数理解析研究所講究録
第326巻 1978年 150-167

周期性をもつ基本流の線形安定性について

名大 工 応用物理 磯部文男
桑原真二

1. 序

流れに垂直な平面内に平行に置かれた平板列、または平行円柱列などの周期性をもつ境界の直後の伴流は同じ周期性をもつが、さらに後方ではその周期より長い周期をもつ流れがあらわれることがある。(Fig 1) これを平行平板等の直後の速度分布をもつ流れの不安定を考え、Orr-Sommerfeld 方程式を用いて解析する。

岐阜大学の桜井教授等による実験では、基本流の最大値 U_0, 平行板列、あるいは平行円柱列の周期 λ, 動粘性率 ν による Reynolds 数でおよそ 2000〜3000 で行なわれている。その際、平行板、あるいは円

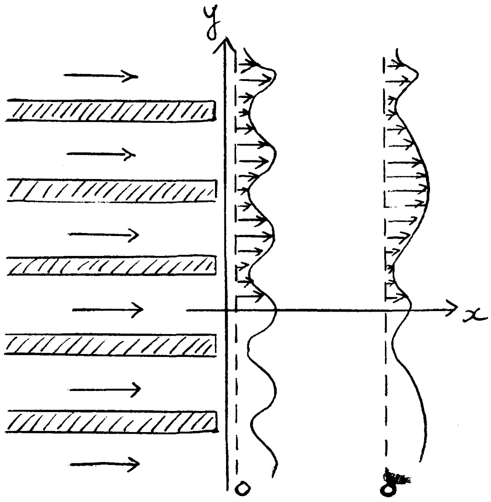


Fig 1 流れの概略図 速度の x 成分 (基本流の方向)を示す

柱の数は20～42であった。平行板の厚さ，あるいは円柱の直径をdとしたとき，l/d を変化させて，l/d が小さいほど，大きな周期の速度分布がえられている。

2. 問題の定式化

平行な平板列等をすぎたあとも，しばらくは平行流であるとして，2次元性がたもたれ，これに微小擾乱が加えられるとしてOrr-Sommerfeld方程式を用いる：

$$L\phi = cM\phi \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= -\frac{1}{ikR}\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right)^2 + U(y)\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right) - U''(y) \\ M &= \frac{d^2}{dy^2}-k^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

ただし，L, Mは演算子，　c：固有値（複素数）

ψ：流れ関数 $= \phi(y)e^{ik(x-ct)}$ 　である。

主流は平行流　：$\vec{U} = (U(y), 0, 0)$ 　でy方向に2の周期をもち，さらにxz面に対して対称とする：

$$U(y) = U(y+2) \quad , \quad U(y) = U(-y) \tag{2.3}$$

したがってOrr-Sommerfeld方程式は係数が同一周期をもつ，4階の線形同次常微分方程式となる。

係数が連続で，同一の周期を持つn階の線形同次常微分方程式は一次独立なn個の解を次の形でとることができる（

Floquet の定理)

$e^{i\mu\pi y}\,\chi$ (係数と同周期の関数を係数とする y の多項式)

そのうち、次の形の解が少なくとも1つ存在する。

$e^{i\mu\pi y}\,\chi$ (係数と同周期の関数)

Orr-Sommerfeld 方程式のこの形の解のうち、$y\to\pm\infty$ で

ϕ: 有限 で物理的に意味のある解は

$$\phi = e^{i\mu\pi y}F(y) \qquad F(y)=F(y+2),\quad \mu: \text{実数} \tag{2.4}$$

の形のものである。μ: 実数 とおくことにより、境界条件のかわりにすることができる。この場合は $0\leq\mu\leq 1$ の範囲でのみ考えればよい。また、L, M には次のような性質がある。

$$L(-y) = L(y), \qquad M(-y)=M(y) \tag{2.5}$$

したがって、$\phi(y)$ が固有値 c を持つ解のとき、$y\to -y$ としてこの性質を持ちいると、$\phi(-y)$ も同じ固有値を持つ解となり、

$$\phi(-y) = e^{-i\mu\pi y}F(-y) = e^{i(1-\mu)\pi y}\left[e^{-i\mu\pi y}F(-y)\right]$$
$$= e^{i\mu'\pi y}\,G(y) \qquad (G(y)=G(y+2)) \tag{2.6}$$

とかけるので、μ に関してはさらに $0\leq\mu\leq 1/2$ で考えればよい。ここで μ の各々の値に対し、ϕ の基本周期 s は次のように対応する。すなわち

