のようになる;

$$
(18)\quad
\begin{cases}
* dx_0 \wedge dx_1 = dx_2 \wedge dx_3 \\
* dx_0 \wedge dx_2 = - dx_1 \wedge dx_3 \\
* dx_0 \wedge dx_3 = dx_1 \wedge dx_2 \\
* dx_1 \wedge dx_2 = dx_0 \wedge dx_3 \\
* dx_1 \wedge dx_3 = - dx_0 \wedge dx_2 \\
* dx_2 \wedge dx_3 = dx_0 \wedge dx_1 .
\end{cases}
$$

定理3の証明は, いくつかの step をへて完成する.

1°.

$\mathbb{P}^3 \ni \zeta = (\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3)$ に対し

$$
G_\zeta \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ (g_{01} : g_{02} : \cdots : g_{23}) \in \mathbb{P}^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} \zeta_i g_{jk} + \zeta_j g_{ki} + \zeta_k g_{ij} = 0 \\ \text{for } 0 \le i < j < k \le 3 \end{array} \right\}
$$

とおく. $G_\zeta$ は $\mathbb{P}^5$ の中の linear な 2次元 subspace であるから, $G_\zeta \cong \mathbb{P}^2$ である.

$G_\zeta$ の定義方程式から計算して, $G_\zeta \hookrightarrow G$ (部分複素多様体) であることを知る. このとき,

**Lemma 1.**

$\mathrm{Pl\ddot{u}}(\{\mathbb{P}^3$ の projective line で $\zeta$ を通るもの全体$\})$
$= G_\zeta$.

証明. $G_\zeta$ の定義方程式は, 上の条件を書き表わしたものであるから, 明らか. ∎

次の命題が, anti-self-duality の幾何学的意味を明らかにする重要な命題である.

**命題 3.**

すべての $\zeta \in \mathbb{P}^3$ に対し $\Omega|_{G_\zeta} \equiv 0$
$\Longleftrightarrow$ $\Omega|_{S^4}$ が anti-self-dual.

証明. $G \cap \{p_{01} \neq 0\}$ 上で証明する. また, $\zeta$ も $\zeta_0 \neq 0$ であるような点とする. (計算を易しくする為にこう仮定する. 一般の場合は, 座標をとりかえてやればよい.)

$p_{01} = 1$, $\zeta_0 = 1$ として, 残りの変数を座標と見なす. $G_\zeta$ の定義方程式は

$$(19)\quad \begin{cases} p_{12} = \zeta_1 p_{02} - \zeta_2 \\ p_{13} = \zeta_1 p_{03} - \zeta_3 \\ p_{23} = \zeta_2 p_{03} - \zeta_3 p_{02}. \end{cases}$$

$G$ 上の $(2,0)$-form の base は，

$$
(20)\quad
\begin{cases}
dz_0 \wedge dz_1 = \frac{i}{2}\, d\xi_{03} \wedge d\xi_{12} \\
dz_2 \wedge dz_3 = -\frac{i}{2}\, d\xi_{02} \wedge d\xi_{13} \\
dz_0 \wedge dz_2 = \frac{1}{4}\left( d\xi_{02} \wedge d\xi_{03} - d\xi_{02} \wedge d\xi_{12} - d\xi_{03} \wedge d\xi_{13} + d\xi_{12} \wedge d\xi_{13} \right) \\
dz_1 \wedge dz_3 = -\frac{1}{4}\left( d\xi_{02} \wedge d\xi_{03} + d\xi_{02} \wedge d\xi_{12} + d\xi_{03} \wedge d\xi_{13} + d\xi_{12} \wedge d\xi_{13} \right) \\
dz_0 \wedge dz_3 = \frac{i}{4}\left( d\xi_{02} \wedge d\xi_{03} - d\xi_{02} \wedge d\xi_{12} + d\xi_{03} \wedge d\xi_{13} - d\xi_{12} \wedge d\xi_{13} \right) \\
dz_1 \wedge dz_2 = \frac{i}{4}\left( d\xi_{02} \wedge d\xi_{03} + d\xi_{02} \wedge d\xi_{12} - d\xi_{03} \wedge d\xi_{13} - d\xi_{12} \wedge d\xi_{13} \right)
\end{cases}
$$

