

## 臨界現象とその周辺の最近の理論

東大・理 鈴木 増雄

### 第1部 くりこみ群の理論

前半では、最近のくりこみ群の臨界現象への応用についてその要点を解説した。詳しくは下記の文献を参照して戴きたい。

最初にカゲノフのスケーリング理論即ち、セル分割による相転移の現象論的取り扱いを述べ、それにミクロな意味づけを与えるものとして、くりこみ群の方法を導入する。臨界現象でもっとも基本的な変数は、相関距離 $\xi$ である。(これを基本にした「弱い普遍性」の概念については、M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 51 (1974) 1992 を参照。) ここで、相関距離 $\xi$ の温度依存性を示す臨界指数 $\nu$ が、くりこみ群の方法で、どのように求められるかと議論する。初めの温度変数を $K = J/k_B T$ として、何らかの方法で、一回くりこんだ後の温度変数を $K'$ とする。セル分割の理論で言うと、 $K'$ はセルの温度に

めたる。ただし、カダノフの理論では、 $K$ と $K'$ の関係を決める方式は与えられていなかった。ウィルソニが初めて、この関係を近似的ではあるがミクロに求める方式を提案した。

今、仮りに何らかの近似で、

$$K' = f_L(K) \quad (1)$$

と与えられたとしよう。この与え方については後で議論する。

このくりこみ変換群の固定点は

$$K^* = f_L(K^*) \quad (2)$$

によって決定される。今、セルの長さを $L$ 倍にしたとすると

セルを単位にしたくりこみ変換後の相関距離 $\xi'$ は

$$\xi' = \xi / L \quad (3)$$

と表す。この $\xi'$ と変換後の温度 $K'$ の関数関係は、不変であると仮定してよいであろうから、

$$\xi' = \xi(K') \quad (4)$$

とおく。よって $\xi(K)$ の $K_c = K^*$ (臨界点)での漸近形を $f_L(K)$ の性質をもとにして、計算しよう。(1), (3), (4)より、

$$\xi(f_L(K)) = \xi(K) / L \quad (5)$$

が成立する $f_L(K)$ を $K = K^* = K_c$ の近傍で展開して、

$$f_L(K) = f_L(K_c) + L^\nu (K - K_c) + \dots ; \nu = \left. \frac{\partial f_L}{\partial K} \right|_{K=K_c} \quad (6)$$

くりこみ群の理論の特徴は、変換式(1)は、 $K^* = K_c$ で何の変位

もはや解析関数でありはがら、物理量の異常性が評価できる点にある。今、 $\xi(k)$  が  $K_c$  近傍で、

$$\xi(k) \simeq C (K_c - k)^{-\nu} \quad (7)$$

という異常性を持っとして、臨界指数  $\nu$  を求めよう。(5)の左辺は、

$$\xi(f_L(k)) \simeq C [f_L(K_c) - f_L(k)]^{-\nu} = C \Lambda^{-\nu} (K_c - k)^{-\nu}. \quad (8)$$

一方(5)の右辺は

$$L^{-1} \xi(k) = C L^{-1} (K_c - k)^{-\nu} \quad (9)$$

(8)と(9)を等置して

$$\nu = \ln L / \ln \Lambda \quad (10)$$

と作る。こうして、臨界指数  $\nu$  は、くりこみ変換式(1)の固定点近傍での一次の展開係数  $\Lambda$  によって与えられることがわかる。この方法の特徴は、くりこみ変換群(1)を近似的に与えるときそれに応じて、臨界指数  $\nu$  が近似的に与えられるという点にある。今までの方法では、何か非常にうまい数学的方法を見つけ、それによって、臨界指数を厳密に求めるか、或いは、高次までの摂動計算の結果にパディ近似のような方法を適用して、臨界指数を推量するしか手が無かった。それに比較して、くりこみ群の方法は、非常に組織的であり、処方が非常にやさしい。他の臨界指数に対しても全く同様である。