$\mu = 0/1 \quad s=2 \qquad \mu = 1/2 \quad s=4$

$\mu = 1/3 \quad s=6 \qquad \mu = 1/4 \quad s=8$

$\mu = 1/5 \quad s = 10 \qquad \mu = 2/5 \quad s = 10$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

ここで

$$L\Phi = L\,(e^{i\mu\pi y} F(y)) = e^{i\mu\pi y} L'_\mu F(y)$$

$$M\Phi = M\,(e^{i\mu\pi y} F(y)) = e^{i\mu\pi y} M'_\mu F(y)$$

となるため．Orr-Sommerfeld 方程式は

$$L'_\mu F = C M'_\mu F \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned} L'_\mu &= -\frac{1}{ikR}\left(\left(\frac{d}{dy}+i\mu\pi\right)^2-k^2\right)^2 + U(y)\left(\left(\frac{d}{dy}+i\mu\pi\right)^2-k^2\right) - U''(y) \\ M'_\mu &= \left(\frac{d}{dy}+i\mu\pi\right)^2-k^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

となる．

U，F は Fourier 級数で展開できると仮定して．

$$\left.\begin{aligned} F(y) &= \sum_m a_m u_m \qquad \left(u_m = e^{im\pi y}/\sqrt{2},\ (u_k, u_m) = \delta_{km} \right) \\ U(y) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum V_m u_m \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

(2.7) に u_m をかけ $0 \leq x \leq 2$ で積分を行い（galerkin の方法）

$$\sum_n a_n L'_{mn} = c \sum_m a_n M'_{mn} \tag{2.10}$$

$$\left.\begin{aligned} L'_{mn} &= (u_m, L' u_n), \quad M'_{mn} = (u_m, M' u_n) \\ (f, g) &= \int_0^2 f^*(y)\, g(y)\, dy \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

となる．行列の形で：

$$L'_{mn} = (\mathbb{L})_{mn}, \quad M'_{mn} = (\mathbb{M})_{mn}, \quad a_n = (\mathbb{a})_n$$

とかくと (2.10) は次のようになる．

$$(\mathbb{L} - c\mathbb{M})\,\mathbb{a} = 0 \tag{2.12}$$

Mの逆行列を左からかけて

$$(M^{-1}L - c)a = 0 \qquad (2.113)$$

$$\left.\begin{aligned}
(M^{-1}L)_{\ell m} = B_{\ell m} &= \frac{1}{iR}\left[(\ell+\mu)^2\pi^2+k^2\right]\delta_{\ell m} + \frac{1}{2}U_{\ell-m}\frac{\left[(\mu+\ell)(2m+\mu-\ell)\pi^2+k^2\right]}{\left[(\mu+\ell)^2\pi^2+k^2\right]} \\
B_{\ell\ell} &= \frac{1}{iR}\left[(\ell+\mu)^2\pi^2+k^2\right]+\frac{1}{2}U_0 \\
B_{\ell m}\ (\ell\neq m) &= \frac{1}{2}U_{\ell-m}\frac{\left[(\mu+\ell)(2m+\mu-\ell)\pi^2+k^2\right]}{\left[(\mu+\ell)^2\pi^2+k^2\right]}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

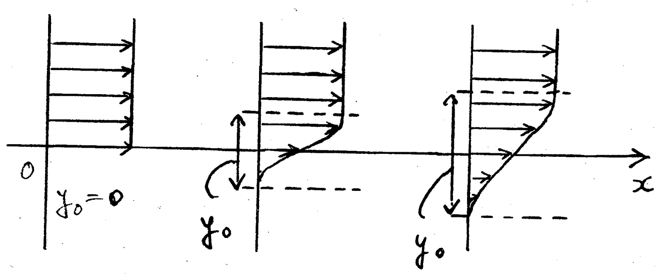
ここでUはx依存性が小さいとした。まず一般に平行に近い自由流Uのx依存性を議論する。速度Uがx=0で図のように階段関数的に0からU_0まで変化しているとする。このとき運動方程式のx成分は近似的に次のようにかける。

$$U_0\frac{\partial U}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

これは拡散方程式で次元解析から、y=0付近のUのとびの領域の巾y_0は次式で評価される。

$$y_0 \propto (\nu x/U_0)^{1/2}$$

Fig2 Uのx依存性の例



したがって、y方向の基本流の周期をdとしたとき、次の式が満たされる範囲で、x依存性が小さいとみなしてよい。すなわち

$$1 \gg y_0/d \propto (\nu/d\,U_0)^{\frac{1}{2}}\cdot(x/d)^{\frac{1}{2}} = \left[(1/R)\cdot(x/d)\right]^{\frac{1}{2}}$$