だから，$G_3$ 上への $(2,0)$-form の制限は，(20) に (19) を代入して計算すれば得られる：

$$
(21)\quad
\begin{cases}
dz_0 \wedge dz_1 \big|_{G_3} = -\frac{i}{2}\, \zeta_1\, d\xi_{02} \wedge d\xi_{03} \\
dz_2 \wedge dz_3 \big|_{G_3} = -\frac{i}{2}\, \zeta_1\, d\xi_{02} \wedge d\xi_{03} \\
dz_0 \wedge dz_2 \big|_{G_3} = \frac{1}{4}\,(1+\zeta_1^2)\, d\xi_{02} \wedge d\xi_{03} \\
dz_1 \wedge dz_3 \big|_{G_3} = -\frac{1}{4}\,(1+\zeta_1^2)\, d\xi_{02} \wedge d\xi_{03} \\
dz_0 \wedge dz_3 \big|_{G_3} = \frac{i}{4}\,(1-\zeta_1^2)\, d\xi_{02} \wedge d\xi_{03} \\
dz \wedge dz_2 \big|_{G_3} = \frac{i}{4}\,(1-\zeta_1^2)\, d\xi_{02} \wedge d\xi_{03}\,.
\end{cases}
$$

そこで，$G$ 上の $(2,0)$-form $f = \sum_{\mu<\nu} f_{\mu\nu}\, dz_\mu \wedge dz_\nu$ （係数はどこにあってもよい）の $G_3$ への制限を計算すると，(21) から，

$$
f\big|_{G_3} = \left\{ -\frac{i}{2}\zeta_1 (f_{01}+f_{23}) + \frac{i}{4}(1-\zeta_1^2)(f_{03}+f_{12}) + \frac{1}{4}(1+\zeta_1^2)(f_{02}-f_{13}) \right\}
d\xi_{02} \wedge d\xi_{03}
$$

$$= \left[\frac{1}{4}\{(f_{02}-f_{13}) - i(f_{03}+f_{12})\}\zeta_1^2 - \frac{i}{2}(f_{01}+f_{23})\zeta_1 + \frac{1}{4}\{(f_{02}-f_{13})+i(f_{03}+f_{12})\}\right]$$

$$d\xi_{02} \wedge d\xi_{03}$$

となる．従って

$$f|_{G_\zeta} = 0 \quad \text{for } \forall \zeta \in \mathbb{P}^3$$

$\iff$ 上式が $\zeta_1$ の2次式と見て恒等的に0．

$\iff$ $f_{02} - f_{13} = 0$，$f_{01} + f_{23} = 0$，$f_{03} + f_{12} = 0$．

$$\iff f = f_{01}(dz_0 \wedge dz_1 - dz_2 \wedge dz_3) + f_{02}(dz_0 \wedge dz_2 + dz_1 \wedge dz_3) + f_{03}(dz_0 \wedge dz_3 - dz_1 \wedge dz_2)$$

$$\iff * f|_{S^4} = - f|_{S^4}$$

$f$ として $\Omega$ をとれば，命題3の証明が終る．▨

<u>Lemma 2.</u>

$$\begin{array}{c} B|_{G_\zeta} \\ \downarrow \\ G_\zeta \hookrightarrow G \end{array}$$

は trivial bundle (for $\forall \zeta \in \mathbb{P}^3$)．
if $\Omega|_{S^4}$ が anti-self-dual．

<u>証明</u>．$G_\zeta$ 上の curvature form $\Omega|_{G_\zeta}$ は恒等的に0で，かつ $G_\zeta \cong \mathbb{P}^2$ は simply connected だから．▨

