数理解析研究所講究録
第 325 巻 1978 年 30-33



# Finite groups admitting an automorphism of prime order

北大 理　　福島 博

$G$を有限群, $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, $|\alpha| = p$ ; prime　$(p, |G|) = 1$ とする。以下この設定で議論をすすめる。このとき次の有名な予想がある。

<u>Conjecture</u>　$C_G(\alpha)$ ; nilpotent $\xrightarrow{?}$ $G$は solvable

これに関連して次の結果がある。

<u>Theorem</u> (B. Rickman)

$$\left.\begin{array}{l} C_G(\alpha)\ ;\ \text{cyclic } q\text{-group} \\ q\ ;\ \text{prime} \\ q \geq 5 \end{array}\right\} \longrightarrow G \text{ は solvable}$$

これに関して次の結果が得られた。

<u>Theorem</u>

$$\left.\begin{array}{l} C_G(\alpha)\ ;\ q\text{-group} \\ q\ ;\ \text{odd prime} \end{array}\right\} \longrightarrow G \text{ は solvable}$$

The structure of solvable groups satisfying the hypothesis of the theorem.

Shult の定理により次の結果を得る。

$$G = O_{q,q'}(G)\,C_G(\alpha)$$

<u>Proof of the theorem.</u>

$G$を最小位数の反例とする。

<u>Lemma 1.</u> $G$ is simple.

Glauberman の "Sufficient condition for p-stability" の結果により，次の Lemma を得る。

<u>Lemma 2.</u> $q = 3$.

∵) $q \neq 3$とすると，$G$は$S_4$-free となり矛盾を得る。

<u>Lemma 3.</u>

$\forall r \in \pi(G) - \{2, 3\}$

$\forall R_0$ ; $r$-subgroup of $G$

$\longrightarrow N_G(R_0)/C_G(R_0)$ は，$\{3, r\}$-group.

Lemma 3 と，minimal simple の分類により $G$は．$L_2(7)$ or $L_3(3)$ を，involve することがわかる。

$r \in \pi(G) - \{2,3\}$

$R$; $\alpha$-invariant Sylow-$r$-subgroup とする。

**Lemma 4.**

$g \in C_G(\alpha) \cap N_G(R)^{\#} \longrightarrow C_R(g) = 1.$

Lemma 4より次の lemma を得る。

**Lemma 5.**

$1 \neq x$ ; $r$-element $\longrightarrow$ $C_G(x)$ は、$r$-nilpotent.

Signalizer functor を用いることで次の lemma をえる。

**Lemma 6.**

$SCN_3(R) \neq \phi$

$x \in R^{\#} \longrightarrow C_G(x)$ は、$\{2,3\}'$-group.

$R_1$; $\alpha$-invariant Sylow 7-sub-group

$R_2$; $\alpha$-invariant Sylow 13-subgroup とする。

$SCN_3(R_1) = \phi$ のときは、$p = 2$ or $3$ となり $G$ は、solvable となる。よって $SCN_3(R_1) \neq \phi$ としてよい。

$SCN_3(R_2) = \phi$ のときは、$p = 7$，よって $(7, |G|) = 1$. lemma 3 と合わせて、$G \simeq L_3(3)$ となる。$L_3(3)$ の automorphism を考えることにより矛盾をえる。

よって $SCN_3(R_2) \neq \phi$ としてよい。

Lemma 6 より, $C_G(t)$ は, $\{7, 13\}'$-group for every involution or 3-element $t$. 特に $C_G(t)$ は solvable.

Mason の結果により, 次のいずれかが成立する。

$Q$ を $\alpha$-invariant $S_3$-subgroup とする。

(i) $G$ has 2-local 3-rank at most 1.

(ii) $Q$ has rank 2.

(iii) $Q$ normalizes a non-trivial 2-subgroup of $G$.

(i), (ii), (iii) のいずれの場合も, 矛盾をえる。

問題

$$C_G(\alpha) ; 2\text{-group} \xrightarrow{?} G \text{ は, solvable.}$$