数理解析研究所講究録
第 328 巻 1978 年 106-129

仮想特異性定理及び第三種グラフとの遭遇

東大 理　飯高 茂

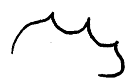
1. 以下，$\mathbb{C}$上定義された代数多様体を考察する．

最近（1978年1月），若林功氏は次の定理を証明した．

定理（若林[5]）Cを$\mathbb{P}^2$のd次既約曲線とする．$d \geq 4$を仮定しておくとき，（$g(C)$はCの正規化の種数）

i) $g(C) > 0$，又は，

ii) $g(C) = 0$，$\# \mathrm{Sing}(C) \geq 2$，かつ$C$のどれかの特異点は尖点でない，又は，　C: 

iii) $g(C) = 0$，Cの特異点は皆尖点であり，$\# \mathrm{Sing}\, C \geq 3$ とする．このとき　C: 

$$\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = 2.$$

iv) $g(C) = 0$，$\# \mathrm{Sing}(C) = 1$，⊛$\sigma_p \geq 3$ このとき $\bar{P}_g(\mathbb{P}^2 - C) = \sigma_p - 1 \geq 2$.

ここで，$\bar{\kappa}(V)$はVの小平次元（対数的）[logarithmic Kodaira dimension] をさす．$\bar{\kappa}(V) = n\ (= \dim V)$のとき$V$を（対数的）双曲型の多様体という．D. Mumfordは，このとき，Vを対数的一般型とよぶことを提案している．

⊛ 特異点pでの解析的分枝の数．

しかし，これはなんとも無神経で不愉快なよび方ではないだろうか．対数的に一般！ そんな一般性に文学的な意味などありはしない．又，log kappa では $\bar{\kappa}=-\infty$ と定義されているのに，不細工な $\bar{\kappa}=-1$ を彼は再提案している．それは，不見識という他あるまい．DMへの八当りはこの位にして，先に進もう．

i), ii), iii) をまとめて言うには，特異小平次元を使うとよい．一般に，代数多様体 W の非特異点全体を $\mathrm{Reg}\, W$ で示す．その $\bar{\kappa}$ を $\kappa^{\#}(W)$ で示し，W の特異小平次元というのであった，i.e., $\kappa^{\#}(W)=\bar{\kappa}(\mathrm{Reg}\, W)$ [1]．

i), ii), iii) iv)($d \geqq 4$) といいかえると，$\kappa^{\#} C = 1$ 即ち，

「$\kappa^{\#}(C)=1$ なら $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2-C)=2$ 又は iv)」

といいかえられた．

さらに，「$\kappa^{\#}(C)\geqq 0$ なら $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2-C)\geqq 0$」も，若林は示している．

若林の原証明は巧妙なものではあるが，計算的であって，その本質を把え難い．彼の証明の簡易化が，この小論の目的である．そして，第2種境界とその P_m, κ, $\bar{\kappa}$, 第一段，第2段補題が有効に働く．

2. Vを非特異代数多様体とし，その非特異完備化を$\bar{V}$とする．$F=\bar{V}-V$ をVの代数的境界という．さて，Fに中心をもつ2次変換をくり返し，代数的境界を単純化する．即ち，非特異代数多様体$\bar{V}^{\#}$と，固有双有理正則写像 $\mu:\bar{V}^{\#}\longrightarrow\bar{V}$ とがあり，$D^{\#}=\mu^{-1}(F)$は正規交叉型，をみたすようにできる．$(\bar{V}^{\#}, D^{\#})$ をVの，非特異境界$D^{\#}$をもつ∂多様体，という．

さて，$m\geqq 1$ につき，

$$\dim\left|m(K(\bar{V}^{\#})+D^{\#})\right|+1$$

は，Vのみに依存することが容易にわかる．これを$\bar{P}_m(V)$で示し，Vの，対数的m種数という．とくに$\bar{P}_1(V)$を$\bar{p}_g(V)$でかく．

さて，$\bar{V}^{\#}$の $K(\bar{V}^{\#})+D^{\#}$－次元 $\kappa(K(\bar{V}^{\#})+D^{\#}, \bar{V}^{\#})$ をVの，対数的小平次元といい$\bar{\kappa}(V)$で示す．これは，勿論Vのみに依存する．即ち，$\bar{P}_{m_0}(V)\neq 0$ となる $m_0>0$ のあるとき，$\alpha,\beta>0$ が存在し，$m\gg 0$ について，

$$\alpha m^{\bar{\kappa}(V)}\leq\bar{P}_{mm_0}(V)\leq\beta m^{\bar{\kappa}(V)}$$

が成立するのである．

$\bar{\kappa}(V)$ は $-\infty$, 0, 1, $\cdots$, n のいずれかの値をとり，この値が，Vの基本的部類分けをする．

例．$\dim V=1$ のとき．

型	$\bar{\kappa}(V)$	完備	非完備
I	$-\infty$	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{A}^1$
II	0	楕円曲線	$\mathbb{C}^*$
III	1	その他	

例2. 有理関数 $y = f(x)/g(x)$ のグラフを考える.

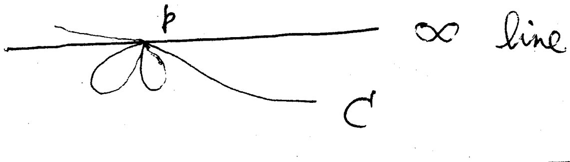
i) $\deg g + 1 \leq \deg f$ のとき,

$$x_2\, x_0^{\alpha}\, G(x_0, x_1) = F(x_0, x_1),$$ ただし $G(1, x) = g(x)$, $F(1, x) = f(x)$, $-\alpha = \deg g + 1 - \deg f$ と表わす. $u = x_0/x_2$, $v = x_1/x_2$ とおけば,

$$u^{\alpha} G(u, v) = F(u, v).$$

そこで $g(x) = \prod^{r} (x - \lambda_j)^{e_j}$ とおくと, $G(u, v) = \prod^{r} (v - \lambda_j u)^{e_j}$.