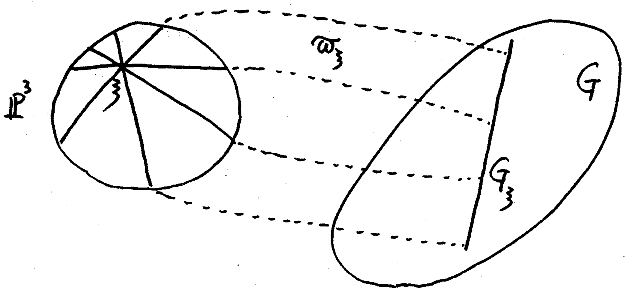
2°.

$\varpi_\zeta : \mathbb{P}^3 - \{\zeta\} \longrightarrow G_\zeta \hookrightarrow G$ なる map を，

$(\mathbb{P}^3-\{\zeta\}) \ni \eta \xrightarrow{\varpi_\zeta} \mathrm{Pl\ddot{u}}\langle \zeta\eta\rangle \in G_\zeta$ によって定める.

$\mathbb{P}^3$ を $\zeta$ で blowing-up したものを $Q_\zeta\mathbb{P}^3$ で表わせば, $\varpi_\zeta$ は

$Q_\zeta\mathbb{P}^3 \xrightarrow{\varpi_\zeta} G_\zeta$ なる




holomorphic map に拡張できる. このとき,

$\varpi_\zeta^*(B|_{G_\zeta}) \longrightarrow Q_\zeta\mathbb{P}^3$ は $Q_\zeta\mathbb{P}^3$ 上の holomorphic bundle.

<u>Lemma 3.</u>

$$\begin{tikzcd}
 & \varpi_\zeta^*(B|_{G_\zeta}) \arrow[dl] \arrow[d] \\
B|_{G_\zeta} \arrow[d] & Q_\zeta\mathbb{P}^3 \arrow[dl, "\varpi_\zeta"] \\
G_\zeta &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi^*(B|_{S^4}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbb{P}^3 \arrow[dr, "\pi"'] & B|_{S^4} \arrow[d] \\
 & S^4
\end{tikzcd}$$

$$\varpi_\zeta^*(B|_{G_\zeta})\Big|_{\mathbb{P}^3-\{\zeta\}} = \pi^*(B|_{S^4})\Big|_{\mathbb{P}^3-\{\zeta\}} \quad (\text{canonical に同型})$$

<u>証明</u>. $\mathbb{P}^3-\{\zeta\} \ni {}^\forall\eta$ に対し, 各々の bundle の fiber の間に, canonical な同型対応があることを見ればよい.

Bundle の fiber を, $B,_x$ のように表わす. ($B$ の $x$ での fiber.)

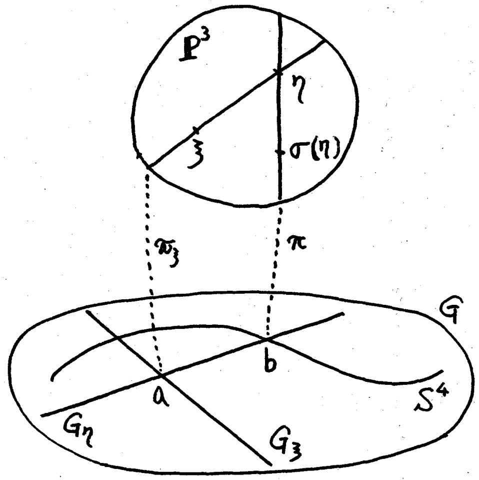
$\mathrm{Pl\ddot{u}}\langle\zeta\eta\rangle = a \in G_\eta$, $\mathrm{Pl\ddot{u}}\langle\eta\,\sigma(\eta)\rangle = b \in G_\eta$ とおく.