したがって，平板列または円柱列等からの距離xが$x/a \ll R$を満たす範囲では基本流はxによらないとしてよい。

3. 境界条件のもつ性質

• 安定の十分条件

(2.1) より

$$\int_0^2 (\varphi^* L\varphi - \varphi L^*\varphi^*)\,dy = \int_0^2 (c\varphi^* M\varphi - c^*\varphi M\varphi^*)\,dy \qquad (3.1)$$

を得る。

$$\varphi^* = (e^{i\mu\pi y}F(y))^* = e^{-i\mu\pi y}F^*(y)$$

$$\frac{d^m}{dy^m}\varphi = \frac{d^m}{dy^m}(e^{i\mu\pi y}F(y)) = e^{i\mu\pi y}\left(\frac{d}{dy}+i\mu\pi\right)^m F(y)$$

$$= e^{i\mu\pi y}G(y) \qquad (G(y) = G(y+2))$$

を用い，部分積分をくりかえすと，Poiseuille流等のときとまったく同じ，安定の十分条件をμに依存しない形で得ることができる。すなわち

$$\gamma k R < \min\{(I_2^2 + 2k^2 I_1^2 + k^4 I_0^2)/I_0 I_1\}$$

ただし

$$\gamma = \max(|U'|)$$

$$I_m^2 = \int_0^2 |d^m\varphi/dy^m|^2\,dy$$

• 境界条件の比較

ここで固有値問題の代表として，1次元のSchrödinger方程式を考え，Orr-Sommerfeld方程式との境界条件の比較を行う。

Navier Stokes方程式ではPoiseuille流のように壁にかこまれた流れの場合，その境界条件は壁で $\vec{v}=0$ であり，2次元の場合，流れの関数に対しては $\partial\psi/\partial x=\partial\psi/\partial y=0$ となる．Orr-Sommerfeld方程式ではこれに対応し，壁で $\phi=d\phi/dy=0$ となる．あるところで関数の値が0という条件はSchrödinger方程式では無限の高さのPotentialの壁における波動関数の条件 $\Psi=0$ に対応させることができる．Jet，伴流，境界層における無限遠での攪乱関数に対する条件としては，攪乱の速度=0から，無限遠で $\phi=d\phi/dy=0$ になる．これはSchrödinger方程式では束縛された粒子の波動関数が無限遠では $\Psi=0$ となることに対応する．

ここで考えた周期的な基本流に対する攪乱の関数は $\phi=e^{i\alpha\pi y}F(y)$ の形で表わされた．これは格子の中の周期的なPotentialの中における粒子の波動関数がBlochの定理，あるいはFloquetの定理により，$\Psi=e^{ik\pi x}F(x)$ $(F(x)=F(x+2))$ と書かれることに対応する．

4. 計算方法

• 主流について

計算はModelとして次頁のような形の速度分布に対してお

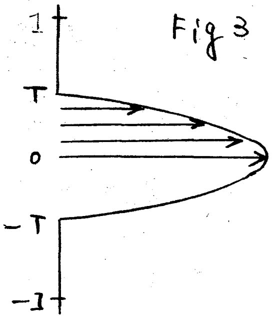


Fig 3

こなければ、周期 2 で壁がおかれているとき、その壁のすきまを 2T として、速度分布は平行板の内部では Poiseuille 流であるので、壁から出たあとも、しばらくは同じ型をしていると仮定した。T は 0.25, 0.5, 0.75 と変化させた。ただし、流量は 1 で正規化してある。すなわち U_0 の定義として、

$$U_0 = \int_{-l}^{l} U(y)\,dy \,/\, l$$

ここで l は基本流の周期。この U_0 から Reynolds 数 R は

$$R = U_0 l/\nu = 1/\nu \int_{-l}^{l} U(y)\,dy$$

・固有値；固有関数について

F の展開で $F = \sum_{m=-N}^{N} a_m u_m$ として近似をすると、問題は B_{lm} $(-N \leq l, m \leq N)$ の固有値問題に帰着され、a_m はその固有 Vector になる。この行列 B_{lm} の固有値、固有 Vector を数値的に計算した。その際 B_{lm} には U_n が $-2N \leq n \leq 2N$ の範囲で含まれる。

5. 計算結果

・中立曲線について

各々の形の基本流についての $\mu = 0/1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5,\ 2/5$

についての中立曲線は別表のとおりである。

ここで行った計算では、試みた基本流の形すべてについて $\mu=0/1$、すなわち基本流と同周期の擾乱が最小の臨界 Reynolds 数を与える。このときの中立曲線は $\mu=0/1$ で他の μ の場合とは大きくことなった形をしており、2次元の Jet 伴流に対する中立曲線と類似した、波数、Reynolds 数の依存性をしめしている。なお、この中立曲線をえがくための計算は $N=20$ で行なった。

