

新しい離散化モデルについて

東大生研 川井忠彦

はしがき

固体力学 非線形問題と粘性流れ問題等の有限要素解析の問題点について論じ、その難問題を解決する一つの方法として物理的考察に基づく新しい要素モデルと、それによる非線形解析の実用化を提案する。

予めお断りしておきたいことは著者は数学の専門家でない。従って、本セミナーの意図するような数学的論文は書く能力も資格もないが、工学者の側から非線形問題解析の実用化のために最近著者の考えている所を披露し、御意見と併せてその数学的基礎づけに助言を賜りたいと思ひ筆をとった次第である。

1. 固体力学 非線形問題の特質と新しい物理モデルの提案

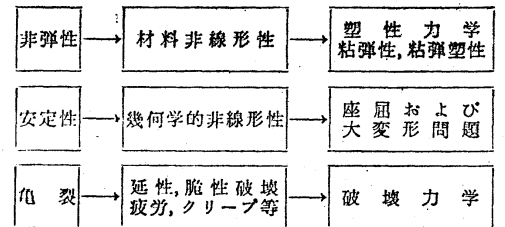
一般に固体力学の非線形問題は、本質的に才1図に示すような3つの大きな非線形問題が連成した問題であると考えられる。

才1の問題は、材料が非弾性的挙動する場合の問題で学問的には材料非線形問題 (material nonlinearity problems) と呼

ばれ、従来の塑性学と粘弾性、粘弾塑性学で取り扱われる問題である。才2の問題は、座屈 (buckling) と大撓みの問題で、幾何学的非線形問題 (geometrical nonlinearity problems) と呼ばれ、有限変形弾性論の守備範囲である。才3の問題は、亀裂 (crack) の発生および成長の問題で、いうまでもなく延性、脆性破壊と疲労、クリープ等いわゆる破壊力学 (fracture mechanics) の問題である。

従って構造物の最終強度問題を正面から取扱おうと思えば、どうしてもこれら3つの非線形性が複合連成した問題を取扱わざるを得ないことは明らかであり、有限要素法の最も進んだ手法をもってしても、その解明は極めて困難である。

著者は、構造非線形問題を解決する道は、新しい要素モデルの開発において外にはないと確信し、数年前から現状の数学モデルより物理モデルの開発へと発想の転換を試みてきた。



才1図 構造非線形問題の本質

その結果得られたものがここに紹介する“剛体-バネ”モデルである。

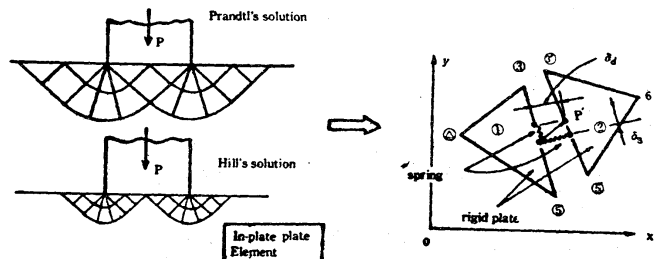
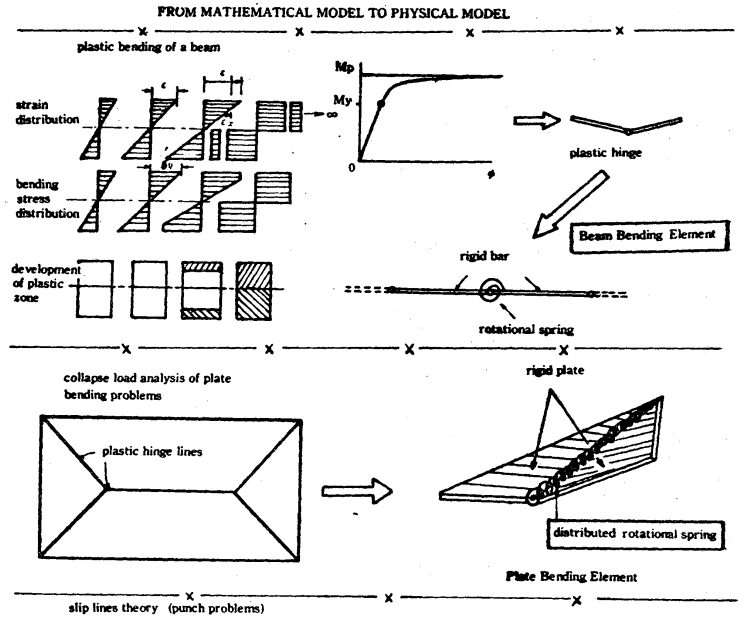
以下に、この新しいモデルの構想をいかにして得たか才2図を用いて説明する。

