数理解析研究所講究録
第 325 巻 1978 年 98-101

On groups generated by an involution and an element of order 3

北大 大学院 水谷 一

次の関係式を満たす二つの元 x, y で生成される群を決定したい。

$$x^2 = y^3 = (xy)^7 = f(x, y) = 1$$

ここで $f(x,y)$ は x と y からなるある列とする。

$xy = s$, $xy^2 = t$ とおくと共役元をとることにより, $f(x,y)=1$ は $s^{i_1}t^{j_1}\cdots s^{i_n}t^{j_n} = 1$ なる形としてよい。さらに, $st^3s = ts^2t$, $ts^3t = st^2s$ に注意すれば, i_k, j_k は 1 または 2 としてよい。いま $l(s^{i_1}t^{j_1}\cdots s^{i_n}t^{j_n}) = \sum i_k + \sum j_k$ とおく。

Proposition 1. Suppose $l(f(x,y)) \leq 16$, then the group $G = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^7 = f(x,y) = 1\rangle$ is determined as follows.

i) $f(x,y) = (st)^4 \quad \Rightarrow \quad G \cong PSL(2,7)$

ii) $f(x,y) = (st)^6 \quad \Rightarrow \quad G \cong PSL(2,13)$

iii) $f(x,y) = (s^2t^2)^3 \quad \Rightarrow \quad G \cong PSL(2,7)$

iv) $f(x,y) = (st)^7 \qquad \Rightarrow \quad G \cong PSL(2,13)$

v) $f(x,y) = s^2ts^2tst^2st^2st$

$\qquad = (s^2ts^2t^2)^2 \qquad \Rightarrow \quad G \cong PSL(2,8)$

vi) $f(x,y) = (s^2tst)^3 \qquad \Rightarrow \quad G \cong PSL(2,13)$

vii) $f(x,y) = (st)^8 \qquad \Rightarrow \quad G \rhd N, \ N \cong (Z_2)^6$

$\qquad\qquad G/N \cong PSL(2,7)$

viii) In other cases $f(x,y)$ is reduced to one of the above 7 cases or $G=1$.

証明の方針. $l(f(x,y))$ の小さい順に $f(x,y)$ をとる.

例1. $l(f(x,y)) \leqq 7$ となる $f(x,y)$ は次のいずれかとしてよい.

$s,\ t,\ st,\ s^2t,\ (st)^2,\ s^2t^2,\ s^2tst,\ (st)^3,$
$s^2t^2st,\ (s^2t)^2,\ s^2t(st)^2,\ s^2t^2s^2t.$

これらのどの場合も $G=1$ となることは簡単な計算により確かめられる.

例2. $f(x,y) = (s^2t^2st)^2 \Rightarrow G=1$ の証明

$s^2t(ts)^2st^2st = 1$ より $\quad (ts)^2 = (st^2sts^2t)^{-1}$

$$(st)^5 = sts(ts)^2tst$$
$$= sts(t^{-1}s^{-2}t^{-1}s^{-1}t^{-2}s^{-1})tst$$
$$= st^4sts^4t = (ts)^3$$

ここで $z = (st)^5 = (ts)^3$ とおくと $C_G(z) \ni st,\ ts$.

容易にわかるように $G = \langle st, ts \rangle$ だから $z \in Z(G)$.

ところが　$G/Z(G) = 1$ であることは　例1. $(st)^3$ の場合よりわかる．$G' = G$ より　$G = 1$．

このように，各々の場合について調べればよい。

次に，i)〜vii)の同型対応を示す．

i)　$x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,　$y \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　　成分は $GF(7)$ の元

ii)　$x \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$,　$y \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$　　成分は $GF(13)$ の元

iii)　i)と同じ．

iv)　$x \to \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$　$y \to \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$　　成分は $GF(13)$ の元

v)　$x \longrightarrow \begin{pmatrix} r^2 & 1 \\ 1+r+r^2 & r^2 \end{pmatrix}$　$y \longrightarrow \begin{pmatrix} 1+r & 1+r^2 \\ 1+r^2 & r \end{pmatrix}$　　$r \in GF(8)$

$r^3 + r + 1 = 0$

vi)　$x \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$　$y \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$　　成分は $GF(13)$ の元．

vii) 置換表示する．

$x \to (1)(8)(2,3)(9,10)(4,7)(11,14)(5,12)(6,13)$
$(1')(8')(2',3')(9',10')(4',7')(11',14')(5',12')(6',13')$

$y \to (1,3,7)(8,10,14)(2)(9)(6,4,12)(13,11,5)$
$(1',7',3')(8',14',10')(2')(9')(4',6',12')(13',5',11')$

Proposition 2.　$G = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^7 = (st)^9 = 1 \rangle$ is an infinite group.

Proof.

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。これらは関係式を満たし、

$$(s^2t^2s^2t)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -10 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & \text{\Large 0} & \\ 0 & & & 1 & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & \\ 0 & & \text{\Large 0} & & & 1 & & \\ 0 & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

は無限位数である。