$G_\zeta \cap G_\eta = \{a\}$, $S^4 \cap G_\eta = \{b\}$ である. 引きもどしの定義から,

$$\begin{cases} \varpi_\zeta^*(B|_{G_\zeta}),_\eta = B,_a \\ \pi^*(B|_{S^4}),_\eta = B,_b \end{cases}$$

である.

ところで $B|_{G_\eta}$ は trivial bundle であるから, connection $\omega|_{G_\eta}$ によって canonical な同型 $B_{,a} \cong B_{,b}$ が得られる. $(a, b \in G_\eta)$ 従って




$$\varpi_\zeta^*(B|_{G_\zeta})_{,\eta} \cong \pi^*(B|_{S^4})_{,\eta} .$$

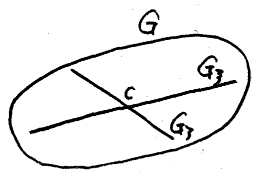
$\omega$ も $B$ ももともと $G$ 上定義されたものだから, 上の fiber の同型は $\eta$ に holomorphic に depend する. 以上で Lemma 3 が判った. ◺.

3°.

$\varpi_\zeta^*(B|_{G_\zeta})|_{\mathbb{P}^3-\{\zeta\}}$ は holomorphic bundle だから, $\pi^*(B|_{S^4})$ も $\mathbb{P}^3-\{\zeta\}$ 上では holomorphic であることが判った. あと, これを $\mathbb{P}^3$ にまで拡張出来ることを見ればよい.

<u>Lemma 4</u> $\forall \xi, \zeta \in \mathbb{P}^3$ に対し $(\xi \neq \zeta)$

$B|_{G_\xi \cup G_\zeta}$ は $G_\xi \cup G_\zeta$ 上 trivial.




<u>証明</u>. $\mathrm{Plü}\langle \xi\zeta \rangle = c$ とおく. $G_\xi \cap G_\zeta = \{c\}$.
$B|_{G_\xi}$ は trivial だから section $s_1 \in \Gamma(G_\xi, B|_{G_\xi})$ が存在し, $B|_{G_\zeta}$ も trivial だから section $s_2 \in \Gamma(G_\zeta, B|_{G_\zeta})$ が存在する. $s_1(c)$ も $s_2(c)$ も $SL(n, \mathbb{C})$ の元であることに注意する. 定数

函数 $s_1(c)^{-1}\cdot s_2(c)$ は $G$ 上の holomorphic function ゆえ，

$$\begin{cases} s = s_1\cdot s_1(c)^{-1}\cdot s_2(c) & \text{on } G_\xi \\ s = s_2 & \text{on } G_\zeta \end{cases}$$

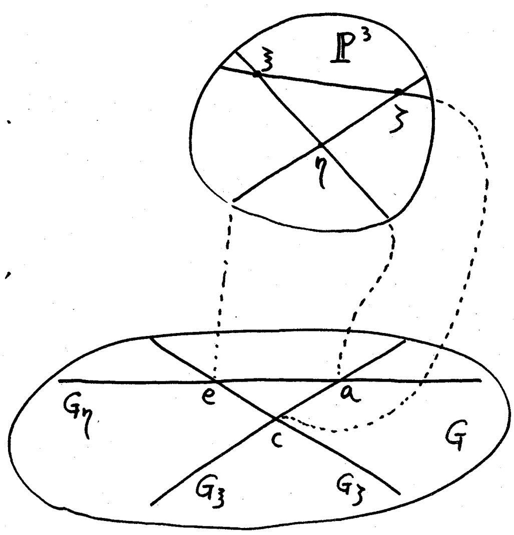
で定義される $s$ は $G_\xi\cup G_\zeta$ 上の holomorphic section である．∴ $B|_{G_\xi\cup G_\zeta}$ は trivial. ∎