$\alpha > 0$ ならば, $C = \overline{\Gamma_\varphi}$ は, p で $r+1$ 個の解析的分枝



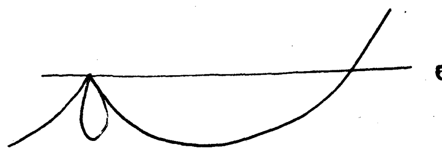
をもつ. $\alpha = 0$ ならば, $C = \overline{\Gamma_\varphi}$ は, p で r 個の分枝をもつ. 従って, ループの数は $r-1$ 個.

$\alpha < 0$ のときを考えよう. $\beta = -\alpha > 0$ とおくと,

$$x_2\, G(x_0, x_1) = x_0^{\beta} F(x_0, x_1).$$

$x_0 = 0$ は $x_2 = 0$ と $x_1 = 0$ を根にもつ. G は $d = \deg \overline{\Gamma_\varphi}$

とおけば，$d-1$ 次の同次式である．ゆえに，次図の如き



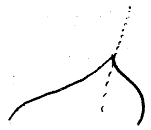
∞直線との交り方をする．ループの数はやはり $r-1$．

$\overline{\varkappa}(\mathbb{P}^2-\overline{\Gamma}_\varphi) \leq 0$ とすると，i) $\alpha > 0$, $r \leq 1$;

ii) $\alpha = 0$, $r \leq 2$,　iii) $\alpha < 0$, $r \leq 2$.

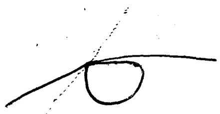
i) の場合を吟味する．甲) $\alpha > 0$, $r = 0$ のとき，$y = f(x)$．

これは $\overline{\varkappa}(\mathbb{P}^2-\overline{\Gamma}_\varphi) = -\infty$.



乙) $\alpha > 0$, $r = 1$ のとき $y = f(x)/x^m$, $\deg f > m+1$.

$\overline{p}_g = \overline{P}_2 = \cdots = 1$, $\overline{q} = 0$.



ii) の場合．$\alpha = 0$, $r = 1$．　$y = f(x)/x^m$, $\deg f = m+1$.

$x_2 x_1^m = F(x_0, x_1)$．ここで，1と2を逆におくと，

i) 甲) になる．$\alpha = 0$, $r = 2$ のとき 同様に，i) 乙.

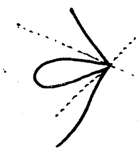
iii) の場合．$\alpha < 0$, $r = 1$　$y = f(x)/x^m$ とおくと

$x_2 x_1^m = x_0^\beta F(x_0, x_1)$．0と1をとりかえると，i) の甲．

$r = 2$ のとき，同様にして，i) の乙 に帰着する．

今度は $\bar{\kappa}(\mathbb{A}^2-\Gamma_\varphi)\leq 0$ としてみる。すると、
$\bar{\kappa}(\mathbb{A}^2-\Gamma_\varphi)=0$ となるのは、以下のときに限る

天) $\alpha>0,\ r=1$. 即ち、$y=f(x)/x^m$, $\deg f>m+1$.



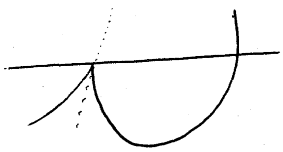
このとき $\mathbb{A}^2-\Gamma_\varphi-V(x)=S^0$ とおけば、

$$\Gamma(S^0,\mathcal{O})=k[x,y,1/(x^my-f),x^{-1}]$$

$$\simeq k[x,y,1/(y-f\cdot x^{-1}),x^{-1}]\simeq k[\xi,\eta,\eta^{-1},\xi^{-1}].$$

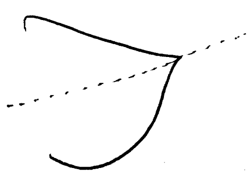
即ち、$S^0\simeq\mathbb{C}^{*2}$. よって $1=\bar{P}_m(\mathbb{P}^2-\bar{\Gamma}_\varphi)\leq\bar{P}_m(\mathbb{A}^2-\Gamma_\varphi)$
$\leq\bar{P}_m(S^0)=1$ が $m\geq1$ につき成立つ

地) $\alpha\leq0,\ r=1$. 即ち、$y=f(x)/x^m$, $\deg f\leq m+1$.



このときも同様に ; をぬくと $\mathbb{C}^{*2}$ になる。

$\bar{\kappa}(\mathbb{A}^2-\Gamma_\varphi)=-\infty$ になるのは、人) $\alpha>0,\ r=0$ のとき。即ち、$y=f(x)$、多項式のグラフを $\mathbb{A}^2$ からぬくとき、これに限る。



3. $\bar{V}$を非特異完備とし，Dを$\bar{V}$上の被約因子とする．μ: $\bar{V}^{\#}\to\bar{V}$ を2.のようにとる．すると，

$$\bar{P}_m(V) \leqq \dim|m(K(\bar{V})+D)|+1,$$
$$\bar{\kappa}(V) \leqq \kappa(K(\bar{V})+D,\ \bar{V})$$