・固有関数について

Poiseuille 流型で $T=0.75$、$R=30$、$k=1.0$ のとき、$\mu=0/1$、$1/2$、$1/3$、について固有関数が計算した。この T, R, k の値のとき、$\mu=0/1$ については1つの固有値が不安定を与え、他の固有値は安定性を与える。$\mu=1/2$、$1/3$ では中立曲線の近くで安定である。固有値の虚数部の大きい順に $m=1,2,\cdots$ としたとき、$m=1\sim5$ についての固有関数は別表のとおりである。この計算は $N=71$ として、倍精度で行った。ただし、$\phi=e^{i\mu\eta}F(y)$ において絶対値の最大値をとるところでの値が1となるようにして正規化してある。

ここで計算された範囲では安定なものほど振動が多くなっている傾向がみられる。また高次の固有関数はその Fourier 係数を比較すると、$(2m+1)$、$2(m+1)$ 番目の固有関数 $(m=0,1,2,\cdots)$

は $U_{\pm m}$ が最も大きくなっている。さらに $F(y)$ については対称，反対称の順にその固有値がならんでいる。

6．結論

以上の Orr-Sommerfeld 方程式を用いた計算結果では，基本流と同周期をもった流れが全体の流れの中で最も不安定であることが示された。そしてこのえられた臨界 Reynold 数は実験が行なわれたような 100～1000 の order の Reynolds 数に比べ，およそ 1～10 order であり，2ケタ値が異なっている。この実験の行なわれた Reynolds 数では以上で調べたすべての周期で不安定になっており，実験が行なわれた状況を説明するには，このすべての周期の攪乱が微小な攪乱から有限の振幅になったのちの，有限振幅の非線形相互作用による影響を調べなければならないであろうという予想をすることができる。あるいはここでのべた平行流の線形安定性の理論ではなく，まったく別の Approach が必要であろう。

Poiseulle 流型の流れのとき壁のあつさとすきまを変化させたとき，流量一定で考えれば，一般に壁のあつさがすきまに比べ大きいときほど不安定になりやすいことが，計算されたすべての周期の攪乱についていえる。

固有関数に関しては，計算をした関数の数が少ないため，確定的なことは言えないが一般に次のようなことが言えるであろう。すなわち，不安定な攪乱の固有関数ほど振動が少なく，安定で増幅率の絶対値が大きいものほど，振動の数が大きくなっている。これは振動の数が大きいものほど，粘性によって減衰されやすいであろうということからも予想されることである。逆にこのことから Fourier 級数で上位の N 項までとった近似の収束がよく，N を小さくとったときでも，ある程度の精確さで，固有値，固有関数を与えることの説明にもなるであろう。

付記

・U(y) の Fourier 級数展開について

Fourier 級数展開を基本流 U(y) に適用することを考えると，Orr-Sommerfeld 方程式に U(y) の2階微分が現われており，しかも上で考えた Model に用いると，U(y) の2階微分に delta 関数的な特異点が現われているので，U(y) の2階微分の Fourier 展開はある振幅をもった，こまかな振動をする。計算は Fourier 級数を用いて行なわれるので，この U の2階微分の振動の影響を考えなければならない。

そこで，U(y)をそのN次の近似式でFejérの総和法でおきかえ，そのときの固有値，固有関数の変化を調べた．（別表参照）U(y)をFejérの総和法でおきかえたとき，その2階微分はほぼ基本流の2階微分と特異点以外で一致，あるいは同様な変化をし，特異点のまわりでも有限の値をとり，十分なめらかになっている．しかもFejérの総和法もU(y)の近似に関しては，$N \to \infty$で一様収束をあたえる．上記の表から明らかなようにFourier級数展開によってえられた固有値，固有関数は近似の項数Nにあまり依存せず，非常によい収束をしている．Fejérの総和法による計算は$N \to$大にしたがってFourier級数によってえられた固有値，固有関数に十分近づいている．したがって，Fourier級数によってあらわれるU(y)の2階微分の振動の影響は小さいと考えられ，しかもFourier級数展開による近似では項数をそれほど大きくとる必要はないと予想される。

・高次の固有値について

M：小 のときの固有値のR依存性，α依存性または基本流の形による依存性は予想できないが，高次の固有値は次のような考察から近似的に得ることができる。

Φは級数展開において最初のN項によって近似されている．この近似は高次のmodeがすべての他のmodeと分離しているときのみ正しい．もし高次のmodeが分離していれば，