Note. 以下で判る通り Lemma 4 のはたす役割は大きい．そしてこの Lemma が成立したのは $G_\xi\cap G_\zeta=\{1点\}$ だったからである．$G_\xi\cap G_\zeta$ が広がりを持っていると，その上の hol. function $s_1(c)^{-1}\cdot s_2(c)$ が $G_\xi\cup G_\zeta$ にまで接続できるかどうか判らないから．

Lemma 5. $\mathbb{P}^3$ の相異なる2点 $\xi,\zeta$ に対し，

$$\varpi_\xi^*(B|_{G_\xi})|_{\mathbb{P}^3-\{\xi,\zeta\}} = \varpi_\zeta^*(B|_{G_\zeta})|_{\mathbb{P}^3-\{\xi,\zeta\}}$$

(canonical に同型)




証明. $\mathbb{P}^3-\{\xi,\zeta\}\ni\eta$ をとる．

$\mathrm{Plü}\langle\xi\eta\rangle = a$,

$\mathrm{Plü}\langle\xi\zeta\rangle = c$, $\mathrm{Plü}\langle\zeta\eta\rangle = e$,

とおく．$G_\eta\cap G_\zeta=\{e\}$,

$G_\xi\cap G_\zeta=\{c\}$,

$G_\xi\cap G_\eta=\{a\}$, である．

$$\begin{cases} \varpi_3^*(B|G_3)_{,\eta} = B_{,a} \\ \varpi_3^*(B|G_3)_{,\eta} = B_{,e} \end{cases}$$

ところで，$a, e \in G_3 \cup G_3$ ゆえ Lemma 4 から canonical な同型 $B_{,a} \cong B_{,e}$ が存在することが判る． $\therefore\ \varpi_3^*(B|G_3)_{,\eta} \cong \varpi_3^*(B|G_3)_{,\eta}$ .

（ともに $B_{,c}$ に等しい.）

$\xi, \zeta \in \mathbb{P}^3$, $\xi \neq \zeta$ とする．

$$\pi^*(B|_{S^4})|_{\mathbb{P}^3 - \{\xi\}} = \varpi_3^*(B|G_3)|_{\mathbb{P}^3-\{\xi\}}$$

$$\pi^*(B|_{S^4})|_{\mathbb{P}^3 - \{\zeta\}} = \varpi_3^*(B|G_3)|_{\mathbb{P}^3-\{\zeta\}}$$

$$\varpi_3^*(B|G_3)|_{\mathbb{P}^3 - \{\xi,\zeta\}} = \varpi_3^*(B|G_3)|_{\mathbb{P}^3-\{\xi,\zeta\}}$$

によって，$\pi^*(B|_{S^4})$ が $\mathbb{P}^3$ 上の holomorphic bundle であることが判った．以上で定理3の証明が終る． ▨

与えられていたのは $S^4$ 上の <u>real</u> analytic bundle $P$ (fiber は $SU(n)$) と，$P$ 上の real analytic な connection $B$，curvature $F$ であった．

$S^4 \hookrightarrow G$ だから，$P, B, F$ は $S^4$ の複素近傍 $U \subset G$ にまで拡張出来る．解析接続された $P, B, F$ を $P^{\mathbb{C}}, B^{\mathbb{C}}, F^{\mathbb{C}}$ と書く．

$$\begin{array}{c} P^{\mathbb{C}},\ B^{\mathbb{C}}, F^{\mathbb{C}}. \\ \downarrow \\ S^4 \hookrightarrow U \hookrightarrow G \end{array}$$

$U$ を十分小にとり，各 $G_3$ との交わり $U \cap G_3$ が simply connected であるようにしておく．（$S^4 \cap G_3 = \{1点\}$ ゆえいつでも可能．）

定理2（Atiyahの定理）は，「$*F=-F$ ならば $\pi^*(P^{\mathbb{C}}|_{S^4})$ は $\mathbb{P}^3$ 上の holomorphic bundle」という形で述べることが出来る．これを定理3で用いた手法で証明してみよう．