が成立つ．この不等式の差は，Dの特異性に起因するものであって，同じような式がPlücker，Clebschらにより示された．即ち，Cを完備曲線とし，その仮想種数を$\pi(C)$，幾何種数（有効種数，ともいう）を$g(C)$とするとき，

$$g(C) \leqq \pi(C).\ \text{そして}$$

$$\pi(C)-g(C)=\sum_{p\in \mathrm{Sing}\,C}\delta_p,\quad \delta_p=\dim\left(\mathcal{O}'_p/\mathcal{O}_p\right).\ \mathcal{O}'_p \text{ は } \mathcal{O}_p \text{ の}$$

正規化．

そこで，$\Pi_m(V;\bar{V},D)=\dim|m(K(\bar{V})+D)|+1$ とおき，仮想対数的m種数とよぶことにしよう．

$\dim V=2$ のとき，$\Pi_m-\bar{P}_m$ は，どんな量で表示されるのだろうか？

補題1．$p\in D$ をとり，$n=e(p,D)$（Dのpでの重複度）とおく．$\bar{S}=\bar{V}$，μ: $\bar{S}_1=Q_p(\bar{V})\to\bar{S}$ とかくとき，

$$K(\bar{S}_1)+\mu^{-1}(D)=\mu^*(K(\bar{S})+D)-(n-2)E,$$

$E=\mu^{-1}(p)$とした．$D_1=\mu^{-1}(D)$とおき，さらに，μ^*GをGと略記する．

$$\tilde{\mu}:\ \bar{S}_\ell\to\bar{S}_{\ell-1}\to\cdots\to\bar{S}_1\to\bar{S}_0=\bar{S}$$

を2次変換のくり返しとし $D_\ell = \bar{\mu}'(D)$ は，正規交叉型とする。このとき

$$K(\bar{S}_\ell) + D_\ell = K(\bar{S}) + D - \sum (m_j - 2) E_j$$

これは，Dの$\bar{\mu}$による強変換をD^*とおくときの

$$K(\bar{S}_\ell) + D^* = K(\bar{S}) + D - \sum (\nu_j - 1) E_j$$

と似ている。但し，ν_jとm_jは，かなり違うものである。$\{\nu_j\}$は，Dの無限に近い特異点の重複度。それに対し，$\{m_j\}$は，Dの無限に近い第2種特異点の重複度とでもよべるかもしれない。ともあれ，$2\pi(D) - 2 = (K(\bar{S}) + D, D)$ とおくとき，$\bar{S}$が有理曲面なら，

$$\bar{P}_1(\bar{S} - D) = \pi(D) - \sum (m_j - 2)(m_j - 1)/2 \quad [2]$$

これは有用な式である。しかし，

$\bar{P}_2(\bar{S} - D)$ 等は複雑で，一般にキュ−とわかるような量ではなく，随分興味深く，面白い性質がこめられている。

注意．Dを既約とし，$p \in D$ での解析的分枝の数をσ_pとおくとき，$\bar{S}$が有理曲面なら，

$$\bar{P}_1(\bar{S} - D) = g(D) + \sum (\sigma_p - 1)$$

が知られている。ゆえに，

$$\pi(D) - g(D) = \sum (\sigma_p - 1) + \sum (m_j - 2)(m_j - 1)/2.$$

4. D次元 $\varkappa(D, \bar{V})$ は，初等的だが，有用な性質をもっている．復習から始めよう．

$$\varkappa(D, \bar{V}) = \varkappa(ND, \bar{V})$$ が $N>0$ につき成立つ．

ゆえに $D = D_1 + \cdots + D_r$ $(D_j > 0)$ なら，$p_1, \ldots, p_r > 0$ に対して，$N = \max\{p_1, \ldots, p_r\}$ にえらぶと

$$\varkappa(D, \bar{V}) \leq \varkappa(\sum p_j D_j, \bar{V}) \leq \varkappa(ND, \bar{V}).$$

よって $\varkappa(D, \bar{V}) = \varkappa(\sum p_j D_j, \bar{V})$．さらに $\varkappa(D_i, \bar{V}) \geq 0$ を仮定しさえすればよい．

補題 α. $\varkappa(D_1, \bar{V}) \geq 0, \ldots, \varkappa(D_r, \bar{V}) \geq 0$ のとき，$p_1, \ldots, p_r > 0$ について，

$$\varkappa(\sum D_j, \bar{V}) = \varkappa(\sum p_j D_j, \bar{V}).$$

5. 上の補題により，次の SVST を示す．

定理 1. $\varkappa(\bar{V}) \geq 0$ とし D を $\bar{V}$ 上の被約因子．$\rho : \bar{V}^\# \longrightarrow \bar{V}$ を双有理正則で，$\rho^{-1}(D) = \bar{D}^\#$ は正規交叉とし，D^* を D の $\bar{D}^\#$ 内の強変換とする．このとき，

$$\bar{\varkappa}(\bar{V}^\# - D^*) = \bar{\varkappa}(\bar{V}^\# - \bar{D}^\#) = \varkappa(K(\bar{V}) + D, \bar{V})$$

即ち，D の特異性も，$\bar{D}^\#$ の中の例外成分すらも影響してこない．このとき，$(\bar{V}, D)$ について SVST (strong virtual singularity theorem) が成立する，という．

証明. $K(\bar{V}^{\#}) = K(\bar{V}) + R_\mu$ であり R_μ は. μ の例外因子をすべて含むことを思い出しておく. 即ち $\mu^*(D) = D^* + \mathcal{E}$ とかくとき, $N \gg 0$ をえらぶと $\mathcal{E} \le N R_\mu$ になる.