(1)の変換式の手え方には、 $\varepsilon = 4-d$  ( $d$ は系の次元)展開によるものや、実空間での変数の消去法によるものや、いろいろあるが、最近発見された一番簡単な方法は、次のミゲダル近似と呼ばれる方法である。<sup>(4)</sup>例えば、2次元正方格子上のイジングモデルを例にとると

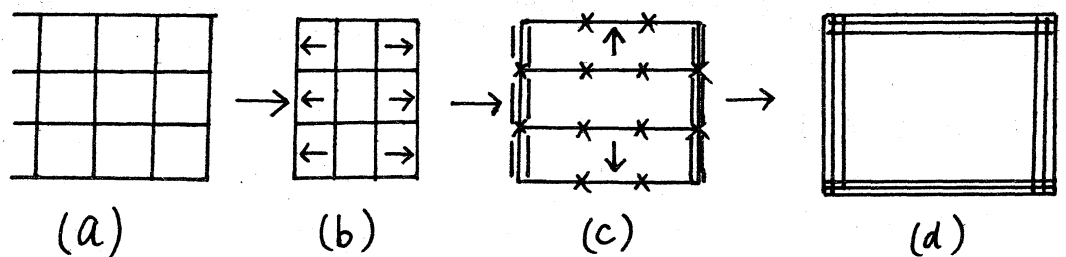


図 1

図1のように、まず、相隣距離位の範囲では、スピンの向きは大体そろっていると考え、ポテンシャル(相互作用)を図1bのように各辺に附して、図1cのようにする。次に中の二本の線(相互作用)上のスピンについて、自由度を消去する(スピンのトレースをとる)と、有効相互作用は、それぞれ  $\tanh^3 K$  と呼ぶ。これを図1dのように、たまたに移動させて、セルの相互作用  $K'$  を作ると

$$K' = 3 \tanh^{-1} (\tanh^3 K) \quad (11)$$

と呼ぶこれが(1)にあたる。この固定点は、

$$K^* = \frac{3}{4} \ln \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) = 0.7218 \dots \quad (12)$$

で与えられる。また、この  $K^*$  の近傍で (11) を展開して、 $\Lambda$  を求めると、

$$\Lambda = \left( \frac{dK'}{dK} \right)_{K=K^*} = \frac{9 \tanh^2 K^*}{1 + \tanh^2 K^* + \tanh^4 K^*} = 2.25 \quad (13)$$

とより、臨界指数  $\nu$  は

$$\nu = \frac{\ln 3}{\ln \Lambda} = 1.35 \quad (14)$$

と求まる。オニサガーの厳密解では、 $\nu = 1$  であるから、あまり、近似がよいとは言えないが、このミゲダルの方法は、大変直観的でわかり易いくりこみ群である。近似をよくするには、セルの長さ  $L$  を変数にして、一般の  $L$  に対する変換式を作り、 $L \rightarrow 1$  (無限小変換) の極限をとると、非常によい結果が得られることがわかっている<sup>(14)</sup>。このミゲダル近似は、量子スピン系にも拡張できることが最近見つかっており、面白い結果が得られている<sup>(15)</sup>。

以上のくりこみ群の方法は、臨界指数に限らず、もっと一般に多体系の統計力学的性質を求めるグローバル法(大域的)方法としても大変有効である。即ち、適当なくりこみ変換によって、もとのハミルトニアン  $\mathcal{H}(S)$  が新しいハミルトニアン  $\mathcal{H}'(S') + G$  に移るとする:

$$\mathcal{H}(S) \rightarrow \mathcal{H}'(S') + G. \quad (15)$$

但し、 $\text{Tr} \mathcal{H}'(s') = 0$  とする様に定数項  $G$  を決定する。即ち重心を  $G$  だけずらして、 $\mathcal{H}'(s')$  が再び、固有の相互作用の部分だけを表わすようにしたのである。このくりこみ変換は、普通次のような重み関数  $P(s', s)$  を導入して、表わされる：