高次の固有値に対する近似表現を得ることができる。もしm番目の mode が分離していれば行列の対角成分のみがa_mに対する方程式にのこされる。すなわち

$$(B_{mm}-c)\,a_m=0$$

これは十分大きなlに対して

$$B_{ll}\simeq l^2\pi^2/i\alpha R$$

$$B_{lm\,(l\neq m)}\simeq \frac{1}{2}U_{l-m}\;\frac{2m-l}{l}=U_{l-m}\left(\frac{m}{l}-\frac{1}{2}\right)$$

で

$$|B_{lm}/B_{ll}|\simeq U_{l-m}\left(\frac{m}{l}-\frac{1}{2}\right)/l^2\pi^2/\alpha R$$

$$\simeq \alpha R\,U_{l-m}\;m/l^3$$

であるから、十分lが大きければ、対角成分のみをのこした方程式を考えればよいことがしめされる。このことから、$2n$, $(2n+1)$番目の固有値はnが十分大きければ、

$$C_{\substack{2n\\2n+1}}\simeq B_{\substack{-n-m\\(n,n)}}=\frac{1}{2}U_0+\frac{1}{i\alpha R}\left[\left(\underset{(+)}{-}n+M\right)^2\pi^2+\alpha^2\right]$$

で表わされる。（固有値の Graph 参照）また この式から明らかなように、このC_nの近似式は基本流の Fourier 係数としてはU_0にしかよらず、流量の正規化により、$U_0=1$ととってあるため、高次の固有値は主流の速度分布にはよらないことがわかる。これは計算結果からもたしかめられる。

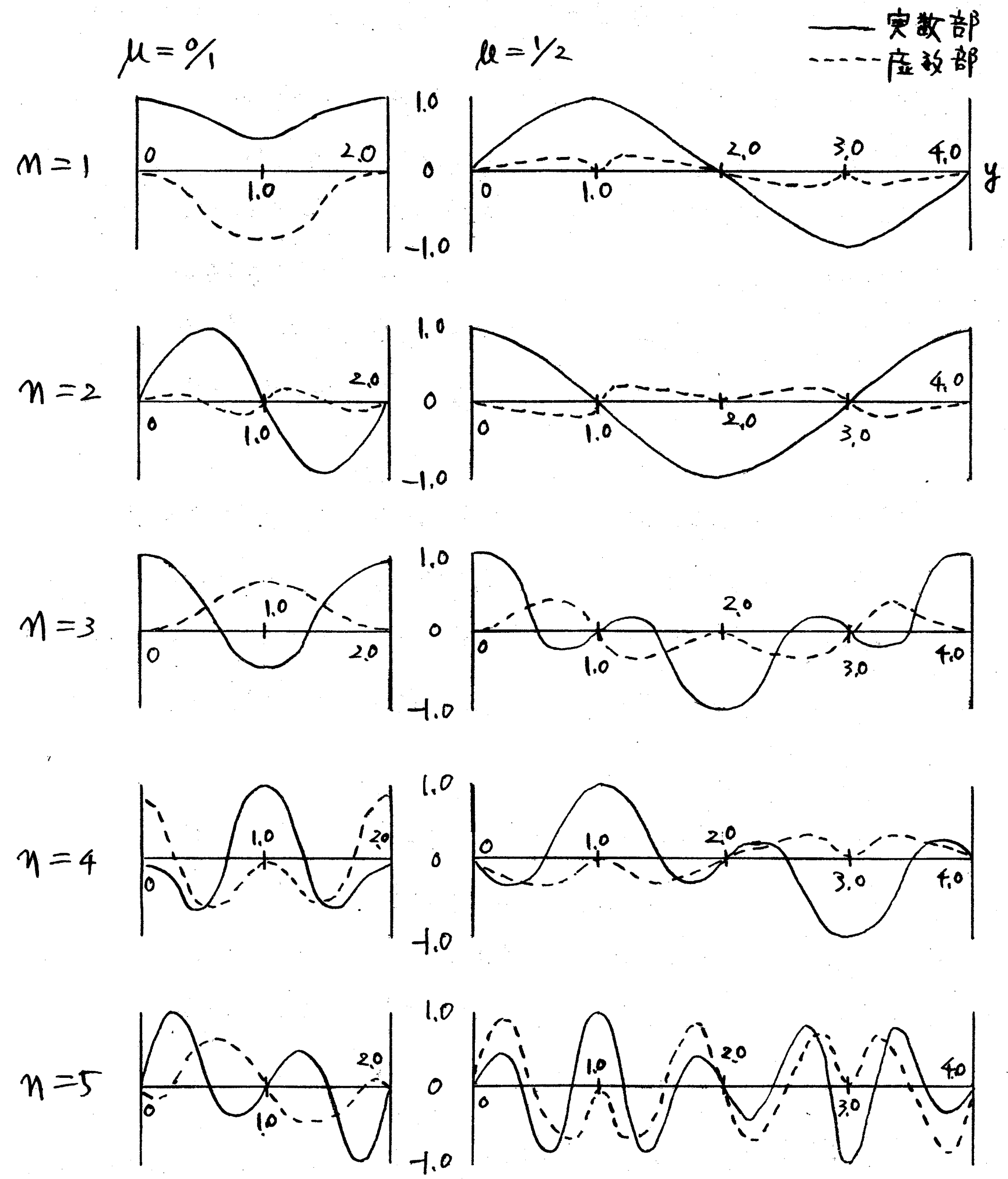
基本流のFourier級数展開とFejerの総和法によって得られた固有値の比較.（Poiseuille流型, $T=0.75$, $R=30$, $k=1.0$ $\mu=1/3$）