さて

$$\bar{\kappa}(\bar{V}^{\#} - D^*) = \kappa(K(\bar{V}^{\#}) + D^*, \bar{V}^{\#})$$
$$= \kappa(K(\bar{V}) + R_\mu + D^*, \bar{V}^{\#})$$
$$= \kappa(K(\bar{V}) + N R_\mu + D^*, \bar{V}^{\#})$$
$$\geqq \kappa(K(\bar{V}) + \mathcal{E} + D^*, \bar{V}^{\#}) = \kappa(K(\bar{V}) + D, \bar{V})$$

QED

定理2. $\kappa(\bar{W}) \geqq 0$ を $n-1$ 次元, $f: \bar{V} \to \bar{W}$ を全射正則で, その一般のファイバー $F = f^{-1}(w)$ は曲線とする. このとき, D を $\bar{V}$ の因子(被約)とすると,

$$\bar{\kappa}(\bar{V} - D) = \kappa(K(\bar{V}) + D, \bar{V}).$$

証明. $\kappa(F) \geqq 0$ なら Viehweg の定理により, $\bar{\kappa}(\bar{V}) \geqq 0$ が出て, 前定理に帰着される. 即ち $F \simeq \mathbb{P}^1$ のときを考える. $(D, F) = 0$ 又は 1 なら, 証明する式の両辺は $-\infty$ になってしまう. よって $(D, F) \geqq 2$ としてよい. さて, 定理1の証明にでてきた $\mu: \bar{V}^{\#} \longrightarrow \bar{V}$ を利用しよう. $\mu^*(D)$ の $g = f \cdot \mu : \bar{V}^{\#} \longrightarrow \bar{W}$ についての水平成分を H とする. このとき $(H, F) = (D, F) \geqq 2$. ゆえに, m叉の定理によると, [4]

$$\bar{\kappa}(\bar{V}^{\#}-H) \geqq \bar{\kappa}(F-H)+\bar{\kappa}(W) \geqq 0.$$

ゆえに、下で提示される補題によって、

$$\bar{\kappa}(\bar{V}-D)=\kappa(K(\bar{V})+D,\bar{V})$$

をえる。 QED

（このときVSTが成立する、という）

5. bis 2段式補題

補題（第一段）2. 上と同じ記号を用いる。即ち、Dは$\bar{V}$上の被約因子。$\mu^{-1}(D)=D^{*}+E$ と分割するとき、次の2条件を仮定する。

i) $\bar{\kappa}(\bar{V}^{\#}-D^{*}) \geqq 0$,

ii) $N \gg 0$ があり、$\mu^{*}(D) \leqq D^{*}+NE$.

このとき、

$$\bar{\kappa}(\bar{V}-D)=\kappa(K(\bar{V})+D,\bar{V})$$

証明. $\bar{\kappa}(\bar{V}-D)=\kappa(K(\bar{V}^{\#})+D^{\#},\bar{V}^{\#})$

$=\kappa(K(\bar{V}^{\#})+D^{*}+E,\bar{V}^{\#})$

$=\kappa(K(\bar{V}^{\#})+D^{*}+NE,\bar{V}^{\#})$

$\geqq \kappa(K(\bar{V}^{\#})+\mu^{*}D,\bar{V}^{\#})=\kappa(\mu^{*}(K(\bar{V})+D)+R_{\mu},\bar{V}^{*})$

$=\kappa(K(\bar{V})+D,\bar{V})$. QED

補題（第2段）3. 上記で、$\mu^{-1}(D)$は正規交叉を仮定しない。しかし、i)の代りに

ii)* $\kappa(K(\bar V^{\#})+D^{*}, \bar V^{\#}) \geq 0$

を仮定し、結論も

$$\kappa(K(\bar V^{\#})+D^{\#}, \bar V^{\#}) = \kappa(K(\bar V)+D, \bar V)$$

にとどめる.

証明は全く同じなのである

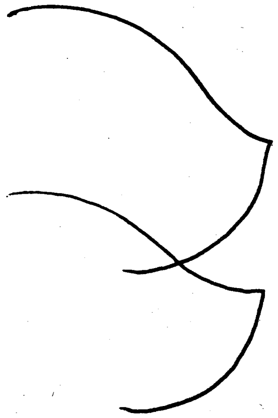
6. さて, $\bar V = \bar S$ を曲面とする. $\bar S$ が有理曲面でないとき VST の成立することがわかった. 次いで, $\bar S$ が有理曲面でも, Dの成分に, 非有理曲線があれば, 直ちに第一段の補題が使えて VST が成立する. よって, Dは有理曲線からなる, としてよい. 今度は, Dの特異点の綾(アヤ)なすグラフ的構造が, $\bar\kappa(\bar S - D)$ を定めていくのである. 但し, ここのグラフは, 第三種のグラフとでもいうべきもので, 第二種グラフとの遭遇は仲々定りあるものなのである. それから, えられる結論を先取りしておこう

$\bar S$ は有理曲面, D は有理曲線よりなる被約因子としたとき.

定理A.

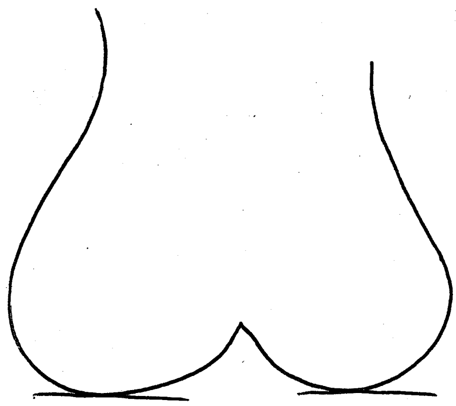
なら $\bar P_2(\bar S - D) \geq 1$,

定理（Zelphice）B.



