数理解析研究所講究録
第 325 巻 1978 年 64-68

正規でない極大部分群の共役類の数について

明石高専　　加納幹雄

極大部分群の共役類の数と群の構造との間のおもしろい関係が沼田氏によって示された、ここではこれの一部一般化をします、群 G に対しこれの正規な極大部分は除き正規でない極大部分群に注目し次のように α を定める、

α ＝ G の正規でない極大部部分群の共役類の数

このとき可解群に対しは次の定理が成り立つ、

<u>定理</u>（沼田〔1〕）　G を可解群とすると

$$G \text{ の巾零長さ} \leq \alpha + 1$$

又任意の n に対し $\alpha = n$ かつ等号の成り立つ可解群が存在する、ただし $n \geq 0$ の整数、

可解という条件を除いた一般の場合の最も簡単な場合は次の定理のようになる、

__定理 1__　[2]　Gの正規でない極大部分群の位数が等しければGは可解で巾零長さは2以下である。特に$\alpha=1$ならGは可解で巾零長さは2以下である。

$\alpha=2$の場合に関係して次の定理が得られた。

__定理 2__　[3]　単純群(非可換)の極大部分群の共役類の数は3以上である。

定理2は$\alpha=2$の場合を調べる才一段階であるが、これとこれに関係した問題をまとめると

__問題 1__　$\alpha=2$ならGは可解か?

__問題 2__　Xを単純群，Aをp群で$(|A|,|G|)=1$　$A\longrightarrow G$とする。$M^*(X,A)=\{X$のA-不変な部分群の中で極大なもの$\}$とおくと$C_G(A)\longrightarrow M^*(X,A)$だがこのとき$(C_G(A), M^*(X,A))$のorbitの数$\geq 3$か?

最後に定理2に関係した例が見つかったのでこれを述べます。[4]の中のGoldschmidtによる$p^a q^b$　p, q oddの群の可解性の群論的証明の中で，最小位数の反例をGとするとGは単純群で$\alpha=2$となっています。よって後は定理2を用いても矛盾となります。

[定理1の証明]　Gの極大部分群がすべて正規であればGは巾零となるから、Gには正規でない極大部分群Mが存在するとしてよい。$p \in \pi(|G:M|)$, $P \in Syl_p(G)$とする。もし$G > N_G(P)$とすれば$N_G(P)$を含む極大部分群Lが存在する。$L \supseteq N_G(P)$より$N_G(L) = L$, よってLは正規でなく$|L| = |M|$である。これは$p \mid |G:M|$に反する。故に$G = N_G(P)$、$\bar{G} = G/P$の極大部分群を$\bar{L} = L/P$とおくと$(|G:L|, p) = 1$だから$G \triangleright L$, よって$\bar{G} \triangleright \bar{L}$となり$\bar{G}$は巾零となる。

定理2の証明に入る前によく知られている次の補題を述べる。

<u>補題</u>　(Ω, G)を可移とする。$G > H$, $|G:H| = l$, $|\Omega| = m$とおくとき$(l, m) = 1$なら(Ω, H)も可移である。

[証明]　右図より明らか　$\alpha \in \Omega$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & G \arrow[dl, dash, "m"'] \arrow[dr, dash, "l"] & \\
G_\alpha \arrow[dr, dash] & & H \arrow[dl, dash] \\
 & H_\alpha &
\end{tikzcd}
$$

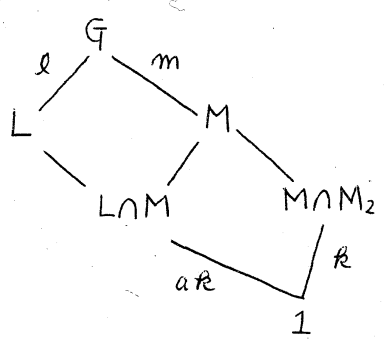
より$m \mid |H:H_\alpha|$

<u>補題</u>　(Ω, G)は可移とする。Pを$|I(P)| \geq 2$となるp-部分群で位数最大のものとすると、$(I(P), N_G(P))$は可移である。ただし$I(P)$はPの固定点の全体を表わす。

[証明]　PがGの1点の*stabilizer*のp-Sylow部分群ならWittの定理より成り立つ。p-Sylow部分群でないならPの選び方より$^\forall x \in I(P)$に対し、$X \triangleright P$, $I(X) = \{x\}$かつXはp部分群となるXが存在する。故に定理([5]の$P82$)より成

り立つ、

[定理2の証明] 極大部分群の共役類が2個である単純群 G が存在するとして矛盾を出す、2つの極大部分群の共役類を $\Gamma = \{ L^x \mid x \in G \}$, $\Omega = \{ M^x \mid x \in G \} = \{ M = M_1, M_2, \cdots, M_m \}$ とする、又 $|\Gamma| = |G:L| = l$ とおく、まず容易に $(l, m) = 1$ となり補題より (Γ, M) が可移となる、(Ω, G) は Frobenius 群でないから $M \cap M_2 \neq 1$ としてよく、$\forall p \in \pi(|M \cap M_2|)$ に対し、$|I(P)| \geq 2$ となる (Ω, G) の p−部分群で位数最大のものを P とおく、補題より $(I(P), N_G(P))$ は可移となり $(\Omega, N_G(P))$ は固定点を持たない、よって $N_G(P) \leq L^x$ $x \in M$ としてよく、$N_G(P^{x^{-1}}) \leq L$ また $P, P^{x^{-1}} \leq M$ としてよいから $|L \cap M|_p \geq |P| \geq |M \cap M_2|_p$ となり $|M \cap M_2| \,\big|\, |L \cap M|$、(ここで $|X|_p$ は群 X の p−Sylow-群の位数を表わす) 故に右図より $l \,\big|\, |M : M \cap M_2|$、一方 $l > m$ としてよいから $|M : M \cap M_2| > m$、これは (Ω, M) の1つの orbit の長さが $m = |\Omega|$ より大きいことを言っており矛盾、



A_5, $PSL(2,7)$ は極大部分の共役類が3コの例

参考文献

〔1〕 M. Numata "On the π-nilpotent length of π-solvable groups" OSAKA J Math 8 1971

〔2〕 加納幹雄 "正規でない極大部分群の位数が等しい有限群について" 明石高専研究紀要 18号 1976

〔3〕 加納幹雄 "単純群の極大部分群の共役類の数について" 明石高専研究紀要 20号 1978

〔4〕 T. M. Gagen "Topics in Finite Groups" 1976

〔5〕 永尾 汎 "群とデザイン" 数学選書 岩波書店 1974