才2図の一番上の図は集中荷重を受ける梁の塑性曲げの理論を説明したものである。荷重が小さいうちは梁は弾性変形をし、その歪みは梁全体に分布する。ところが荷重が次第に大きくなって断面で降伏が始まるとモーメント曲率曲線は急激に曲がり出す。そして全面降伏状態に達すると塑性関節(plastic hinge)が発生し、最終的にはメカニズム(mechanism)を形成して崩壊(collapse)する。この崩壊状態のとき梁は、あたかも剛棒が塑性関節で連結されたリンク機構の状態になる。

それならば初めから梁をいくつかの短い剛棒を関節で継ぎ、各節点には相隣る剛棒の角変位に抵抗する回転バネを取り付けたモデルを考え、このバネに完全弾塑性体の応力-歪み関係を与えれば、上に説明した塑性崩壊を完全に表現し得るのではなからうか？ この様なモデルで解析した結果は梁の塑性崩壊を完全にシミュレート出来ることを示した。

次に、コンクリートスラブの横荷重による崩壊問題を考えてみる。この場合も荷重が小さいうちはスラブは弾性平板

の曲げ理論に従って撓み, 歪みはスラブの内部に分布するが, 荷重が次第に増大するに従って降伏が始まり, 亀裂線(塑性設計的に言えば塑性ヒンジ線)が発達して, 歪みは次第に塑性ヒンジ線を含んだ狭い領域に集中してくる。



※2図 剛体-スプリング要素 (Rigid Bodies-Spring Model) の構想

そして図示のような塑性関節線が完成するとメカニズムになり, 塑性ヒンジ線に沿って連結された4枚の剛板の集合体のような形をとりながら崩壊して行くのである。これが平板の塑性崩壊である。このような平板の挙動は図中に示した剛板要素を境界边上のヒンジで連結し, 相隣る剛板要素同士の間変位に抵抗する回転バネを連続的に分布した集合体の挙動に理想化されるであろう。以上のように考えて梁と平板の曲げ変形に対する“剛体-バネ”モ

デルの構想を得たわけであるが、最後に塑性加工におけるポンチの押込み問題を考えてみよう。図中にはこの問題に対する Prandtl と Hill の求めた切り線理論 (slip line theory) の解がのせてあるが、いずれの解も同じ限界荷重を与えるのである。この問題の解における切り線は、その切線方向に物体の実質部が互に剛体変位 (切り) を生ずることを示している。

そこで著者は与えられた領域を適当にメッシュ分割しその分割された要素は剛体として、その境界辺に沿って変位 (δ_n, δ_s) に抵抗するバネ系を連続的に分布させた面内変形モデルの構想を得たのである。このように得られた“剛体-バネ”モデルの3次元モデルへの拡張は容易である。

すなわち、対象物をオの図に示すごとく有限個の任意形状の微小要素に分割し、それ自身は剛体であると考え、要素同士はその境界面上に連続的に分布しているバネによって連結され、これらのバネの変形によって固体の変形や内力の伝達が行われるものと仮定するのである。そうすると、要素の変位はその重心の剛体変位 (一般にも成分) だけで記述され、要素間の相対的変位が許されることになり、塑性変形や接触問題の本質である境界面上での切り (slip) の表現で可能になってくる。

以下にこの最も一般的な3次元“剛体-バネ”モデルについて概要を記することにする。

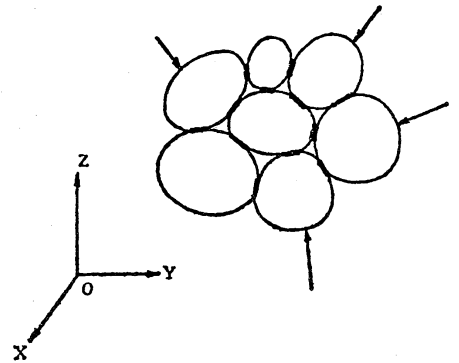


図3 3次元剛体要素の集合モデル

2. 新しい離散化モデル の理論的基礎

いま図3に示したような沢山の3次元剛体要素の集合体のうちから代表的な2つの互に接触している要素をとり出して考える。この場合要素の接触面は既知であると仮定する*。そしてこの接触境界面上の任意点の相対変位を拘束する2種のバネ k_n, k_s を連続的に分布させたモデルを考える。