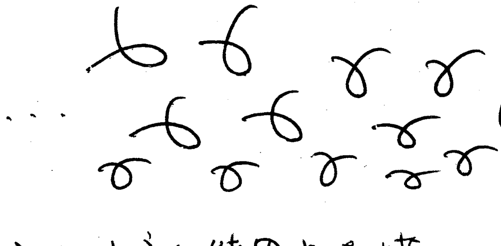
ならば $\bar{\kappa}(\bar{S}-D)=2$.

定理 C.



ならば $\bar{\kappa}(\bar{S}-D)=2$.

定理 D.



$(n \geqq 13)$ ならば $\bar{\kappa}(\bar{S}-D)=2$.

このように特異点を描くのは限り無い．簡易化のためには正規交叉型の一歩手前でやめることが望ましい解決を与える.

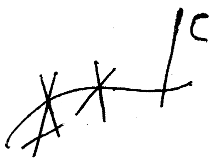
7. Dを有理曲線よりなる被約因子とするとき、Dの特異性が通性的なら、Dを第3種境界とよぶ。Dがpで通性的、を定義しておこう。pを通るDの解析的分枝は皆pで非特異、かつ、それらの接線は相異なるとき、Dはpで通性的という。

第3種境界には、グラフ*が対応する。さて、グラフΓに次のように、m種数 $P_m(\Gamma)$ と小平次元 $\kappa(\Gamma)$ を定義しよう。

$$P_m(\Gamma)=\min\left\{\bar{P}_m(S-D)\ ;\ S\text{は有理的},\ \Gamma=\Gamma(D)\right\},$$

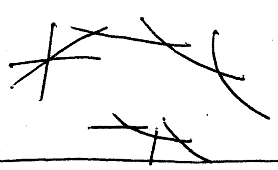
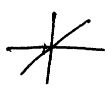
$$\kappa(\Gamma)=\min\left\{\bar{\kappa}(S-D)\ ;\ \text{同上}\right\}.$$

さて、Γの端成分とは次のようなCの事である。即ち、Γ



$=\Gamma(D)$ と表わすとき、$D=D^*+C$ とかけば、$(D^*, C)=1$ となるCをさす。$\Gamma_1=\Gamma(D^*)$ を2次変換してΓをえる、といういい方をする。2次変換してえられるΓと Γ_1 は、互いに双有理同値という。更に、Γの孤立成分Cとは $\Gamma=\Gamma(D)$ とかき $D=D'+C$ とするとき $C\cap D'=\phi$ となるようなΓをさす。そして、やはり、$\Gamma(D)$ と $\Gamma(D')$ は双有理同値という。

例

 と  とは双有理同値

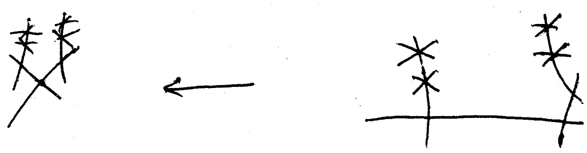
* Dの各成分の交叉のみに着目して、それをグラフという

定義から容易に,

命題1. $P_m(\Gamma)$ と $\kappa(\Gamma)$ は Γ の双有理不変量である.

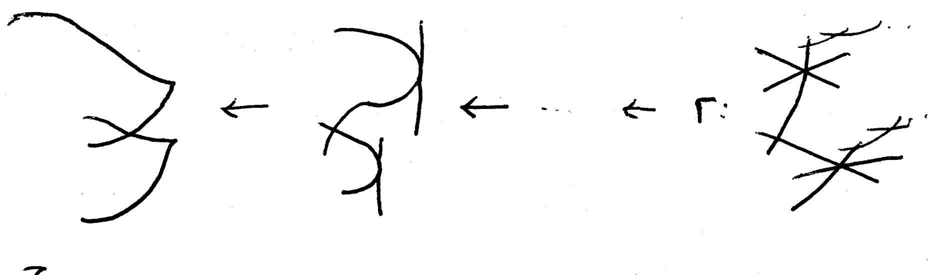
2 Dの重複点を中心にする, 通常の2次変換ではグラフの形が変りすぎるので, これはいれない. 但し, グラフを, weight つきに考えるなら これらもとり扱えるが, 実用的にならぬ複雑さが入りこんでしまう.

オ3種境界の2重点を中心に2次変換するとき, 例えば,

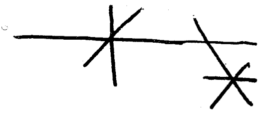


の如くである. このときも, P_m と κ は不変であると想像されるが, よくわからない. 実用的には, 2重点をつなぎ, サイクルを構成しない, 成分は, 一点に縮めてよいことがわかる.

例



よって

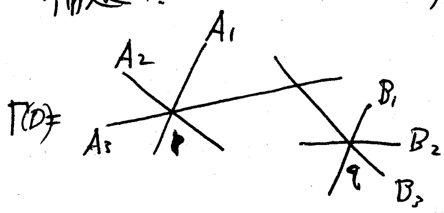


を, グラフΓの双有理同値類にえらべる. Zelprice の定理を示

すには，次の補題を示せばよい．

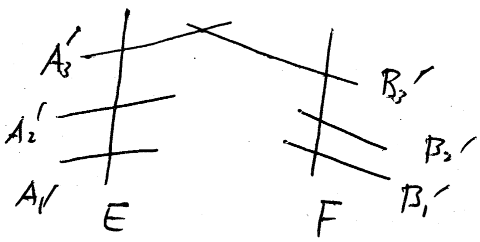
補題4． 左のΓについて，$P_2(\Gamma)=1$，$P_3(\Gamma)\geqq 2$，