	Fourier級数		Fejerの総和法	
$N=15$	実数部	虚数部	実数部	虚数部
$m=1$	0.90254	−0.02808	0.89110	−0.032805
2	0.07661	−0.05903	0.08982	−0.06140
3	0.52197	−0.76782	0.51884	−0.76078
4	0.50423	−1.02777	0.50487	−1.02108
$N=25$				
$m=1$	0.90254	−0.02808	0.89559	−0.030956
2	0.07661	−0.05903	0.08464	−0.06047
3	0.52197	−0.76782	0.5200	−0.76354
4	0.50423	−1.02776	0.50464	−1.02363
$N=35$				
$m=1$	0.90254	−0.02808	0.89755	−0.03015
2	0.07661	−0.05903	0.08238	−0.06006
3	0.52197	−0.76782	0.52056	−0.76494
4	0.50423	−1.02777	0.50454	−1.02477

計算した固有関数のうち, Poiseuille流型で$T=0.75$, $R=30$, $k=1.0$ のときの $\mu=0/1$, $1/2$ における固有関数をGraphにしめした. ただし, 固有値の虚数部の大きい順に$m=1, 2,$ … とし, $m=1$〜5をしめした. 近似は$N=35$で計算を行った。

Fig. 4

固有関数（Poiseuille流型　$T=0.75$　$R_e=30$.　$k=1.0$　$\mu=0/1,\ 1/2$）



次表に固有値cのReynolds数による変化と高次の固有値のn依存性を示す。Reynolds数による変化のときは$N=20$，高次の固有値のn依存性のときは$N=35$で計算を行った。

Fig.5

固有値 c (=Cr+iCi) の Reynolds数による変化の例

(Poiseuille 流型 T=0.75 μ=1/3. k=1.5)