$$\exp[G + \mathcal{H}'(s')] = \sum_S P(s', s) \exp \mathcal{H}(s) \quad (16)$$

但し、

$$P(s', s) \geq 0 \quad \text{and} \quad \sum_{s'} P(s', s) = 1 \quad (17)$$

こうすると、変換後の系の自由エネルギー  $-F'$  は、もとの系の自由エネルギー  $-F$  と次の関係にあることがわかる。

$$\begin{aligned} G + F' &= \ln \sum_{s'} \exp[G + \mathcal{H}'(s')] = \ln \sum_{s'} \sum_S P(s', s) e^{\mathcal{H}(s)} \\ &= \ln \sum_S \exp \mathcal{H}(s) = F \end{aligned} \quad (18)$$

スピニ一個当りの自由エネルギーに直して、

$$F = Nf(K), \quad F' = N'f(K'), \quad G = Ng(K), \quad b^d = N/N' \quad (19)$$

とおくと、

$$f(K) = g(K) + b^{-d} f(K') \quad (20)$$

とする。故に、任意の温度  $K \equiv K_0$  での自由エネルギーは、

$$\begin{aligned} f(K) &= g(K) + b^{-d} f(K_1) = g(K) + b^{-d} (g(K_1) + b^{-d} f(K_2)) \\ &= \dots = \sum_{n=0}^m b^{-nd} g(K_n) + b^{-md} f(K_m) \end{aligned} \quad (21)$$



4次元からの展開やフラインマングラフの利用及び、動的臨界現象への応用等は、下記の参考文献を参照して欲しい。相転移以外の問題、例えば、乱流等に応用することは今後の課題の一つであろう。

1. K.G. Wilson, Phys. Rev. B4 (1971) 3174, 3184.
2. K.G. Wilson and M.E. Fisher, Phys. Rev. Lett. 28 (1972), 240.
3. K.G. Wilson and J.B. Kogut, Phys. Reports 12C (1974) 75.
4. S. Ma, Rev. Mod. Phys. 45 (1973) 589.
5. M.E. Fisher, Rev. Mod. Phys. 46 (1974) 597.
6. S. Ma, Modern Theory of Critical Phenomena (Benjamin, 1976).
7. Phase Transitions and Critical Phenomena, ed. C. Domb and M.S. Green, Vol. 6 (1976).
8. R. Brout, Phys. Reports, 10 (1974) 1.
9. K.G. Wilson, Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 773.
10. P.C. Hohenberg and B.I. Halperin, Rev. Mod. Phys. 49 (1977) 435, Theory of Dynamic Critical Phenomena.
11. 鈴木増雄, 「科学」 Vol. 43 (1973) 522.
12. 鈴木増雄, 「数理科学」 Vol. 148 (1975) 23.
13. 鈴木増雄, 「固体物理」 Vol. 11 (1976) 252, 551.
14. L.P. Kadanoff, Ann. of Phys. 100 (1976) 359.
15. M. Suzuki and H. Takano, to be published.



## 第2部 不安定点近傍での過渡現象のスケーリング理論

第1部でもスケーリングという概念が非常に基本的であったが、過渡現象に対するスケーリング理論は、質的に大分違った概念を含んでいる。拡張した意味で数学的に類似した構造を持っているので、スケーリング理論と名づけた。<sup>1)~7)</sup>

基本的な概念としては、初期時刻でのゆらぎと、それ以後のランダムな力の大きさとの相乗効果 (synergism) として、「fluctuation enhancement」が途中の時間領域で起り、これが巨視的秩序形成の基本的メカニズムと見る。<sup>1)~7)</sup> 即ち初期時刻では、図1のように、非常に小さなゆらぎ (オーダー  $\epsilon \ll 1$ ) であったものが、一般に途中の時間領域

$$t \sim \ln(1/\epsilon) \quad (1)$$

のところで、オーダー1のゆらぎに増幅され、それと同時に秩序度 (オーダーパラメタ) は、図2のように、 $\sqrt{\epsilon}$  のオーダーから、1のオーダー (又は、 $\sqrt{N}$  のオーダーから  $N$  のオーダー) に発展する。