命題3は base をとって証明したから，今の場合でも，「$F^{\mathbb{C}}|_{S^4}=F$ が anti-self-dual $\Longrightarrow$ $F^{\mathbb{C}}|_{G_\zeta\cap U}\equiv 0$ for $\forall\zeta$」という形で成立する．$G_\zeta\cap U$ は simply connected にとったから，「$P^{\mathbb{C}}|_{G_\zeta\cap U}\longrightarrow G_\zeta\cap U$ なる bundle は trivial」という Lemma 2 も成り立つ．

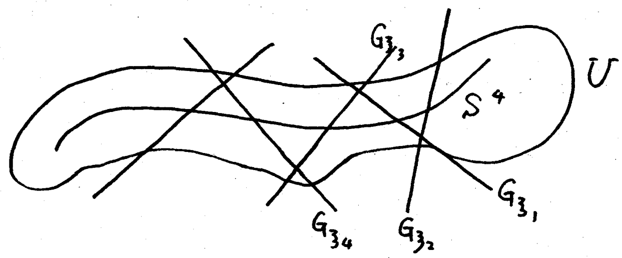
$\varpi_\zeta : Q_\zeta\mathbb{P}^3\longrightarrow G_\zeta$ による $G_\zeta\cap U$ の逆像は，（$G_\zeta\cap U$ が $G_\zeta$ の open subset であるから）$Q_\zeta\mathbb{P}^3$ の open set になる．従って $\varpi_\zeta^{-1}(G_\zeta\cap U)\subset\mathbb{P}^3-\{\zeta\}$ は open．

定理3の証明のときには Lemma 3 と Lemma 5 を用いて2点 $\zeta,\zeta\in\mathbb{P}^3$ をとって示したのだった．それは，

$\mathbb{P}^3=(\mathbb{P}^3-\{\zeta\})\cup(\mathbb{P}^3-\{\zeta\})$ というはり合わせを用いたことにあたる．今度の場合は

$\mathbb{P}^3=\bigcup_{\zeta\in\mathbb{P}^3}\varpi_\zeta^{-1}(G_\zeta\cap U)$ なる covering を使わねばならない．また，Lemma 3では，a, b をつなぐ $G_\eta$ が，<u>$U$ の中で</u> a, b をつながねばならない為，$\varpi_\zeta^*(P^{\mathbb{C}}|_{G_\zeta})$ と $\pi^*(P^{\mathbb{C}}|_{S^4})$ とが等しくなる $\mathbb{P}^3$ の領域は極めて複雑になる．しかし，とにかく open set であり，$\zeta$ を動かせば $\mathbb{P}^3$ を cover することは確かであるから，Lemma 4 + Lemma 5 によって $\mathbb{P}^3$ 上

globalに矛盾なくつなぐことが出来る．これで，$\pi^*(P^{\mathbb{C}}|_{S^4}) = \pi^*(P)^{\mathbb{C}}$ の analyticity が結論された．




Anti-self-dual という条件が，どのようにして complex structure と結びついたのか，というからくりが，§4 で明らかになった．

## §5. $D*DB=0$ と $*DB=\pm DB$ とのちがい．

$D*DB=0$ の解で，$*DB=\pm DB$ でないもの（即ち $\|F\|^2$ の最小値以外の critical point）が存在するか？ という問題はまだ解かれていない（Atiyah [6]）．ここでは，Linear な場合にいくつか考察する．

群が $U(1)$ の場合： B のかわりに A と書く．$DA=dA$．

**命題 4.** (Atiyah [7])

$$d*dA=0 \iff *dA=\pm dA.$$

**証明** (Atiyah [7])

$\Leftarrow$ は明らか．

$\Longrightarrow$ : $\delta$を余微分作用素とする． $\left[\begin{array}{l}\delta = (-1)^{np+n+1} * d * \\ \quad = - * d * \\ \quad (\because n=4)\end{array}\right]$

$d * d A = 0$ のとき，

$\Delta(*dA \pm dA) = (d\delta + \delta d)(*dA \pm dA)$

$= d\delta * dA \pm d\delta dA$

$= - d * d * * dA \pm (- d * d * dA)$

$= - d * d d A$

$= 0$ .