さて剛体の運動から、任意物体の重心 G の並進変位ベクトル u_G 、そのまわりの微小回転ベクトル θ とすれば、物体内の任意点の変位ベクトル u は次式で与えられる。

$$u = u_G + \theta \times (r - r_G) \quad (1)$$

ここに $(r - r_G)$ は重心 G に関する任意点の位置ベクトルを表わす (図4参照)。

さて外荷重の作用により、2つの要素 (I), (II) はそれぞれ (u_1, θ_1) , (u_2, θ_2) の重心変位をすると仮定すると、各剛体要素上の任意点 O の変位 u' および u'' はそ

* 実際の問題では接触問題となるので、接触面は予めわかっていないから繰返し法による解析が不可避となる。

れぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_1 + \theta_1 \times (r - r_1) \\ u'' &= u_2 + \theta_2 \times (r - r_2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

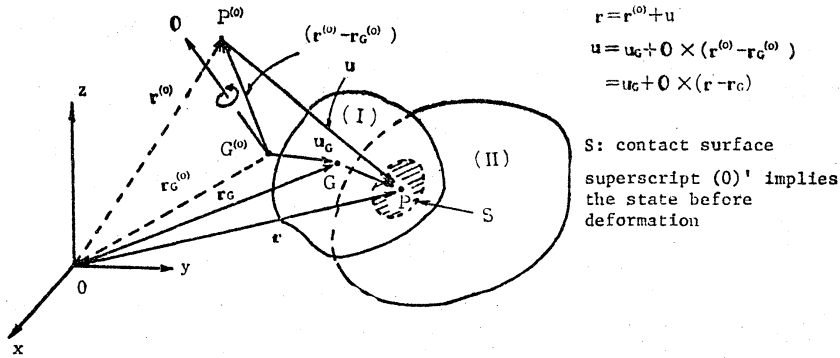


図4 3次元剛体-バネモデル

ここに

$$\left. \begin{aligned} u_i &= (u_i, v_i, w_i) & u_2 &= (u_2, v_2, w_2) \\ \theta &= (\theta_i, \phi_i, \chi_i) & \theta_2 &= (\theta_2, \phi_2, \chi_2) \\ u' &= (u', v', w') & u'' &= (u'', v'', w'') \\ r - r_i &= \{(x - x_i), (y - y_i), (z - z_i)\} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

従って、要素 (I), (II) の接触境界面上の点 P の変形後の位置を、それぞれ P', P'' とすれば、P 点の相対変位ベクトルは次式により与えられる。

$$\overrightarrow{P'P''} = u'' - u' \quad (4-a)$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -(z-z_1) & (y-y_1) \\ 0 & -1 & 0 & -(z-z_1) & 0 & -(x-x_1) \\ 0 & 0 & -1 & -(y-y_1) & (x-x_1) & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \phi_1 \\ \chi_1 \end{array} \right\} \\
 \parallel & \\
 \{ \delta \} & \\
 & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & (z-z_2) & -(y-y_2) \\ 0 & 1 & 0 & (z-z_1) & 0 & (x-x_2) \\ 0 & 0 & 1 & (y-y_2) & -(x-x_2) & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \phi_2 \\ \chi_2 \end{array} \right\} \\
 \parallel & \\
 [B] & \\
 & \{ u \} \quad (4-b)
 \end{aligned}$$

あるいは簡潔に

$$\{ \delta \} = [B] \{ u \} \quad (4-c)$$

のように書くことができる。

ここに

$$\delta_x = u'' - u', \quad \delta_y = v'' - v', \quad \delta_z = w'' - w' \quad (4-d)$$