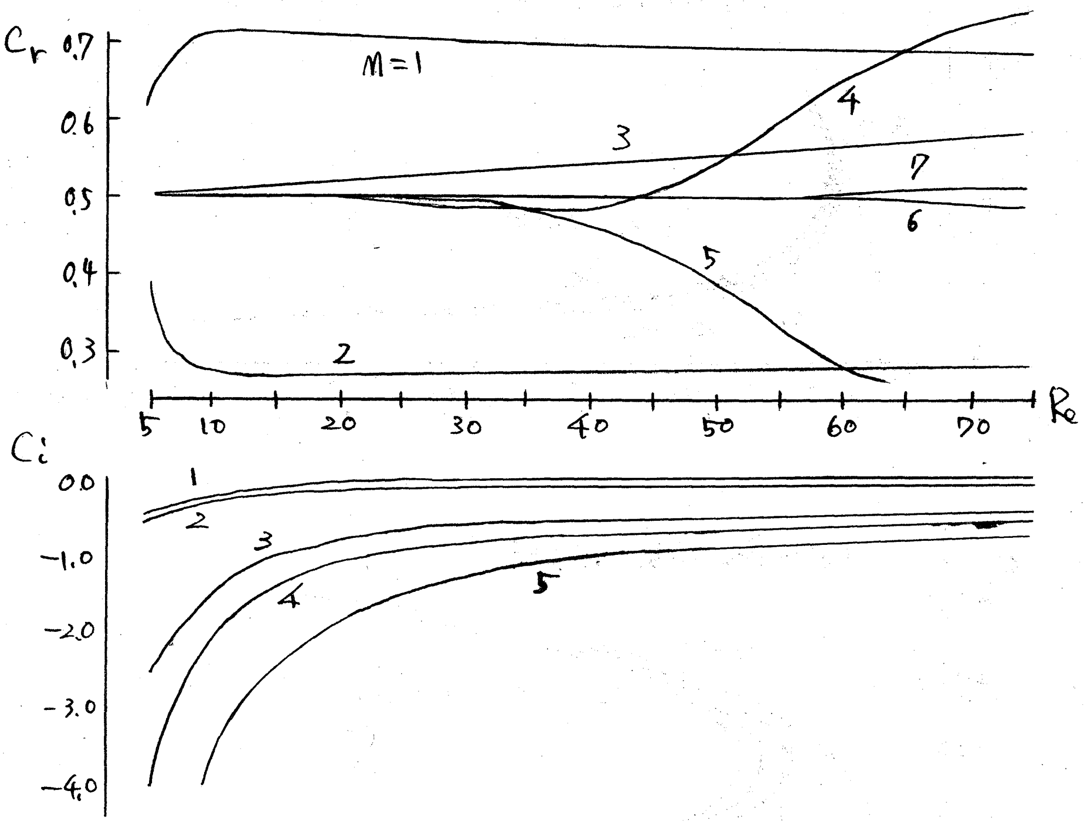


Fig.6

高次の固有値 c (=Cr+iCi) の変化の例

(Poiseuille 流型 T=0.75 μ=1/3. k=1.0 Re=30)