$$\kappa(\Gamma)=2,\quad P_1(\Gamma)=0.$$



証明．図のように記号を入れて，p，qで2次変換し，図の如くの記号を用いる．$m_p=m_q=3$ なので，前の補題により

$$K(\bar{S}^{\#})+D^{\#}=K+D-E-F.$$



さて，$\tilde{A}=\sum A_i$，$\tilde{B}=\sum B_i$

とおくと

$$\pi(\tilde{A})=\pi(\tilde{B})=1.$$

一方，$\bar{S}$は有理曲面だから，$\dim|K(\bar{S})+\tilde{A}|=\pi(\tilde{A})-1=0$，$\dim|K(\bar{S})+\tilde{B}|=\pi(\tilde{B})-1=0$． よって，$X\in|K(\bar{S})+\tilde{A}|$，$Y\in|K(\bar{S})+\tilde{B}|$ をえらぶと，

$$X+Y\sim 2K+\tilde{A}+\tilde{B}$$ さて，

$$2(K(\bar{S}^{\#})+D^{\#})\sim X+Y+\tilde{A}+\tilde{B}-2E-2F$$
$$\sim X+Y+E+F+\tilde{A}'+\tilde{B}'.$$

よって $\bar{P}_2(S)\geqq 1$．（$S=\bar{S}-D$ とした）

さらに，$2X+Y\sim 3K+2\tilde{A}+\tilde{B}$ なので

$$3\,K(\bar{S}^{\#})+D^{\#}\sim 2X+Y+\tilde{A}+2\tilde{B}-3E-3F$$
$$\sim 2X+\tilde{A}'+Y+\tilde{B}'+\tilde{B}\geqq X+\tilde{B}.$$

ゆえに

$$\bar{P}_g(S) \geq \dim|X+\bar{B}|+1 = \pi(\bar{A}+\bar{B}) = 2.$$

所で，$\bar{\kappa}(S)=1$ とすると矛盾することがわかる．なぜなら，$\kappa(K(\bar{S}^{\#})+D^{\#}, \bar{S}^{\#})=1$ のとき，$m>>0$ があり，$|m(K(\bar{S}^{\#})+D^{\#})|$ が，1次束 $\{\Gamma_u\}$ を与える．すると，

$\Gamma_u^2=0$，$(K(\bar{S}^{\#})+D^{\#}, \Gamma_u)=0$．ゆえに，

$$(2X+\bar{A}'+Y+\bar{B}'+\bar{B}, \Gamma_u)=0.$$

これにより $(E, \Gamma_u)=(F, \Gamma_u)=(A_i', \Gamma_u)=(B_j', \Gamma_u)=(K+\bar{A}, \Gamma_u)=(K+\bar{B}, \Gamma_u)=0$ をえる．$K=K(\bar{S}^{\#})-E-F$ なので，$(K(\bar{S}^{\#}), \Gamma_u)=0$．よって，$\Gamma_u$ は楕円曲線であり，$(D, \Gamma_u)=(\bar{A}'+E+\bar{B}'+F, \Gamma_u)=0$ もわかるから $\Gamma_u \cap D=\phi$ をえる．即ち，D は楕円曲面の特異ファイバーに入る．それは，小平によって分類されていて，D の形のものがでてこないことを知る．

QED

同様にして，

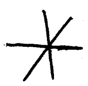
補題5．G_n' $\ast \cdots\cdots \ast$ (n 個の非連結和)．

$2 \leq n \leq 6$ なら $\kappa(G_n')=1$，

$n \geq 7$ なら $\kappa(G_n')=2$．

これをみるには，有理楕円曲面の特異ファイバーを調べねばならぬ．

$\overline{S}$ をファイバーに例外曲線のない有理楕円曲面としよう。すると、Euler 数 $\chi(\overline{S})=12$。一方，特異ファイバーで正規交叉でないものは次の型に限る。

C_a	$\chi(C_a)$	名前
	2	II
	3	III
	4	IV

く の特異ファイバーなら $2\times6=12$ だから高々6本入りうる。しかもそのような例は、basic member として容易に構成できる。（藤田氏、水上氏に教わった）

8. 第3種グラフの分類は、正則曲面の分類と似ている。

$\overline{S}$ を完備の曲面で，$q(\overline{S})=0$ と仮定する（このとき、正則曲面という）

次の定理が示されている。

定理（Castelnuovo）.

$$P_2(\overline{S})=0 \Rightarrow \overline{S} \text{ は有理曲面} \Rightarrow \varkappa(\overline{S})=-\infty \Rightarrow P_2(\overline{S})=0$$

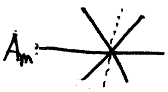
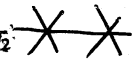
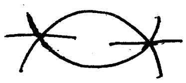
定理（Enriques）.

$$P_1=0,\ P_2=P_4=1 \Rightarrow \overline{S} \text{ は Enriques 曲面} \Rightarrow \varkappa(\overline{S})=0,\ P_1=0.$$

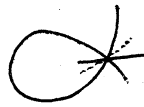
定理（Enriques）.

$p_1 = P_K = 1 \Rightarrow \bar{S}$ はK3 $\Rightarrow \kappa(\bar{S}) = 0,\ p_1(\bar{S}) = 1 \Rightarrow \cdots$

第2種グラフ Γ について次の事が示される.

1. $P_2(\Gamma) = 0 \Rightarrow A_n$  $\Rightarrow \kappa = -\infty$,
2. $p_1 = 0,\ P_2 = P_K = 1 \Rightarrow G_2$  $\Rightarrow \kappa = 0,\ p_1 = 0$.
3. $p_1 = P_K = 1 \Rightarrow \Gamma_4$  $\Rightarrow \bar{\kappa} = 0,\ p_1 = 1$.

or

B_ν  ν本 $(\nu \geqq 0)$

このようにして, 代数曲面の分類論の完全な類似がグラフについても成立するのである. そのような意外性を考慮に入れて, 第3種グラフとの遭遇といったのである.