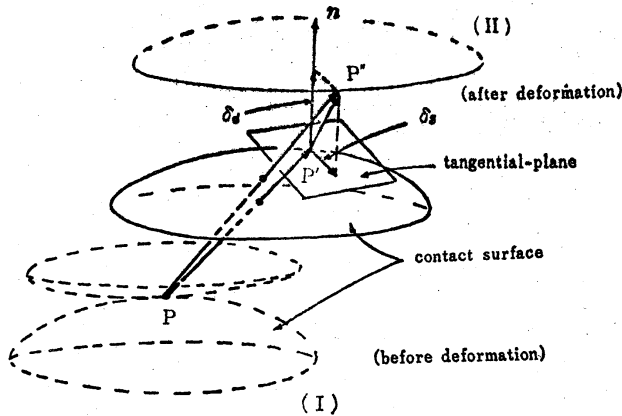
である。

次に、Fig. 5 に示す様に P 点において接触面に立てた外向き単位法線ベクトルを n で表わすと、相対変位ベクトル $\overrightarrow{P'P''}$ の法線成分 δ_n は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \delta_n &= (\overrightarrow{P'P''}; n) \\
 &= l(u'' - u') + m(v'' - v') + n(w'' - w') \quad (5)
 \end{aligned}$$

ここに

$$n = (l, m, n)$$



※5図 剛体要素(I),(II)の接触面上の一点Pの相対変位

同様にしてその切線成分 δ_s は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\delta_s^2 &= |\mathbf{n} \times \overline{P'P''}|^2 \\ &= \{m(w''-w') - n(v''-v')\}^2 + \{n(u''-u') \\ &\quad - l(w''-w')\}^2 + \{l(v''-v') - m(u''-u')\}^2\end{aligned}\quad (6)$$

以上において求めた P 点の相対変位成分 (δ_n, δ_s) を用いて接触面 S 上の分布バネ系に貯えられる歪エネルギー V は次式の如く求められる。

$$V = \frac{1}{2} \iint_S (k_n \delta_n^2 + k_s \delta_s^2) dS \quad (7-a)$$

ところで境界面上のバネ系に貯えられる歪エネルギー密度は次式の如く表わされる。

$$\frac{1}{2} (k_n \delta_n^2 + k_s \delta_s^2) = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [D] \{\delta\} \quad (7-b)$$

ここに

$$[D] = \begin{bmatrix} k_n l^2 + k_s (1-l^2) & (k_n - k_s) l m & (k_n - k_s) n \\ (k_n - k_s) l m & k_n m^2 + k_s (1-m^2) & (k_n - k_s) m n \\ (k_n - k_s) l n & (k_n - k_s) m n & k_n n^2 + k_s (1-n^2) \end{bmatrix} \quad (7-c)$$

である。

従って (7-c) 式を (7-a) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \iint \{\delta\}^T [D] \{\delta\} dS \\ &= \frac{1}{2} \iint \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} dS \\ &= \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} \end{aligned} \quad (8-a)$$

となり、 V は 2 つの接触固体 (I), (II) の変位ベクトル $\{u\}$ 12 の変位成分をもつ 2 次形式で表わされることになる。

$$\therefore [K] = \iint [B]^T [D] [B] dS \quad (8-b)$$

である。

故に、Castigliano の定理から次のような剛性方程式が導ける。

$$R = \frac{\partial V}{\partial u} = Ku \quad (9-a)$$

∴

$$R^T = [X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1; X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2] \quad (9-b)$$

導かれる剛性マトリックス K は (12×12) の対称マトリックス

クスとなる。その詳細は文末の参考文献を参照されたい。
バネ定数 k_n および k_s は、歪成分の定義式を差分表示した式を用い、次のようにして決定することができる。

Fig. 5 の接触境界 S 上で法線応力、接線応力をそれぞれ σ_n , τ_{ns} とすれば、これらは次式を満足する。

$$\sigma_n = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_n, \quad \tau_{ns} = G \gamma_{ns} \quad (10)$$

ところが歪成分 ϵ_n および γ_{ns} は次のような差分式で近似的に表わすことができる。

$$\epsilon_n = \frac{\delta_n}{h}, \quad \gamma_{ns} = \frac{\delta_s}{h} \quad \because h = h_1 + h_2 \quad (11)$$

で h は重心を結ぶベクトル $\overrightarrow{G_1 G_2}$ の n 上への正射影を表わす。

一方バネ定数の定義から次の様な関係式が得られる

$$\sigma_n = k_n \delta_n, \quad \tau_{ns} = k_s \delta_s \quad (12)$$

従って (10) と (12) 式を比較し (11) 式を参考にすれば、容易に次式が得られる。

$$k_n = \frac{E'}{h}, \quad k_s = \frac{G}{h}, \quad \because E' = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (13)$$

