

## Schur Index and Schur Group

都立大 理 山田俊彦

筆者の講演では, Schur index ならびに Schur group に関して最近えられたいくつかの結果について, [1], [3], [4], [7] を中心にして述べた。そこでは [5] において与えられた  $p$  進体上の円分多項式環 (cyclotomic algebra) の index の公式が一つの中核的役割を演じている。[1], [3], [4] は既に印刷されているので, ここでは [7] で得られている結果を説明しよう。それは次の定理の精密化である。

定理 1 (Fein-Yamada [2]).  $G$  は有限群,  $\chi$  は  $G$  の複素既約指標,  $m = m_{\mathbb{Q}}(\chi)$  は  $\chi$  の有理数体  $\mathbb{Q}$  上の Schur index,  $p$  は素数, そして  $m$  の  $p$ -part が  $p^r > 1$  とする。そのとき  $p^{r+1}$  が  $G$  の exponent を割るか,  $p^r$  が  $G'$  ( $G$  の交換子群) の exponent を割る。さらに  $p=2$  であるかまたは  $p \neq 2$  で  $G$  の  $p$ -Sylow 群が abelian ならば,  $p^{r+1}$  が  $G$  の exponent を割る。また  $p^{2r}$  は  $G$  の位数を割る。

さて  $l$  を素数,  $\mathbb{Q}_l$  を  $l$  進体,  $K$  を  $\mathbb{Q}_l$  上の円体, 即ちある  $1$

の中根  $\zeta'$  が存在して  $\mathbb{Q}_\ell \supset k \supset \mathbb{Q}_\ell$  とする.  $k$  上の *cyclotomic algebra* とは 次のような接合積のことである:

$$(1) \quad B = (\beta, k(\zeta)/k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} k(\zeta) u_\sigma, \quad (u_1 = 1),$$

$$(2) \quad u_\sigma x = \sigma(x) u_\sigma \quad (x \in k(\zeta)), \quad u_\sigma u_\tau = \beta(\sigma, \tau) u_{\sigma\tau}.$$

ここで  $\zeta$  は 1 の中根,  $\mathcal{G}$  は  $k(\zeta)/k$  の *Galois 群*,  $\beta$  は因子団で, その値は  $k(\zeta)$  に含まれる 1 の中根である.  $\beta$  は次のような積に書くことができる:

$$(3) \quad \beta(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma, \tau) \gamma(\sigma, \tau), \quad (\sigma, \tau \in \mathcal{G}),$$

$\alpha(\sigma, \tau)$  は  $l$  と素な位数の中根,  $\gamma(\sigma, \tau)$  は 1 の  $l$  中根.

さて  $l \neq 2$  としよう.  $k(\zeta)/k$  の *inertia group* を  $\langle \theta \rangle$ ,  $\phi$  を *Frobenius 置換* とする.  $\theta$  の位数  $e$  は次のように書かれる:  
 $e = l^t \cdot e'$ ,  $e' \mid l-1$ .  $f$  を  $k/\mathbb{Q}_\ell$  の *惰性次数* とすると, 1 の  $l^t - 1$  乗根  $\zeta_{l^t-1}$  は  $k$  にぞくする.

定理 2 (Yamada [5]).  $l$  を奇素数,  $k$  を  $\mathbb{Q}_\ell$  上の円体,  $(\beta, k(\zeta)/k) \sim (\alpha, k(\zeta)/k) \otimes_k (\gamma, k(\zeta)/k)$  を (1) - (3) で与えられる  $k$  上の円分多項式環,

$$\delta = (\alpha(\theta, \phi) / \alpha(\phi, \theta)) \alpha(\theta, \theta) \alpha(\theta^2, \theta) \cdots \alpha(\theta^{e-1}, \theta)$$

とすると,  $\delta = \zeta_{l^t-1}^v$  ( $v$  はある整数) と書ける. そして円分多項式環  $(\beta, k(\zeta)/k)$  の *index* は  $e' / (v, e')$  に等しい.