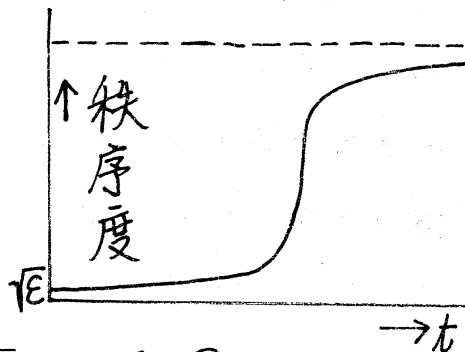
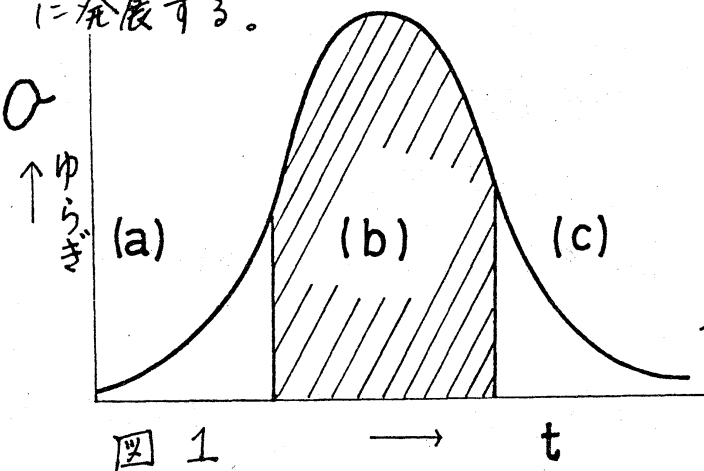


図1

図2

基本的な概念をもう少し詳しく説明するために、次のような簡単な非線型ブラウン運動のモデルをとりあげる：

$$\frac{d}{dt}x(t) = \gamma x(t) - g x^3(t) + \eta(t). \quad (2)$$

但し、 $\eta(t)$  はガウシアン・ホワイトのランダムな力とする：

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2\varepsilon \delta(t-t'). \quad (3_0)$$

このモデルは、磁化過程、レーザーの発振の立ち上り、その他、非常に多くの非線型現象のダイナミクスを記述するプロトタイプ方程式である。こういう非線型系で、適当に漸近評価をして、系の時間発展、即ち、 $x$  という巨視的秩序パラメタの形成過程とそのゆらぎを漸近的に正しく求めるのがスケーリング理論の眼目である。上の例で言うと、非線型性の強さ  $g$  またはランダムな力の強さ  $\varepsilon$  の小さい極限で、漸近評価する。当然、その大きさに応じて、巨視的秩序の形成される時間は益々長くなる。従って、その時間のある関数（普通、 $\exp(2\gamma t)$  というような指数関数）と  $g$  または  $\varepsilon$  の積（これを  $\tau$  とおいて、スケーリング変数と呼ぶ）を一定にした極限をとることによって、言わゆるスケーリング理論を組み立てることが出来る。

これを直観的に説明するために、まず、(2) を近似的に解

いて、上のスケーリングの構造と巨視的秩序形成の過程を議論してみよう。(2)に $2x(t)$ をかけて、ランダムな力 $\eta(t)$ の分布に関して、平均をとると、

$$\frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = 2\delta \langle x^2(t) \rangle - 2g \langle x^4(t) \rangle + 2 \langle x(t)\eta(t) \rangle \quad (3)$$

が得られる。簡単のため $\langle x^4(t) \rangle \approx \langle x^2(t) \rangle^2$ と近似し、 $\langle x(t)\eta(t) \rangle$ を線型近似の $x(t)$ 即ち、

$$x(t) \approx \exp(\delta t) \int_0^t \eta(t') \exp(-\delta t') dt' \quad (4)$$

を用いて評価してみよう。但し、(4)では初期条件を丁度不安定点 $x(0)=0$ にあるとした。(今 $\delta > 0$ と仮定している。) こうして、(3)を用いると

$$\langle x(t)\eta(t) \rangle \approx e^{\delta t} \int_0^t \langle \eta(t)\eta(t') \rangle e^{-\delta t'} dt' = \varepsilon. \quad (5)$$