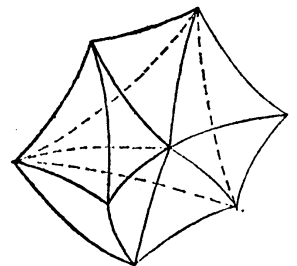
(9) 式は 2 つの要素の間の ある 接触境界面について立てら

れた剛性方程式であるから、要素 (I) 他の要素といくつかの境界面で接触しているとすれば、それぞれの接触面で剛性方程式が立てられる。従って有限個の剛体要素からなる集合体全体の剛性方程式は、それらの剛性方程式を一定のルールで加え合せ、次の様な剛性方程式が最終的に求められることになる。

$$\left. \begin{aligned} KU &= \bar{F} \\ \text{ここに } K &= \sum k, \quad U = \sum u, \quad \bar{F} = \sum \bar{f} \\ &(\bar{F} \text{ は外荷重ベクトルである}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(14)式の作成に当って注意すべきことは、この離散化モデルにおいてその節点が要素の重心にとられているので、従来の有限要素法で行なわれている様な剛性方程式の重ね合せの思想はない。また、この要素モデルは形状は全く任意であり、要素間の隙間があっても構わないが、もし隙間が全く存在しなければ、そのモデルは3次元物体のある離散化モデルを表わしたことになる(※6図参照)。

以上の理論は微小変形弾性論の枠内での議論であるが、この要素を用いて以下の様に非線形問題の解析の道が開かれた。



※6図 3次元解析における4面体要素

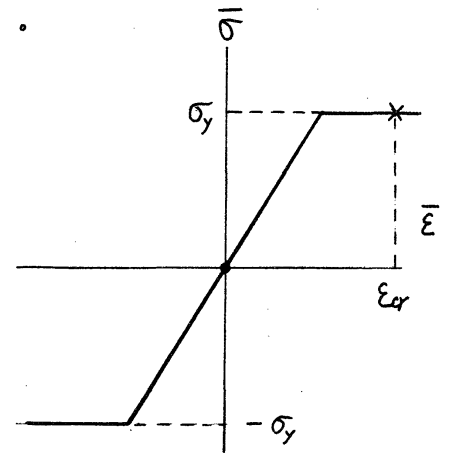
(a) 材料非線形問題の解析

バネに貯えられる歪エネルギーの密度は(7-a, b)式よりわかるように $\frac{1}{2} (k_n \delta_n^2 + k_s \delta_s^2)$ である。従って材料の降伏条件として最大歪エネルギー説あるいは八面体剪断応力説等を取り、それらの降伏関数を塑性ポテンシャルとして既に確立されている非弾性問題の有限要素解析法を導入することができる。都井は Tresca の降伏条件を用い平面歪問題の解析を試み、2次元ブロックの圧壊、ポンチの押込み問題、深い切欠を有する平板の引張り破壊等の問題を解析し、迂り線理論に基づく解と標準的な有限要素法に基づく解析結果と比較して良好な一致を見た。また近藤、川端、熊谷らは標準的な非弾性問題の有限要素解析のスキームが適用できるように

バネ剛性の定義の修正を試み、平面応力場と3次元応力問題の弾塑性解析プログラムを開発した。そしていくつかの切欠平板の引張り強度と3次元ブロックの圧壊、スリットクラックの引張り問題を解析し、その実用性は略確認された。これまで試験的に解かれたいくつかの問題の解析結果から判断すると降伏条件と構成方程式のとり方が解の最終結果にはそれ程本質的な影響を与えないと思われるので、現在の所計算された応力場から相当応力 $\bar{\sigma}$ あるいは相当歪 $\bar{\epsilon}$ を求め、材料は完全弾塑性であるとしてFig. 7のときの応力-歪

関係を用いて増分解析を行っている。

この場合要素境界面上の代表点の応力状態で降伏の判定を行っているが、これはメッシュ分割がある程度細かければ妥当な結果を与えるであろう。しかしながら応力分布は場所の関数であり、降伏の判定は境界面上の点毎に行うのが合理的と考えられるので現在解析プログラムを修正中である。