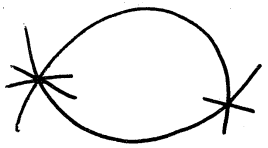
9. グラフの分類子は決して無用ではない。例えば、次の定理がでてくる。

定理3（2種数定理）. $NN(D)=\{x \mid D$ は x で正規交叉でない$\}$ とおく。$\# NN(D)\geq 2$ なら $\overline{P}_2(\widetilde{S-D})\geq 1$.

定理4（4種数定理）. $\# NN(D)\geq 2$ のとき、$NN(D)=\{p,q\}$ であって、かつ p, q が一つの既約成分上にあるときを除くと $\overline{P}_4(\widetilde{S-D})\geq 2$. 特に $\overline{\kappa}(\widetilde{S-D})\geq 1$.

4種数定理を3種数定理に改良するには次の問をとく必要がある。

問

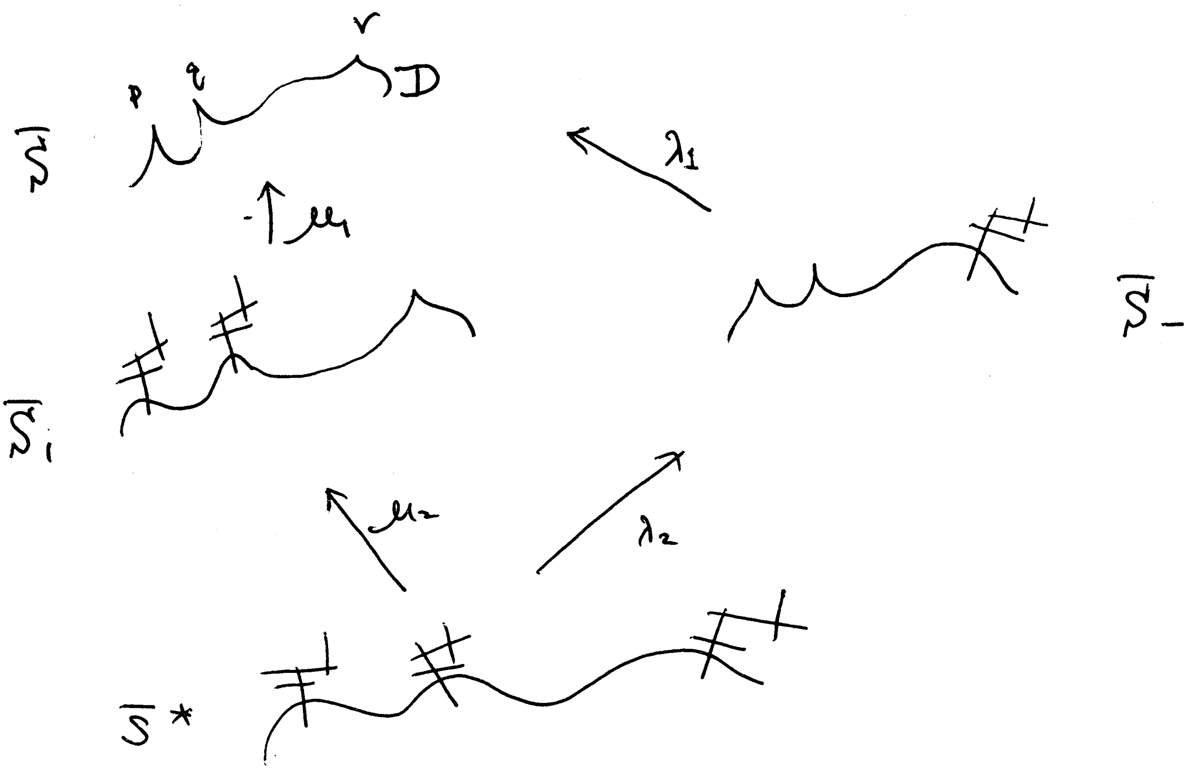
Γ:  のとき $\overline{P}_3(\Gamma)\geq 2$ か？

注. $\overline{P}_4(\Gamma)\geq 2$ は証明されている。又 $\overline{\kappa}(\Gamma)=1$ である。

2種数定理を応用して、次の VST をえる。

定理5. $\# NN(D)\geq 3$ なら VST が成立つ。

証明. 便宜上、$p\ q\ r$ が3点との図をかくが、実はこのとき $\overline{\kappa}=2$ だから VST は自明。さて $\{p, q\}$ $\{r, \dots\}$ とに2次変換のくり返しを2様に行なう。$\mathcal{E}_p, \mathcal{E}_q, \mathcal{E}_r \cdots$ を p, q, r に応じて



例外成分の和としよう. $\lambda_1^{-1}(D) = D_1 + \mathcal{E}_r$ とおく. 2種数定理により $\bar{\kappa}(\bar{S}_- - D_1) \geq 0$. さて $\mathcal{D} = \mu_1^{-1}(D) = D_2 + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_q$ とおくと, $\pi(D_2) \geq 1$. 即ち $\kappa(K(\bar{S}_1) + D_2, \bar{S}_1) \geq 0$. 第2補題により

$$\kappa(K(\bar{S}) + D, \bar{S}) = \kappa(K(\bar{S}_1) + \mu_1^{-1}(D), \bar{S}_1).$$