故に、(3)は近似的に、次のようになる：

$$\frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = 2\delta \langle x^2(t) \rangle - 2g \langle x^2(t) \rangle^2 + 2\varepsilon. \quad (6)$$

この解は $\varepsilon g$ を小さいとすると

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x^2 \rangle_{eq} \cdot \frac{\tau}{1 + \tau} ; \tau = g \left( \langle x^2(0) \rangle + \frac{\varepsilon}{\delta} \right) e^{2\delta t} \quad (7)$$

と書ける。但し、 $\langle x^2 \rangle_{eq} = \delta g^{-1} + O(\varepsilon)$ 。この結果は、いろいろの意味で教訓的な内容を持っている。もともと、 $\langle x^2(t) \rangle$

は、3つのパラメータ  $g, \epsilon, \langle x^2(0) \rangle$  の関数であるが、漸近的には、一つの変数  $\tau$  だけの関数になっている。これがスターリングの性質の第一の特徴である。(7)の解は、 $t \rightarrow \infty$  で、非線型性による飽和現象を漸近的に表現している。即ち、 $\tau = O(1)$  のところで、巨視的秩序が現われることを表現している。この時間は、

$$t_0 \sim \frac{1}{2\gamma} \ln \left[ g \left\{ \langle x^2(0) \rangle + (\epsilon / \gamma) \right\} \right] \quad (8)$$

で与えられ、非線型性  $g$  が  $t_0$  は初期値とランダム力の強さの和が小さければ小さい程、 $t_0$  は大きくなる。言い換えれば巨視的秩序形成 ( $\langle x(t) \rangle \sim O(1)$  が  $t_0$  は  $\langle x^2(t) \rangle \sim O(1)$  となること) は、初期のゆらぎとランダム力の強さと非線型性との相乗効果 (synergism) として起る。(詳しくは、M. Suzuki, to be published in Prog. Theor. Phys. を参照。) これを後に述べるスターリング理論で、漸近的に厳密に解くと、

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x^2 \rangle_{eq} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot \frac{x^2 \tau}{x^2 \tau + 1} dx \quad (9)$$

と与える<sup>(1)-(7)</sup> 但し、 $\tau$  は (7) 式で与えられる。(9) の第一式に与えた関数形は近似に依存するが、(9) の関数形は、スターリングの極限で、普遍的 (universal) である。スターリングの数学的意味づけについては、下の図を参照して欲しい。

また、(9)に対応する $x$ の分布関数 $P(x, t)$ を図示すると、  
図4のようになる。<sup>1)~7)</sup>

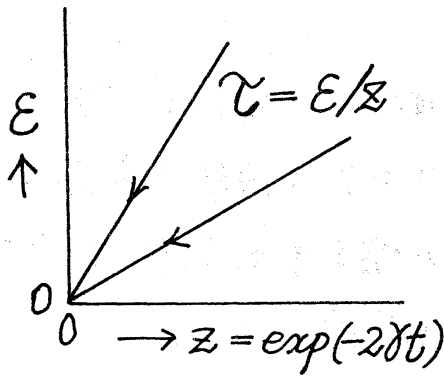


図3

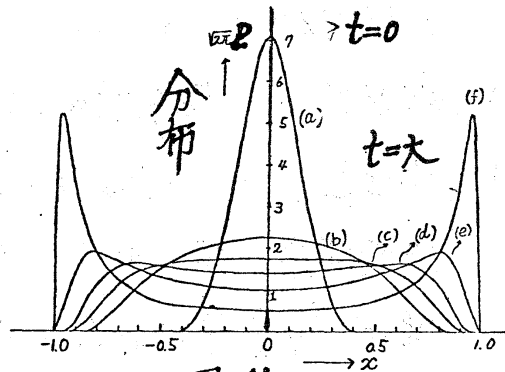


図4

即ち、最初、 $x$ は $\varepsilon$ の程度のゆらぎであったものが、時間の経過と共に大きくなり、遂には、オーダーが1の程度になりゆらぎと見ることは出来なくなり、巨視的秩序としての性格を持ち始める。single peak から、double peaks への移行目が巨視的秩序の発生の時刻 $t_0$ とみさせる。普通の意味でのガウスの分散 $\sigma_G$ は

