数理解析研究所講究録
第 328 巻 1978 年 96-105

複素 V-多様体の Riemann-Roch 定理

阪大 理　川崎 徹郎

1．<u>導入</u>　Mをコンパクト複素多様体，$E\to M$をM上の整型ベクトル束とする．今$E\to M$の自己同型gが$Aut(E\to M)$の中でコンパクトな閉部分群を生成しているとする．gはEの局所整型切断の作る層$\mathcal{O}(E)$に作用し，従ってコホモロジー群$H^i(M;\mathcal{O}(E))$に線型に作用する．ここで同変算術種数を

$$\chi(g,M;\mathcal{O}(E))=\sum_{i=0}^{\dim M}(-1)^i\,\mathrm{trace}\left[g\mid H^i(M;\mathcal{O}(E))\right]$$

で定義すると，Atiyah-Singerの同変Riemann-Roch定理により

$$\chi(g,M;\mathcal{O}(E))=\left\langle\mathcal{T}^g(M;E),[M^g]\right\rangle$$

と表わされる．ここでM^gは不動点集合，[ ]はホモロジー基本類，$\mathcal{T}^g(M;E)$は同変Todd類で次の様に定義される．$N=\nu(M^g\subset M)$を法束とする．M^gの各点xに対し，gはN及びEの繊維N_x，E_xに線型に作用する．その固有値$e^{i\theta}$に属する固有空間を$(N_\theta)_x$，$(E_\theta)_x$と書くと，Whitney和による分解

$$E|_{M^g} = \bigoplus_{0 \le \eta < 2\pi} E_\eta \ , \quad N = \bigoplus_{0 < \theta < 2\pi} N_\theta$$

が得られる．一般に複素ベクトル束 ξ の Chern 類を形式的に $\prod_{j=1}^{\dim \xi} (1 + x_j)$ と書く時，特性類 $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_\theta$, ch_η を

$$\begin{cases} \mathcal{T}(\xi) = \prod_j \dfrac{x_j}{1 - e^{-x_j}} & \\ \mathcal{T}_\theta(\xi) = \prod_j \dfrac{1}{1 - e^{-x_j - i\theta}} & 0 < \theta < 2\pi \\ ch_\eta(\xi) = \sum_j e^{x_j + i\eta} & 0 \le \eta < 2\pi \end{cases}$$

で与える。すると同変 Todd 類は

$$\mathcal{T}^g(M;E) = \left(\sum_\eta ch_\eta(E_\eta)\right) \cdot \mathcal{T}(TM^g) \cdot \prod_\theta \mathcal{T}_\theta(N_\theta)$$

で定義される．

次に $G < \mathrm{Aut}(E \to M)$ を有限変換群としよう．すると作用による商空間 M/G は解析空間となり，$E \to M$ の G-不変な局所整型切断は M/G 上の連接的解析層 $\mathcal{O}_V(E/G)$ を定義する．今 M 上の E を係数とする Dolbeault 複体の G-不変な部分は M/G 上の層 $\mathcal{O}_V(E/G)$ の柔軟解消を与えるから，同型

$$H^i(M/G \,;\, \mathcal{O}_V(E/G)) \cong H^i(M \,;\, \mathcal{O}(E))^G$$

を得る。ここで有限群の既約指標の直交性を用いると，M/G の $\mathcal{O}_V(E/G)$ を係数とする算術種数は

$$\chi(M/G;\mathcal{O}_V(E/G)) = \sum_{i=0}^{\dim M}(-1)^i \dim H^i(M/G;\mathcal{O}_V(E/G))$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_i(-1)^i \operatorname{trace}[g \mid H^i(M;\mathcal{O}(E))]$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \mathcal{T}^g(M;E), [M^g]\rangle$$

と表わすことができる．

一般にベクトル束の特性類は線型接続を与えることにより曲率形式の多項式として表わすことができる．曲率形式は接続により局所的に与えられることに注意しよう．このことを用いて上式を M/G 上局所的に書き直してみよう．

今すべての $g\in G$ につき，接束 TM^g，法束 $\nu(M^g\subset M)$，係数束 $E|_{M^g}$ に線型接続を選び，全体として G-不変になっているとする．各点 $x\in M$ につき $G_x=\{g\in G \mid gx=x\}$－不変な近傍 $\tilde{U}_x$ をとり，$U_x=\tilde{U}_x/G_x$ が $[x]$ の M/G での近傍と同一視されるようにする．各 $\tilde{U}_x$，各 $g\in G_x$ につき，$\tilde{U}_x^g$ 上には特性形式 $\mathcal{T}^g(\tilde{U}_x,E)$ が定まっている．M/G 上の開被覆 $\{U_x\}$ に従う 1 の分解 $\{\varphi_{x_i}\}_{i=1,\cdots,N}$ を与えると上式は次の式と同値である．

$$\chi(M/G;\mathcal{O}_V(E/G)) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{|G_{x_i}|}\sum_{g\in G_{x_i}}\int_{\tilde{U}_{x_i}^g}\varphi_{x_i}\cdot\mathcal{T}^g(\tilde{U}_{x_i};E)$$