σ_y : 降伏応力
 ϵ_{cr} : 破断時の限界歪

★7図 完全弾塑性体の
 応力-歪関係

(b) クラックおよび接触問題の解析

非弾性解析に関連してクラックの発生、伝播問題を本解析法では次の様に取り扱っている。すなわち、★7図の応力-歪曲線上で図示の如く相当歪 $\bar{\epsilon}$ がある限界歪 ϵ_{cr} に到達するとそのバネは破断したとして除荷することにする。この考え方は破壊力学における COD の考え方と本質的に変わらないものである。この様なバネの破断条件を降伏した要素境界面上のバネに局所的に適用してクラックの発生、伝播をシミュレートして行こうとするのである。

破断したバネにかかっている力を取り除く場合、局所的に力の平衡状態が破れ、更にクラックが進行する様な事態も起り得る。その様な場合計算が不安定になって遂に発散してしまう様なことも起って来るから、解析の方法はかなり慎重に考えなければならぬ。いずれにしてもクラック解析には疲労き裂やき裂の動的伝播問題もあり、解析のアルゴリズムを近い将来根本的に検討する必要がある。また有限要素解析で残された問題の一つに接触問題がある。この問題は予め接触領域がわかっていないので勢い繰返し法 (iteration) を用いざるを得ないが、これを用いたとして摩擦力を考慮に入れて接触面の境界条件は次式のごとく与えられる。

法線応力 F_n に課せられる条件

$$F_n \geq 0 \longrightarrow \text{二物体の接触が起らない。}$$

$$F_n < 0 \longrightarrow \text{二物体が接触する。}$$

接線応力 F_t に課せられる条件

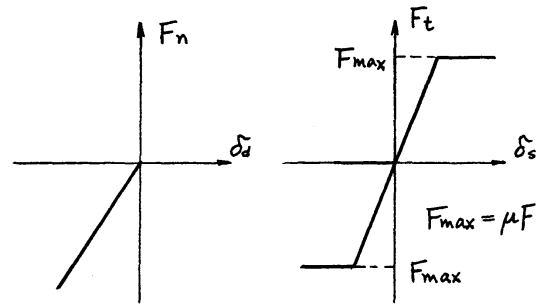
$$F_t < F = \mu F_n \longrightarrow \text{接触面において相対運動はない。}$$

$$F_t \geq F \longrightarrow \text{接触面において滑りが起る。}$$

(15)

従って、問題は接触境界面に沿って第8図で与えられる特別な法線バネ、切線バネ系を有する剛体-バネ集合体の平衡状態を求める問題に帰着されたことになる。

従って反復法を併用して増分解析法を適用すれば接触問題の解析をルーチンワーク化することも夢ではないであろう。その簡単な例題を都井は取扱ってよい結果を得ている。



(a) 法線バネ: $F_n = k_n \delta_n$ (b) 接線バネ: $F_t = k_s \delta_s$

才 8 回 接触問題における接触面上のバネ剛性の与え方

(c) 幾何学的非線形問題

相接する 2 つの剛体-バネ要素が外力の作用を受けて変位する場合、回転変位が微小でなくなると (1) 式で与えられる任意点の変位式は次式で与えられることになる。

$$u = u_G + (T - I)(r - r_G) \tag{16}$$

こゝに u_G は前と同様考えている要素の重心 G の変位ベクトル、 T は重心 G のまわりの変形前および変形後の座標変換マトリックスを表わす。すなわち、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{17-a}$$

or $r' = T r$ (17-b)

(16) 式を用いると (7-a,b) 式で与えられる歪エネルギー式 ∇

の計算は非常に煩雑となるが計算を実行し、仮想仕事の原理に代入すると最終的に次の様な有限変形の場合の平衡方程式が得られる。

$$\sum \iint_{\text{contact surfaces}} ([b_0]^T [k_s] \{\delta\} + [b_1]^T [k_r] \{\Delta\}) ds \quad (18)$$

$$- \sum_{\text{elements}} \left(\iiint [c_i]^T \bar{p}_i dv + \iint [c_i]^T \bar{f} ds \right) = 0$$

こゝに

$$\left. \begin{aligned} \{\delta\}^T &= [u_2' - u_1', v_2' - v_1', w_2' - w_1'] \\ \{\Delta\}^T &= [L_1(u_2' - u_1'), M_1(v_2' - v_1'), N_1(w_2' - w_1')] \\ \{d\}^T &= [u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1; u_2, v_2, w_2, p_2, q_2, r_2] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

