数理解析研究所講究録
第325巻 1978年 128-130

1点のstabilizerが2つのsuborbits上2-trans に作用するランク5原始置換群について

阪大 理学部　沼田 稔

Gは有限集合Ω上の原始置換群で2重可移でないとする。
$\Omega\times\Omega$上Gを成分ごとに作用させた時のorbitsを Δ_0, Γ_1, …
Γ_s, Δ_1, …, Δ_t とし $\Delta_0=\{(\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\Omega\}$ とする。
$G_\alpha=\{g\in G\mid\alpha^g=\alpha\}$ が $\Gamma_i(\alpha)=\{\beta\mid(\alpha,\beta)\in\Gamma_i\}$ 上 $(1\leq i\leq s)$
2重可移で $\Delta_j(\alpha)$ 上 $(1\leq j\leq t)$ 2-trans でないとする。
次の結果が知られている。

Theorem (沼田) $t>1$, $|\Gamma_i(\alpha)|$, $|\Delta_j(t)|>3$
$(1\leq i\leq s,\ 1\leq j\leq t)$ ならば

$$s\leq 2t-r$$

ここで $r=\#\{\Delta_j\mid\Delta_j=\Gamma_i\circ\Gamma_i^*,\ {}^\exists\Gamma_i\}$

特に $r=1$ のときは $s\leq 2t-2$.

この結果を使うと $t=2$の時 $s\leq 2$ である。

$t=s=2$ の例

1. small Janko simple group J_1 は $PSL(2,11)$ と同型な部分群を含み、この部分群の cosets 上に primitive rank 5 に作用し条件を満す。degree 266, subdegrees 1, 11, 12, 110, 132 である。

2. Mathieu 群 M_{12} は $PSL(2,11)$ と同型な部分群を含み、この部分群の cosets 上に primitive rank 5 に作用し条件を満す。degree 144, subdegrees 1, 11, 11, 55, 66.

3. $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ と S_4 の半直積の部分群 S_4 の cosets 上に rank 5 に作用し条件を満す。degree 27 subdegrees は 1, 4, 4, 12, 6 である。

さて G を Ω 上 primitive rank 5 とし $\Omega\times\Omega$ 上 G の non-trivial orbits を $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta, \Sigma$ とし G_α が $\Gamma_1(\alpha), \Gamma_2(\alpha)$ 上 2-trans, $\Delta(\alpha), \Sigma(\alpha)$ 上 2-trans でないとする。

$\Gamma_1\circ\Gamma_1^* \neq \Gamma_2\circ\Gamma_2^*$ の時は 伊藤達郎氏の結果を使えば、例1 に限ることが証明される。

$\Gamma_1\circ\Gamma_1^* = \Gamma_2\circ\Gamma_2^*$, そして $|\Gamma_1(\alpha)| \neq |\Gamma_2(\alpha)|$ の場合 (Ω, Γ_1) (Ω, Γ_2) は共に直径3の *distance transitive graph* となるが、この場合の例は知られていないし、多分存在しないと思うが証明出来ない。

最後に残った場合について次のことが証明された。

Theorem $\Delta = \Gamma_1\circ\Gamma_1^* = \Gamma_2\circ\Gamma_2^*$, $|\Gamma_1(\alpha)| = |\Gamma_2(\alpha)|$ の時

i) $\pi_1 = \pi_2$ ii) Γ_1, Γ_2 は互いに *paired*

iii) $\Gamma_1\circ\Gamma_1 = \Gamma_1^*\cup\Sigma$. ($\pi_i$ は $\Gamma_i(\alpha)$ 上 G_α の *permutation character*)

証明の概略. $\pi_1 = \pi_2$ の証明は簡単である。
$\Gamma_1\circ\Gamma_2^* \neq \Delta\cup\Sigma$ が証明されれば ii) は明らかであり P.J. Cameron の結果($\Gamma\neq\Gamma^*$, *if* $\Gamma\circ\Gamma\subset\Gamma\cup\Gamma^*\cup\Gamma_1\circ\Gamma^*\cup\Gamma_1^*\circ\Gamma_1$, G *has rank* 4)を使えば iii が証明される。 $\Gamma_1\circ\Gamma_2^* = \Delta\cup\Sigma$ と仮定し $\Gamma_1\circ\Gamma_2^* = \Gamma_2\circ\Gamma_1^*$ であること、Γ_1 に関する *intersection matrix* の *trace* の整数条件から矛盾を引きだす。計算はめんどうであるが難かしいことは使わない。