$$\sigma_G \sim 1/|t_0 - t|$$

に比例して、発散する<sup>2)</sup>。これは、時間に関する不安定性の発現とみることが出来る。

さて、スケーリング理論の形成には文献<sup>1)~7)</sup>にあるようにいろいろな表現法がある。もっともわかり易い直観的計算法は、(9)の例からも予想されるように、物理量を $g\varepsilon$ に関して展開して、そのうちで、一番発散( $t \rightarrow \infty$ )の大きい

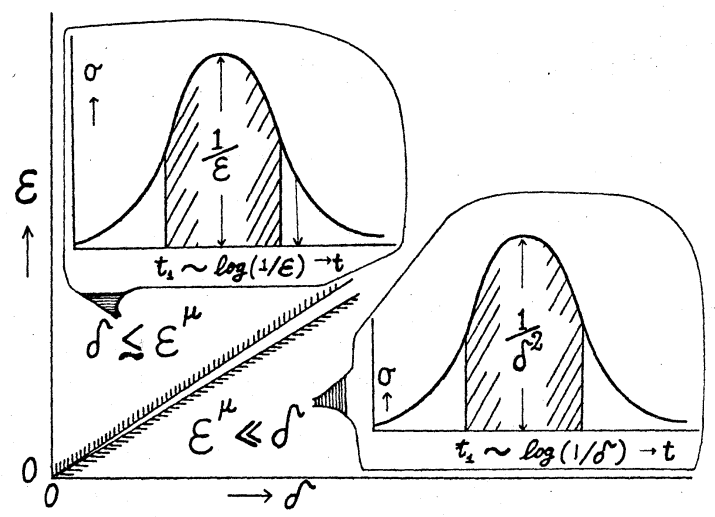
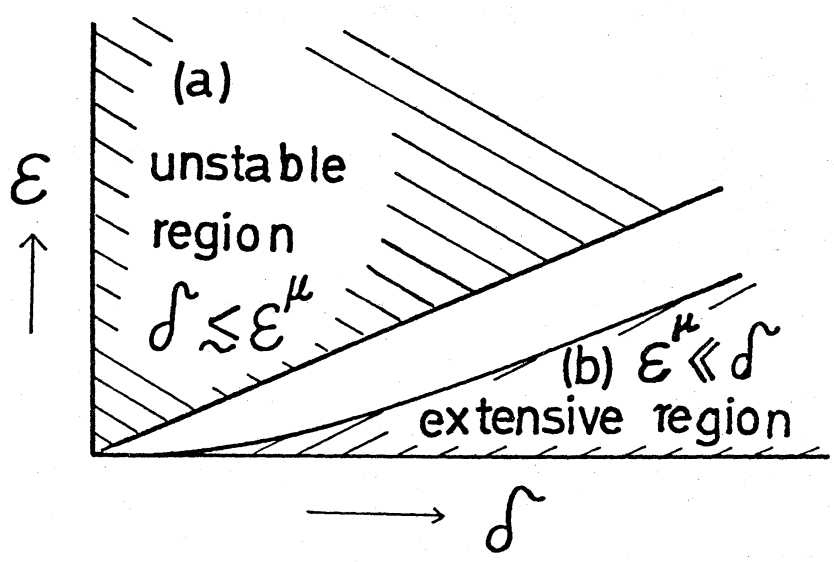
ものを全部集めることである。しかし、これは、面倒である。物理的には、次のようにするのがわかり易い。即ち、図1のように、時間領域を3つに分ける。