この式は接続が全体的に与えられている事を除けば，全く $(G_x, \tilde{U}_x)$ 上の情報だけで書かれている．従って我々はこの式が局所的に $\tilde{U}/G$ の形をしている解析空間に対して成立つと期待することができる．このような空間の定式化（複素 V-多様体），及びそのような空間への上式の拡張を次に述べる．

2. 定義と定理

はじめに複素 V-多様体とその上の整型ベクトル V-束を定義する．これらは空間 M/G と写像 $E/G \to M/G$ の一般化である．

X を解析空間とする．X 上の複素 V-多様体構造とは次の様なものである．$\mathcal{U}$ を X の十分細かい位相の基とする．

(I) 各 $U \in \mathcal{U}$ に対して複素多様体 $\tilde{U}$ と有限群 $G \subset \mathrm{Aut}(\tilde{U})$ があって，同一視 $U \cong \tilde{U}/G$ が与えられている．

(II) $U, U' \in \mathcal{U}$，$U \subset U'$ とすると開部分集合の上への双整型写像 $\varphi : \tilde{U} \to \tilde{U}'$ があって，包含 $U \subset U'$ を覆っている．

その時 φ は $G_{U'}$ の作用を除いて唯一つ定まり，各 φ は群単射 $\lambda_\varphi : G_U \longrightarrow G_{U'}$ を定め，φ は λ_φ-同変になる．

X を複素 V-多様体，$p : E \to X$ を解析空間の間の写像とする．$E \to X$ 上の整型ベクトル V-束構造とは：

(I) 各 $U \in \mathcal{U}$ に対して G_U-同変な整型ベクトル束 $\tilde{E}_U \to \tilde{U}$ があって，写像 $p : p^{-1}(U) \to U$ と商空間の間の写像 $\tilde{E}_U/G_U \to \tilde{U}/G$

とは同一視される．

(II) $U, U' \in \mathfrak{U}$，$U \subset U'$ とすると，各 $\varphi: \tilde{U} \to \tilde{U}'$ に対してその上の整型束写像 $\Phi: \tilde{E}_U \to \tilde{E}_{U'}$ があって，包含 $p^{-1}(U) \subset p^{-1}(U')$ を覆っている．

その時 Φ は λ_φ-同変となり，各 $\tilde{E}_U \to \tilde{U}$ の G_U-不変な局所整型切断は解析空間 X 上の連接的解析層 $\mathcal{O}_V(E)$ を定義する．

注意　一般に X を V-多様体とする時，各 $U \in \mathfrak{U}$ に対して接ベクトル束 $T\tilde{U} \to \tilde{U}$ を対応させると接ベクトル V-束 TX が得られる．また各 $U \in \mathfrak{U}$ に対し $T\tilde{U}$ の同伴主繊維束 $P(T\tilde{U})$ を対応させると，接主繊維束 $P(TX)$ が得られるが，この時，空間 $P(TX)$ は特異点をもたず C^∞-多様体になる．さらに右からの構造群の作用が定義され，X はその作用の商空間と同一視される．特に構造群をコンパクトにとれば，すべての V-多様体はコンパクト群の作用による C^∞-多様体の商空間として得られることがわかる．

X をコンパクト複素 V-多様体；$E \to X$ を整型ベクトル V-束とする．今すべての $U \in \mathfrak{U}$，すべての $g \in G_U$ に対して，$T\tilde{U}^g$，$\nu(\tilde{U}^g \subset \tilde{U})$，$\tilde{E}_U|\tilde{U}^g$ に線型接続があって，群 G_U の作用，貼合せ $\varphi: \tilde{U} \to \tilde{U}'$，$\Phi: \tilde{E}_U \to \tilde{E}_{U'}$ に対して不変であるとする．この事は，X 上の開被覆 $\mathfrak{U}$ に従う 1 の分解 $\{\varphi_U\}$ があり，接続は 1 の分解によって貼合わすことができるから