こゝに p_i, q_i, r_i ($i = 1, 2$) は i 要素の座標変換マトリックス T の中の3つの独立方向余弦である。

$$\text{また} \quad [b_0] = \frac{\partial \delta}{\partial d}, \quad [b_1] = \frac{\partial \Delta}{\partial d}, \quad c_i = \frac{\partial u_i}{\partial d} \quad (20)$$

式(18)を増分形に書きかへると次の様なよく知られた増分形平衡方程式が得られる。

$$(K + K_0 + K_G) d^* = \bar{F}^* - \bar{F}_r \quad (21-a)$$

or

$$K_{\text{eff}} d^* = \bar{F}^* - \bar{F}_r \quad (21-b)$$

こゝに

$$K_{\text{eff}} = K + K_0 + K_G \quad (21-c)$$

$$K = \sum \iint_{\text{contact surfaces}} ([b_s^{(n)}]^T [k_s] [b_s^{(n)}] + [b_r^{(n)}]^T [k_r] [b_r^{(n)}]) ds \quad (22-a)$$

$$K_0 = \sum \iint_{\text{contact surfaces}} ([b_s^{(n)}]^T [k_s] \{\delta^{(n)}\} + [b_r^{(n)}]^T [k_r] \{\Delta^{(n)}\}) ds \quad (22-b)$$

$$K_G = - \sum (\iiint_{\text{elements}} \bar{p}_i^{(n)T} e_i^{(n)} dv + \iint \bar{f}_i^{(n)T} e_i^{(n)} ds) \quad (22-c)$$

$$\bar{F}^* = \sum (\iiint_{\text{elements}} \bar{p}_i^{*T} c_i^{(n)} dv + \iint \bar{f}_i^{*T} c_i^{(n)} ds) \quad (22-d)$$

$$\bar{F}_r = \left. \begin{aligned} & \sum \iint_{\text{contact surfaces}} ([b_s^{(n)}]^T [k_s] \{\delta^{(n)}\} + [b_r^{(n)}]^T [k_r] \{\Delta^{(n)}\}) ds \\ & - \sum (\iiint_{\text{elements}} \bar{p}_i^{(n)T} c_i^{(n)} dv + \iint \bar{f}_i^{(n)T} c_i^{(n)} ds) \end{aligned} \right\} \quad (22-e)$$

$$b_{0i} = \frac{\partial b_0}{\partial d}, \quad b_{1i} = \frac{\partial b_1}{\partial d}, \quad e_i = \frac{\partial c_i}{\partial d}$$

こゝに \bar{F}_r は前の荷重増分段階の計算誤差による不平衡力である。

3. 本モデルに対する二、三の数学的考察

前節において剛体-バネモデルとはどんな要素であり、どのような考え方に基づいて導き出されてきたかについて構造技術者向きに説明したが、さらにその特徴を要約して述べてみたい。

- (i) 外荷重をうける固体はその極限状態において迂り(塑性変形)、座屈あるいはクラック等いわゆるカタストロフィーが起る。一般にこのような不連続現象を連続体力学の枠内で論ずるのは自づと限界があるのでなからうか。
- (ii) 固体がカタストロフィーの状態に達すると必ず剛体運動が

起る。本モデルはこの性質を捉え、極限状態において剛体運動が起り得る様なモデルを模索した結果得られた。

- (iii) このモデルはバネ剛性の算定に当り差分法の考え方を導入している。従ってこの方法は有限要素法と差分法の中間にある手法と云える。物理的直観から導かれたこのバネ剛性の公式は2次元、3次元問題の場合必ずしも最良の公式ではなく、往々にしてこれらの要素を用いた弾性解析結果は必ずしも精密な値に収束するとは限らない。

近藤はその問題点を改善するため Hellinger - Reissner の原理から出発してバネ定数を合理的に推定する計算公式を変分法的に導き、“剛体-バネ”モデルの精度を吟味する判定法の基礎を作った。近藤はさらにこの研究を進めて新しいハイブリット型変位モデルを導き、その収束性、精度が従来の有限要素モデルや“剛体-バネ”モデルに比して弾性域塑性域でも遜色のないことを示した。

- (iv) この離散化手法を有限要素法的な言葉で表現すれば要素の歪エネルギーをその境界面に lump する方法と云うことが出来るから *stiffness lumping method* と呼ぶことが出来る。
- (v) またこの要素モデルは別な言い方をすれば低次形状関数を用いた有限要素モデルと云うことが出来る。すなわ