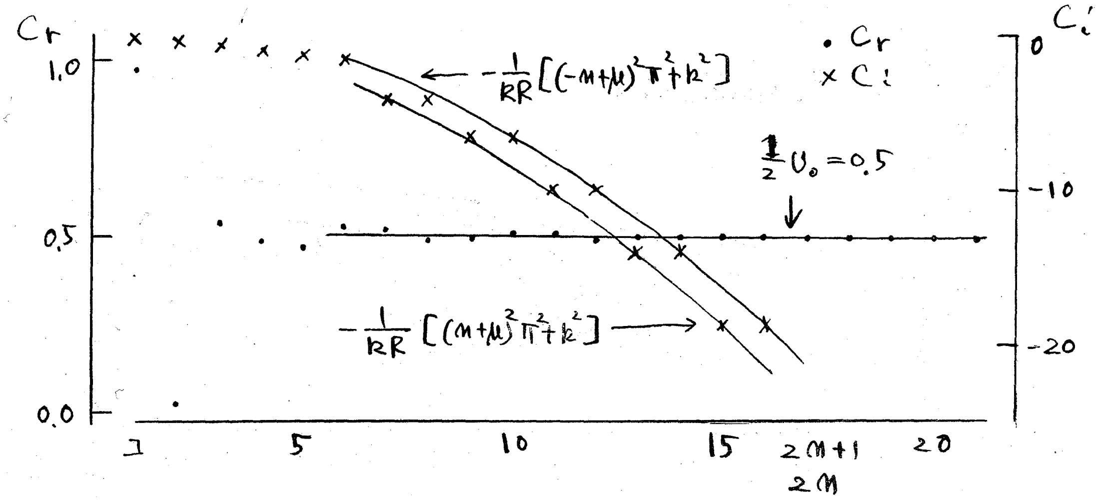
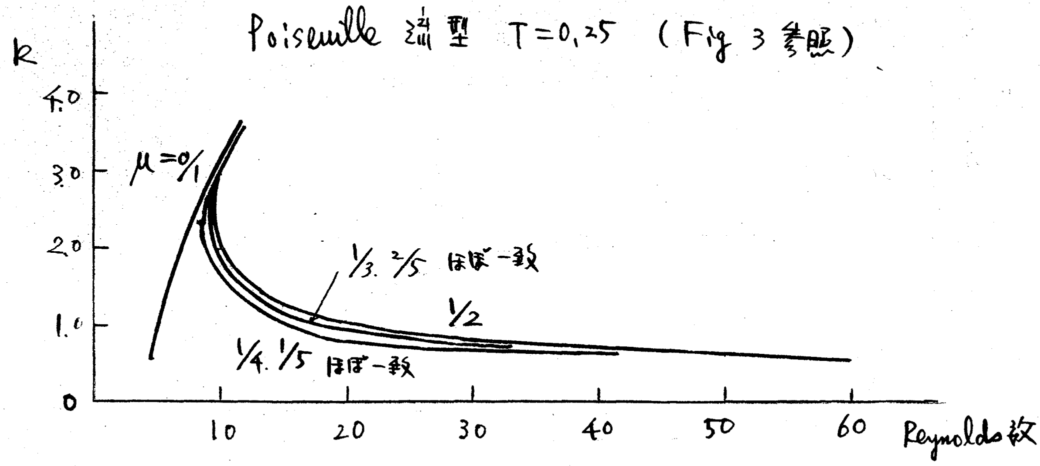
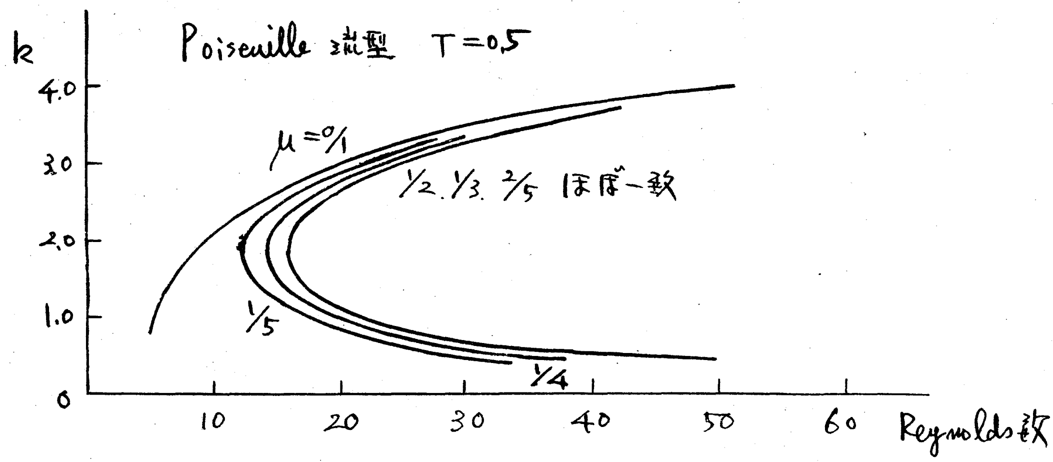
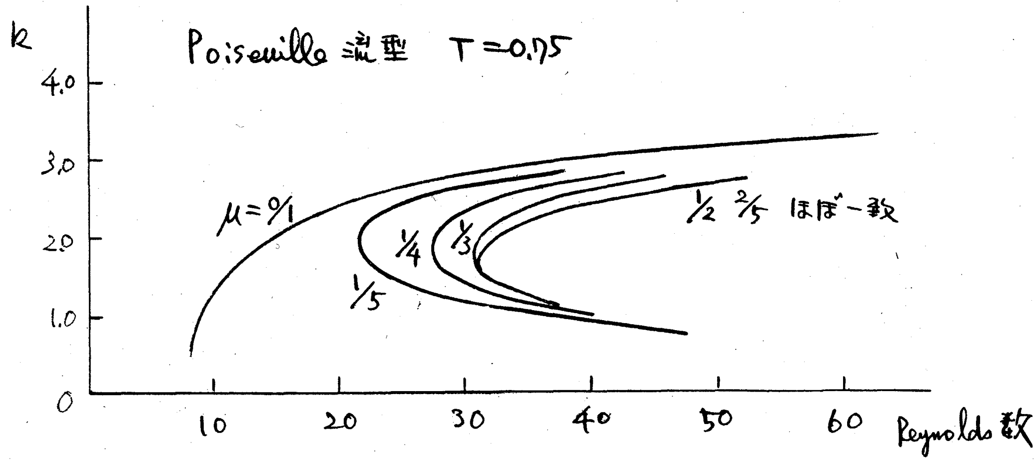


Fig.7 中立曲線


Poiseuille 流型 T=0.25 (Fig 3 参照)
k
4.0
3.0
2.0
1.0
0
μ=0/1
1/3. 2/5 ほぼ一致
1/2
1/4. 1/5 ほぼ一致
10
20
30
40
50
60
Reynolds数


Poiseuille 流型 T=0.5
k
4.0
3.0
2.0
1.0
0
μ=0/1
1/2. 1/3. 2/5 ほぼ一致
1/5
1/4
10
20
30
40
50
60
Reynolds数


Poiseuille 流型 T=0.75
k
4.0
3.0
2.0
1.0
0
μ=0/1
1/4
1/3
1/5
1/2 2/5 ほぼ一致
10
20
30
40
50
60
Reynolds数

参考文献

C. C. Lin : The theory of Hydrodynamic Stability
(Cambridge University Press)

F.A. Coddington, N. Levinson :
Theory of Ordinary Differential Equations
(McGraw-Hill)

C. Grosch. H. Salwen :
J. Fluid Mech. Vol 34 Part 1. 177 (1968)

T. Matsui : 1975 Joint JSME-ASME Applied Mechanics
Western Conference 415