系 3. 記法は定理 2 と同じとする. もし *factor set*  $\beta$  の

値がすべて  $l$  と素な位数の 1 の中根で、かつ  $e=e'$  とするならば、円分多元環  $(\beta, k(\xi)/k) = \sum_{\sigma \in G} k(\xi) u_{\sigma}$  の位数は  $[u_{\theta}, u_{\phi}] = u_{\theta} u_{\phi} u_{\theta}^{-1} u_{\phi}^{-1}$  の位数と  $u_{\theta}^{e^f-1}$  の位数の最小公倍数を割り切る。

系 3 と Brauer-Witt の定理を用いると、 $l$  進体  $\mathbb{Q}_l$  上の Schur index に関する次の定理が得られる。

定理 4.  $G$  を有限群、 $\chi$  を  $G$  の既約指標、 $l$  を奇素数、 $p$  を素数、 $\chi$  の  $\mathbb{Q}_l$  上の Schur index  $m_{\mathbb{Q}_l}(\chi)$  の  $p$ -part が  $p^{2n} > 1$  とする。そのとき  $p^{2n}$  は  $G$  の exponent を割り、 $p^n$  は  $G'$  の exponent を割り。もし  $G$  の  $p$ -Sylow 群が abel なら、 $p^{2n}$  が  $G$  の exponent を割り。  $p^{2n}$  が  $G$  の exponent を割らなければ、 $p^{2n+1}$  が  $G$  の位数を割り。

次に 2 進体  $\mathbb{Q}_2$  の場合を考察してみよう。既約指標  $\chi$  に対して  $m_{\mathbb{Q}_2}(\chi) = 1$  の 2 であることはよく知られている。

定理 5.  $G$  を有限群、 $\chi$  を  $G$  の既約指標とする。もし  $m_{\mathbb{Q}_2}(\chi) = 2$  ならば  $2^2$  が  $G$  の exponent を割り、 $2$  が  $G'$  の exponent を割り、 $2^3$  が  $G$  の位数を割り。

注意.  $\mathbb{R}$  を実数体とする。  $G$  が  $m_{\mathbb{R}}(\chi) = 2$  なる既約指標  $\chi$  を持つ場合、必ずしも  $2$  は  $G'$  の exponent を割らないし、また  $2^3$  は  $G$  の位数を割るとは必ずしもいえない。その例は  $G = \langle a, b \rangle$ ,  $a^6 = 1$ ,  $b^2 = a^3$ ,  $b a b^{-1} = a^{-1}$  により与えられる。

さて  $\mathbb{Q}$  進体上の Schur index に関する上記の結果と, Fein-Yamada Theorem の一部分を用いて, 有理数体  $\mathbb{Q}$  上の Schur index に関する次の結果が得られる.

定理 6.  $G$  は有限群,  $\chi$  は複素既約指標,  $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$  の  $p$ -part は  $p^n > 1$  とする. そのとき  $p^{2n}$  が  $G$  の exponent を割るか,  $p^n$  が  $G'$  の exponent を割る.  $G$  の  $p$ -Sylow 群が abel ならば,  $p^{2n}$  が  $G$  の exponent を割る.  $p^{2n}$  が  $G$  の exponent を割らなければ,  $p^{2n+1}$  が  $G$  の位数を割る.

### References

- [1] M. Benard, Schur indices and cyclic defect groups, *Ann. of Math.*, 103 (1976), 283-304.
- [2] B. Fein and T. Yamada, The Schur index and the order and exponent of a finite group, *J. Algebra*, 28 (1974), 496-498.
- [3] G. J. Janusz, Generators for the Schur group of local and global number fields, *Pacific J. of Math.*, 56 (1975), 525-546.
- [4] G. J. Janusz, The Schur group of an algebraic number field, *Ann. of Math.*, 103 (1976), 253-281.
- [5] T. Yamada, Characterization of the simple compo-

- nents of the group algebras over the  $p$ -adic number field, *J. Math. Soc. Japan*, 23 (1971), 295-310.
- [6] T. Yamada, *The Schur subgroup of the Brauer Group*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 397, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [7] T. Yamada, *More on the Schur index and the order and exponent of a finite group*, (preprint).