常に可能である．今，各 $\tilde{U}^g$ 上には特性形式 $\mathcal{T}^g(\tilde{U};\hat{E}_U)$ が定義され，群 G_U の作用，各貼合せ $\varphi:\tilde{U}\to\tilde{U}$ に対して不変になっている．この時解析空間 X の $\mathcal{O}_V(E)$ を係数とする算術種数は次の様に表わされる．

$$\chi(X;\mathcal{O}_V(E)) = \sum_{i=0}^{\dim X}(-1)^i \dim H^i(X;\mathcal{O}_V(E))$$

$$=\sum_{U\in\mathcal{U}}\frac{1}{|G_U|}\sum_{g\in G_U}\int_{\tilde{U}^g}\varphi_U\cdot\mathcal{T}^g(\tilde{U};\hat{E}_U)$$

この式の右辺の $g=1$ で定義される部分を考えると，これは通常の Todd 形式の X 上での積分になっている．V-多様体上でも自然に de Rham の定理が拡張され，この Todd 形式はコホモロジー群 $H^*(X;\mathbb{R})$ の元 $\mathcal{T}(X;E)$ を定めていることがわかり，上記の積分はホモロジー基本類 $[X]$ との Kronecker 積で与えられている．残りの部分は特異点集合の上の積分になっているが，一般に V-多様体の特異点集合は V-多様体ではないので意味は明確でない．そこで V-多様体の特異点集合をバラバラに分解して V-多様体に組み直すことを試みてみる．

V-多様体 X の各点 x は $\mathcal{U}$ を十分細かくとることにより，x の近傍 $U_x\in\mathcal{U}$ があって，x は $\tilde{U}_x$ 上の $G_x=G_{U_x}$ の作用による不動点であるとしてよい．このような G_x は内部自己同型を除いて唯一つ定まる．G_x の元の共役類を $(h_x^0)=(1)$，(h_x^1)，$\cdots$

$(h_x^{p_x})$ とおく．すると集合 $\{(y,(h_y^j)) \mid y \in U_x,\ j=1,2,\cdots,p_y\}$ ($j=0$ は除く) は並置和 $\coprod_{i=1}^{p_x} \widetilde{U}^{h_x^i}/Z_{G_x}(h_x^i)$ と自然に同一視される．ここで $Z_{G_x}(h_x^i)$ は元 h_x^i の G_x の中での中心化群．そこで集合 $\widetilde{\Sigma} X = \{(x,(h_x^i)) \mid x \in X,\ i=1,\cdots,p_x\}$ を考えると上の同一視により，V-多様体の構造をもつ．$\widetilde{\Sigma} X$ は色々な次元の連結成分をもち，すべての $U \in \mathcal{U}$ とすべての $g \in G_U$ ($g \neq 1$) につき商空間 $\widetilde{U}^g/Z_{G_U}(g)$ を自然に貼合わせたものと考えることができる．今 $\widetilde{\Sigma} X$ の各座標近傍 $(Z_{G_U}(g), \widetilde{U}^g)$ 上には微分形式 $\mathcal{T}^g(\widetilde{U}, \widetilde{E}_U)$ が乗っており，$Z_{G_U}(g)$ の作用及び座標近傍の貼合せに関して不変になっている．従って形式和 $\sum_{g \in G_U} \mathcal{T}^g(\widetilde{U}, \widetilde{E}_U)$ は $\widetilde{\Sigma} X$ 上のコホモロジー類 $\mathcal{T}^{\Sigma}(X; E)$ を定義する．$\widetilde{\Sigma} X$ の連結成分を $\widetilde{\Sigma} X_1, \cdots, \widetilde{\Sigma} X_c$ とおき，各連結成分 $\widetilde{\Sigma} X_i$ には重複度 $m_i = |\,\mathrm{Kernel\ of}\ Z_{G_U}(g) \to \mathrm{Aut}(\widetilde{U}^g)\,| \neq 1$ を対応させる．

定理　X をコンパクト複素 V-多様体，$E \to X$ を整型ベクトル V-束とすると，次が成立つ：

$$\chi(X, \mathcal{O}_V(E)) = \langle \mathcal{T}(X, E), [X] \rangle + \sum_{i=1}^{c} \frac{1}{m_i} \langle \mathcal{T}^{\Sigma}(X; E), [\widetilde{\Sigma} X_i] \rangle .$$

注意　$\mathcal{T}(X;E)$ は Chern 類の有理係数多項式で表わされ，ベクトルV-束の Chern 類は位相幾何的方法で有理係数コホモロジー群で定義されるから，右辺の第一項は有理数である．

3．証明の概略　定理の証明には次に述べる事実が基本的である．

U を Riemann 多様体の芽とし，$E \to U$ を Hermite 計量をもつベクトル束とする．$g: E \to E$ を対 (U, E_U) の等長写像とする．$A: C^\infty(U;E) \longrightarrow C^\infty(U;E)$ を g-不変，形式的自己随伴，正定値な楕円型微分作用素とする．その時，不動点集合 U^g 上に滑らかな測度 Z_A^g が定まる．Z_A^g は局所的に定まり，作用 g と作用素 A による普遍的な表示をもつ．Z_A^g は次の性質をもつ：