- (a) 初期領域：線形近似(ガウシアン近似)が成立する領域。
- (b) 非線型(スケーリング)領域：スケーリングの極限で普遍的な時間発展が現われる。ゆらぎの増大する領域、非線型性により巨視的秩序の現われる領域。
- (c) 終領域：再びガウシアン近似が成立する。

まず、初期領域では、ガウシアン近似を用いて、問題を解く。そのうちで時間の経過と共に一番強く発散する項を一つとめにして、 $\varepsilon$ と置き、これをスケーリング変数として、 $\varepsilon$ 領域(非線型領域)で、 $\varepsilon$ を固定して、 $g\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとり、系の発展方程式(一般のマスター方程式)を漸近評価し、簡単化する。その一般解を $\varepsilon$ 1領域と $\varepsilon$ 2領域の境界で滑めらかに接続する。終領域では、スケーリング解を、 $\varepsilon$ 2と $\varepsilon$ 3領域の境界の時刻での初期条件とみなして、ガウシアン近似で解く。<sup>リンク</sup> こうして、不安定系のグローバル(大域的)な解が、普遍的な形で求められる。

このスケーリング理論から得られる物理的結果の一つの重要な事として、すでに上に説明したことと物理的内容は重複するが、下の図5と図6のように「fluctuation enhancement

for the unstable region」と「anomalous fluctuation in the extensive region」を強調しておきたい。但し、 $\delta^a$  は  $\delta \equiv \chi(0)$  即ち、初期値の不安定点からのずれを表す。



この理論は最近、いろいろな問題に適用されつつある。(9)(10)~(13), (18~19), (24,25) 例えば、超放射<sup>(6), (18)</sup>、レーザー<sup>(1), (19)</sup>、スピノ-タール

命解,<sup>10)~13)</sup> 化学反応系,<sup>5)</sup> ベナール不安定性<sup>24)</sup> 等がみせられる。  
スケーリング理論に関連のある文献をまとめると、下の  
ようになる。

最後に、この原稿を丁寧に清書して下さった柏原典子さん  
に感謝致します。

Scaling Theory of Transient Phenomena near the Instability Point  
and related papers

1. M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 56 (1976) 77.
2. M. Suzuki, J. Stat. Phys. 16 (1977) 11.
3. M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 56 (1976) 477.
4. M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 57 (1977) 380.
5. M. Suzuki, J. Stat. Phys. 16 (1977) 477.
6. M. Suzuki, Physica 86A (1977) 622.
7. M. Suzuki, Proceedings of International Conference on  
Frontiers of Theoretical Physics and Winter School, held  
at New Delhi, January 6-22, 1977.
8. Y. Saito, J. Phys. Soc. Japan 41 (1976) 388.
9. H. Tomita, A. Ito and H. Kidachi, Prog. Theor. Phys. 56  
(1976) 786.
10. K. Kawasaki, Prog. Theor. Phys. 58 (1977) 410 and 175.
11. K. Kawasaki, M.C. Yalabik and J.D. Gunton, Phys. Rev. 17



(1978) 455.

12. T. Shimizu, Phys. Lett. 59A (1976) 175 and errata.
13. T. Shimizu, Physica.
14. K. Matsuo, J. Stat. Phys. 16 (1977) 169.
15. N.G. van Kampen, J. Stat. Phys. 17 (1977) 71.
16. H. Itoh and T. Nakagomi, Prog. Theor. Phys. 57 (1977) 54.
17. M. Doi, preprint.
18. T. Arimitsu and M. Suzuki, Physica 90A (1978) 303.
19. T. Arimitsu and M. Suzuki, Physica.
20. H. Hasegawa, S. Sawada and M. Mabuchi, a paper preprinted at the 4th Rochester Conference, 1977.
21. R.C. Desai and R. Zwanzig, preprint.
22. K. Matsuo, K. Lindenberg and K.E. Shuler, preprint.
23. G. Nicolis and J.W. Turner, Physica 89A (1977) 326.
24. Y. Aizawa, preprint.
25. I. Matsuba, Master thesis (1977).
26. K. Matsuo, J. Stat. Phys.