$\therefore$ $*dA \pm dA$ は harmonic 2-form．従って，$S^4$ は compact であるから，Hodge の定理により

$i(*dA \pm dA) \in H^2(S^4)$

が判る．$H^2(S^4) = 0$ なので $*dA = \pm dA$ を得る．▨

Note. $A$ は純虚数に値を持つので，$i(*dA \pm dA)$ とした．

Yang-Mills 場とは全くちがうが，2次元で次のようなものを考えてみる．

$\phi = \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ なる実函数．

$\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}^2} d\phi \wedge * d\phi$ .

( 物理学者の記号では $\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}^4} d^2x \left(\frac{\partial \phi_a}{\partial x_i}\right)^2$ , $\begin{array}{l} a=1,2. \\ i=1,2.\end{array}$

但し $x_1, x_2$ は $\mathbb{R}^2$ の座標．)

このとき Euler-Lagrange 方程式は $d * d\phi = 0$ .

Self-duality として $*d\phi = \pm d\phi$ をとると，これは $\phi = 0$

しか解を持たないので面白くない．そこで，

(22) $*d\phi = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\phi$

を (anti-) self-duality としてとる．

「$d*d\phi = 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} *d\phi = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\phi$」は成立するだろうか？　もちろん $\Longleftarrow$ は成り立つから $\Longrightarrow$ を調べてみる．その為に座標で書いてみよう．

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}dx_2 . \qquad *dx_1 = dx_2 , \; *dx_2 = -dx_1$$

故に $*d\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}dx_2 - \dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}dx_1$ .

$$\therefore\ d*d\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}dx_1\wedge dx_2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}dx_1\wedge dx_2 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\right)dx_1\wedge dx_2 .$$

従って，$d*d\phi = 0 \Longleftrightarrow \phi_1, \phi_2$ は $\mathbb{R}^2$ 上の調和函数．

一方 $*d\phi = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\phi$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x_1} = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2} = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_1} = \pm\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_1} , & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_1} = \mp\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2} = \pm\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_1} , & -\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_2} = \mp\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_1} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

これは Cauchy−Riemann の方程式である．$\phi_1, \phi_2$ が共役なら $\phi_1 + i\phi_2$ は正則函数だから，$\Longrightarrow$ が言える．但し $\phi$ が

$d * d \phi = 0$ を満たすだけなら必ずしも $\Longrightarrow$ は成立しない.

## Bibliography and References

[1] C.N. Yang and R.L. Mills ; Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance, Physical Review 96, 191-195 (1954).

[2] E.S. Abers and B.W. Lee ; Gauge Theories, Physics Reports 9 C, 1-141 (1973).

[3] G. Girardi, C. Meyers and M. de Roo ; On the self-Duality of Solutions of the Yang-Mills equations, Ref. Th. 2399-CERN (Preprint), Geneva, (1977).

[4] M.F. Atiyah and R.S. Ward ; Instantons and Algebraic Geometry, Commun. math. Physics. 55, 117-124 (1977)

[5] M.F. Atiyah ; Classical Solutions of Yang-Mills Equations, 京都大学数理解析研究所での講演. (1977年10月3日)

[6] M.F. Atiyah; Morse Theory and Stable Bundles over Curves, 京都大学数理解析研究所での講演. (1977年10月4日)

[7] M.F. Atiyah ; Classical Geometry of Yang-Mills Fields, 東京大学理学部数学教室での講演. (1977年10月7日)

[8] H. Flanders ; Differential Forms, Academic Press (1963).

[9]吉川圭二；場の理論におけるトンネル効果，素粒子論研究 54-4，49-56（1977）

[10]小嶋泉；Yang-Mills場とFibre Bundles，素粒子論研究，53-4，299-334（1976）