(I)　M をコンパクトな Riemann 多様体 ($\partial M = \phi$)，$g: M \to M$ を等長写像とする．E, F を M 上の２つの g-同変なベクトル束で，g-不変な Hermite 計量をもつとする．$D: \mathcal{C}^\infty(M;E) \to \mathcal{C}^\infty(M;F)$ を g-不変な楕円型微分作用素とする．すると随伴 D^* が定まり，２つの g-不変，自己随伴，正定値な楕円型微分作用素 D^*D 及び DD^* が得られる．ここで $\mu_D^g = Z_{D^*D}^g - Z_{DD^*}^g$ とおく．すると D の同変指数は

$$\mathrm{ind}(g, D) = \int_{M^g} d\mu_D^g$$

で与えられる．

(II)　X をコンパクトな Riemann V-多様体とし，E, F を X 上の Hermite 計量をもつ2つのベクトル V-束とする．$D = \{D_U : \mathcal{C}^\infty(\tilde{U}; \tilde{E}_U) \to C^\infty(\tilde{U}; \tilde{F}_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ を G_U-不変な楕円型作用素の族で貼合せに関して不変なものとする．各 $\tilde{E}_U \to \tilde{U}$ 【$\tilde{F}_U \to \tilde{U}$】の G_U-不変な C^∞-切断の芽は X 上の層 $\mathcal{C}_V^\infty(E)$ 【$\mathcal{C}_V^\infty(F)$】を定義し，その大域切断の作るベクトル空間を $\mathcal{C}_V^\infty(X; E)$ 【$\mathcal{C}_V^\infty(X; F)$】と書く．$D$ は線型写像 $D: \mathcal{C}_V^\infty(X; E) \to \mathcal{C}_V^\infty(X; F)$ を定義し，その核と余核の次元の差を V-指数 $\mathrm{ind}_V(D)$ とおく．各 $U \in \mathcal{U}$ 毎に形式和 $\sum_{g \in G_U} \mu_{D_U}^g$ があるから，これらは $X \amalg \tilde{\Sigma} X$ 上の測度 $\mu_D + \mu_D^\Sigma$ を定義する．この時

$$\mathrm{ind}_V(D) = \int_X d\mu_D + \sum_{i=1}^c \frac{1}{m_i} \int_{\tilde{\Sigma} X_i} d\mu_D^\Sigma$$

が成立つ．

さて X をコンパクト複素 V-多様体，E を X 上の整型ベクトル V-束とする．この時算術種数 $\chi(X, \mathcal{O}_V(E))$ は E を係数とする，X の複素構造より定まる Spin^c Dirac 作用素の V-指数と一致している．従って D を Spin^c Dirac 作用素とする時，測度 μ_D^Σ

の定める微分形式 $d\mu_D^g$ が特性形式 $\mathcal{T}^g(\tilde{U};\tilde{E}_v)$ と一致することを示せばよい。今 $d\mu_D^g$ を定めているのは，$\tilde{U}^g$ の標準複素線束の Hermite 計量と計量接続，複素ベクトル束 $(\tilde{E}_v|\tilde{U}^g)_\eta$ $(0\leq\eta<2\pi)$ 及び $\nu(\tilde{U}^g<\tilde{U})_\theta$ $(0<\theta<2\pi)$ の Hermite 計量と計量接続，及び $\tilde{U}^g$ の Riemann 計量である。しかも $d\mu_D^g$ はこれらの情報に局所的にしか依存せず，また計量を定数倍しても変化しない。ここで Gilkey の定理によれば，このような，微分形式に価をもつ局所不変量は特性形式しか有り得ない。すなわち $d\mu_D^g$ は，$\tilde{U}^g$ の標準複素線束の Chern 形式，$T\tilde{U}^g$ の Pontrjagin 形式，$(\tilde{E}_v|\tilde{U}^g)_\eta$ の Chern 形式，及び $\nu(\tilde{U}^g<\tilde{U})_\theta$ の Chern 形式の多項式で表わされる。特に今の場合，複素構造より定まる Spin^c-構造を考えているので，$d\mu_D^g$ は Chern 形式の普遍的な多項式で表わされることがわかる。ところが上の性質(I)より，いくつかの例で同変種数を計算してみると，この多項式の係数は唯一つに定まることがわかり，それは同変 Todd 形式でなければならない。

参照

T. Kawasaki: The signature theorem for V-manifolds, Topology 17 (1978) 75−83.

T. Kawasaki: The Riemann-Roch Theorem for complex V-manifolds, to appear in Osaka J. of Math.