ち形状関数として座標の1次関数を用いているので1階微分は一定となり有限値をとるが2階の微係数は全部零となってしまう非線形解析に必要な諸量の計算が不能となる。ところがこの2階微係数を差分式でおきかえたものが剛体バネモデルであることを渡辺が見出した。彼はこの考えを2次元流れ解析に応用、さきに近藤の導いた板曲げモデルを用い、更に *Simplified Marker And Cell Method* および *Fluid in Cell Method* のスキームを援用して *Navier-Stokes* の方程式の解析法を研究、2次元 *Cavity flow* 問題に応用し、*Reynolds* 数 = 9,050 まで安定した良好な計算結果を得ることに成功した。

- (vi) 一般に連続体の変位場は剛体変位成分と変形(歪)による変位成分の和から構成されるというハイブリット性をもっている。これをマトリックス式で表現すれば

$$u = A(x)d + B(x)\epsilon$$

となる。従ってこれを要素の形状関数に用いた新しい要素モデルが考えられる。このモデルは近藤のモデルを更に一般化したハイブリット変位型モデルと考えられ、固体のみならず液体を含み一般の連続体の解析に使用出来るものと思われる。目下この要素を鋭意開発中で

あるが、この要素は一様歪による変形の自由度をもった変形要素-バネモデルであるから明らかに“剛体-バネ”モデルを一步改良したモデルであることは間違いない。

このモデルを用いれば変形の大きな固体の力学、高レイノルズ数の $N-S$ 方程式と固体の破砕、クラックの動的伝播、碎波等のシミュレーションに有効であると思われる。

何となればこの様な問題では剛体変位成分が歪による変位成分より遙かに大きな値をもち、これらを一諸にして取扱う従来の有限要素法では歪による変位成分を正確にとらえることは困難で計算がすぐ不安定になってしまうからである。

4. あとがき

固体力学非線形問題 有限要素解析法の問題点について論じ、その解決策として“剛体-バネ”モデルなる新要素を開発したいきさつについて述べた。この要素は物理的発想から得られたモデルであるためその妥当性を数学的に証明することが難かしかったが、近藤が Hellinger-Reissner の原理をもとにしてその変分学的基礎を固め、“剛体-バネ”モデルの精度と収束性を改善した変位型ハイブリッドモデルを提案しその有用性を示した。

著者は、このモデルを更に一般化した変位型ハイブリッドモデルを開発中である。

数学の素人の書いた報告であり、紙面の制約もあって意を盡せない所が多いので、興味のある方は以下に示す参考文献を参照されたい。

参 考 文 献

1. Kawai, T., and Kondou, K., "New Beam and Plate Bending Elements in Finite Element Analysis", Journal of the 'Seisan Kenkyu', Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol. 28, No. 9, 1976.
2. Kawai, T., "New Element Models in Discrete Structural Analysis", Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol. 141, 1977.
3. Kawai, T., "New Discrete Models and Their Application to Seismic Response Analysis of Structures", to appear in the International Journal of Nuclear Engineering and Design.
4. Kawai, T., "New Discrete Structural Models and Generalization of the Method of Limit Analysis", International Conference on Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics, Geilo, Norway, August 29 - September 1, 1977.
5. Kawai, T., "A New Discrete Model for Analysis of Solid Mechanics Problems", Journal of the 'Seisan Kenkyu', Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol. 29, No. 4, 1977.
6. Kawai, T., and Toi, Y., "A New Element in Discrete Analysis of Plane Strain Problems", Journal of the 'Seisan Kenkyu', Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol. 29, No. 4, 1977.

7. Kawai, T., and Toi, Y., "A Discrete Analysis of Dynamic Collapse of Beam under Impulsive Transverse Load", Journal of the 'Seisan Kenkyu', Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol. 29, No. 5, 1977.
8. Toi, Y., and Kawai, T., "A New Discrete Model for Analysis of Viscoelastic Problems", Journal of the 'Seisan Kenkyu', Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol. 29, No. 8, 1977.
9. 川井忠彦; "生研セミナーテキスト" コース29: 新しい要素モデルによる固体力学諸問題の解析, 昭52年7月1日~2日, 主催 財団法人生産技術研究奨励会.