数理解析研究所講究録
第325巻 1978年 122-123

tight 4-design について

阪大 教養部　野田隆三郎

$v \geq k+s$ をみたす $2s-(v,k,\lambda)$ design において

$$b \geq \binom{v}{s} \qquad (\text{Generalized Fisher's inequality [2]})$$

がなりたつが特に等号のなりたつものを tight $2s$-design という。$v=k+s$ であるような $2s$-design は必然的に tight となるがこれを自明な tight $2s$-design という。$s \geq 3$ の時には自明でない $2s$-design は一つも知られていない. $s=2$ の時、つまり tight 4-design としてはただ一つ, 4-(23,7,1) design (とその補 design) が存在を知られている.

tight 4-design がこれに限るかという問題は面白い問題であるがこれに関して最近伊藤昇, 榎本彦衛両氏と筆者の三者の協力により次の結果を得た.

定理. $4-(v,k,\lambda)$ $(v \geq 2k)$ を自明でない tight design とすると次のいずれかがなりたつ.

(1) $v=23,\ k=7,\ \lambda=1$

(2) ある整数 c があって

$$v = c^2+1$$

$$k = \frac{1}{2}\left\{ c^2+1-\left(\sqrt{3c^2-2}-c\right)\sqrt{\frac{c\sqrt{3c^2-2}+3}{2}} \right.$$

$$\lambda = \binom{v}{2} \times \frac{\binom{k}{4}}{\binom{v}{4}}$$

と表わされる.

なお(2)における k を整数にするような c は存在したとしても高々有限個であることが知られているので tight 4-design の parameter の可能性は有限個しかない. 定理の証明については文献[1]及びそれに先行する伊藤氏の論文を参照された

参考文献

[1] H. Enomoto, N. Ito and R. Noda : Tight 4-designs, Osaka Jour. Math に投稿中.

[2] Ray Chaudhuri and R.M. Wilson : On t-designs, Osaka Jour. Math Vol 12. No. 3 1975.