さらに, $\mu_2^{-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_1 + \mathcal{E}_r$ とおくと, $\lambda_2^{-1}(D_1) = \mathcal{D}_1$. よって $\kappa(\bar{S}^* - \mathcal{D}_1, \bar{S}^*) = \kappa(\bar{S}_- - D_1) \geq 0$. 即ち, 第1補題を使えて

$$\bar{\kappa}(\bar{S} - D) = \kappa(K(\bar{S}_1) + \mu_1^{-1}(D), \bar{S}_1).$$

前の式と合せて,

$$\bar{\kappa}(\bar{S} - D) = \kappa(K(\bar{S}) + D, \bar{S})$$

となる. QED

このようにして，2段階に分離して考えることも有用なのである．

10. 今後の問題として，面白そうなのは，高次元への一般化を試みることであろう．

$\bar{V}$ を n 次元有理多様体，$\bar{W}$ を $n-1$ 次元の素因子とする．

1) $\bar{\kappa}^{\#}(\bar{W}) \geq 0$ なら $\bar{\kappa}(\bar{V}-\bar{W}) \geq 0$ か？

2) $\bar{\kappa}^{\#}(\bar{W}) = n-1$ なら $\bar{\kappa}(\bar{V}-\bar{W}) \geq n-1$ か？

これらは，$n=2$ なら示されている．とくに，$\bar{V}=\mathbb{P}^n$ として，

2)' $\bar{\kappa}^{\#}(\bar{W}) = n-1$ なら $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^n-\bar{W}) = n$ 又は $\bar{q} \geq 2$？

も問かけておこう．これができれば，若林の定理の一般化として申し分ない．

ついで，グラフ論も高次元に一般化さるべきだろう．

このようにして，local-global な特異点の形状が，基本的視点を失うことなく研究されていく．対数的小平次元の灯台的役割は無視できないと信ずる．

11. <u>キャンディーズの問題</u>　$\mathbb{P}^2$ 内に既約曲線 C_s, C_m, C_ℓ があり $\mathbb{P}^2 - C_s \cup C_m \cup C_\ell = \mathbb{C}^{*2}$ とする．このとき C_s, C_m, C_ℓ を求めるのが，いわゆるキャンディーズの問題である．

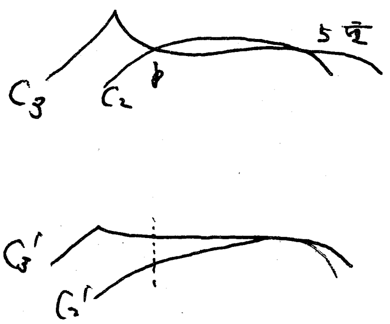
それらは，有理曲線で，特異点は，あったとしても高々1

個数のだ。そして、この特異点は共有される。これは Zelphice の定理の系とみなされる。

C_p が非特異（$\deg C_p \leq \deg C_m \leq \deg C_\ell$ と関係づけられているのは当然！）のとき、$\deg C_p = 1$ であり、座標変換して、$\deg C_m = 1$ にできる。そして $C_\ell = \overline{T}_\varphi$, $\varphi = f(x)/x^m$ になるのである。

この問題の詳しい研究は他に発表されるであろう。

12. Ramanujam の問題



左の如き 2次、3次曲線があり、$Q_p(\mathbb{P}^2)$ での強変換を C_2', C_3' とする。$S = Q_p(\mathbb{P}^2) - C_2' \cup C_3'$ を Ramanujam の曲面という。$S \times \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}^3$ と homeo. は知られている。しかし、$\overline{P}_{a,b,c}(\mathbb{C}^3) = 0$ だから $\overline{\kappa}(S) \geq 0$ さえしれば、$S \times \mathbb{C}$ と $\mathbb{C}^3$ は代数的に同型でないことが直ちにわかる。これは、2種数定理が直接使える例で、$\overline{\kappa}(S) \geq 0$。しかし、もう少し詳しく $\overline{\kappa}(S) = 2$ が示されていた（M.又. 藤田[1]）。$\overline{\kappa}(S) = 2$ のとき $\mathbb{C}^2 \to S$ への non-deg. 解析的正則写像はない（酒井の定理）。ゆえに、$S \times \mathbb{C}$ と $\mathbb{C}^3$ は解析的双正則同値でないことがわかった。このように $\overline{\kappa}$ は極めて有用なのだ。

13. 若林の定理の逆の成否も面白い問である。即ち

$C \subset \mathbb{P}^2$, $C - (p) \simeq \mathbb{A}^1$（尖点1個の有理曲線）とする

このとき $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = -\infty$ となるか？

$e(p, C) = 2$ とすると、$\deg C \leq 5$ のときのみ $\bar{\kappa} = -\infty$.

$\deg C \geq 6$ なら $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) \geq 0$（とくに 2）.（吉原）

$\deg C = 6$ とすると、p に無限に近い特異2重点が9個もある。

さらに、$\deg C = 5$ として $\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) \leq 0$ となる C をすべて求めることも完了していない。$\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - C) = 0$, $\bar{p}_g = 0$ のときが仲々難しい。

ともあれ、平面有理曲線の研究も新しい観点から、再開されるべきである。$\bar{\kappa}$ の方法はやっかいでも結論は単純明解なことが保証される。

[1] 飯高 茂； Some applications of logarithmic Kodaira dimension, Proc. Int. Sym. Alg. Geo. Kyoto 1977.

[2] 〃 ； Virtual singularity theorem and logarithmic bigenus theorem, preprint.

[3] 〃 ； On Kodaira dimension of graphs. P. J. A

[4] 川又雄二郎； Addition theorem of log. Kodaira dimension.

(5) 若林 功， On log Kodaira dim of complements of curves. P.J.A

（4月20日）