数理解析研究所講究録
第329巻 1978年 85-112

高Re場のナビア・ストークス系の有限要素解析の問題点と対策

日立中研　村　田　健　郎

〔目　　次〕

1 緒言と内容要概

高Reynolds場のナビア・ストークス系は、数値的に解くことが難かしいことが多い。その理由の第一は、出発点とする通常のナビア・ストークス方程式系：

$$(\rho v_i)_{,t} = -\left(\rho v_i v_\ell - \mu(v_{i,\ell} + v_{\ell,i})\right)_{,\ell} - p_{,i} + f_i \ , \quad v_{\ell,\ell} = 0^{*}$$

が、偏微分方程式系として‘十分にWell posed’**でないことにあると考えられる。そのため、離散化された系も同様の性質を受けつぎ、安定な数値計算の進行をさまたげる。

実在の高Re流れに於いては、‘乱流’と‘そうでない流れ’とが混在しているのが普通である。乱流域に対してはそれ向きのモデルが種々開発されつゝあるが、(文献(6)) 我々はその前に‘全体的な流れのプロフィル’を知る必要がある。それが、乱流域に対する乱流解析のための、種々の Initial guess を与えることになる。

---

* ここに、$(\ )_{,t} = \frac{\partial}{\partial t}(\ )$, $(\ )_{,\ell} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\ )$, $v_{i,\ell} = \frac{\partial v_i}{\partial x_\ell}$ などとする。また、二重添字のある式は Σ を省略する。たとえば、$(\rho v_i v_\ell)_{,\ell} = \sum_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\rho v_i v_\ell)$.

** Well posedとは、データ、すなわち初期条件、境界条件に対して、解が一意的かつ連続的に依存して定まることを言う。また、作用素に対する解の連続的依存性も併せ要請されることがある。(物理的なスケール・アナリシスによって、未知函数を含む‘微小項’を落してよいためには、それが要請される。)

我々の考え方の出発点は、数値シミュレーションの出発点とする偏微分方程式系を、Ladyzhenskaya の推奨するところの、Well posed な系(1)に換えることである：

$$(1) \quad (\rho U_i)_{,t} = -\left(\rho U_i U_\ell - (\mu + \mu' |\tau|)(U_{i,\ell} + U_{\ell,i})\right)_{,\ell} - p_{,i} + F_i \ , \ U_{\ell,\ell} = 0$$

但し、 $|\tau| = \left(\sum_{\alpha\beta} (U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

次に、実在の三次元問題に於いては、離散化ののち、相当問題のある準陰解法的アルゴリズムを採用せざるを得なくなることを見込んで、分割の粗さに応じて十分に Well posed にすることを考える。その際、乱流の差分法によるシミュレーションに於いて気象学者のグループ（Deardorff (1970) 等）が試用している考え方を拡張して、

(2) $\mu' = \rho c h^2(x)$ 　ここに、$h(x)$ は、場所 x の函数で長さの次元。

と置く。ここに、$h(x)$ は、分割の局所的な粗さに応じて決められると考える。すなわち、離散系に於いて、$h(x)$ は、各節点 P_n に対して、対応する基底函数の'台の半径' h_n に代えられるもの，とするのである。従って真相は、分割が先に決ったのち $h(x)$ が定まると考えるわけであり、$h(x)$ は実務の表面にはあらわれない、観念的なものである。

(1)式の μ' を(2)式のように置いたということは、次のように

解釈できる：U_iをv_iの或る種の平均量と考え、それが(1)式に従がうと考えたとき、'レイノルズ応力' ρR_{il} を、

$$-\rho R_{il} = \rho C h^2(x)|\tau|(U_{i,l}+U_{l,i})$$

と置いたことに相当する。

2. 離散化手順

領域Ωを有限要素分割して、U_iのための基底函数系を$\{\phi_n(x)\}$, Pのための基底函数系を$\{\eta_m(x)\}$とする。trial function を、

$$(3)\qquad U_i^h = \sum_{n=1}^{N} u_{in}(t)\phi_n(x) \quad , \quad P^h = \sum_{m=1}^{M} p_m(t)\eta_m(x)$$

とする。U_iの方程式に対しては $\phi_k(x)$; $k=1,\cdots,N$, ちぢまぬ ; $U_{l,l}=0$ に対しては、$\eta_{k'}(x)$; $k'=1,\cdots,M$ を掛けて積分することによって、$3N+M$ 箇の方程式を作る。それは、

$$\underset{\sim}{u}_i = (u_{i1}(t),\cdots,u_{in}(t))^T \quad (i=1,2,3), \quad \underset{\sim}{p} = (p_1(t),\cdots,p_M(t))^T$$

に関する常微分方程式となる。その際積分：

$$(4)\qquad \int_{\Omega^h}(\mu+\mu'|\tau|)(U_{i,l}^h+U_{l,i}^h)\phi_{k,l}\,d\Omega$$

を行なうに当り、各基底函数の台毎に、$\mu'|\tau|$を集中定数化して計算する。このようにして作られる常微分方程式を次のように書く：$(\underset{\sim}{u}_1,\underset{\sim}{u}_2,\underset{\sim}{u}_3)^T$ をまとめて $\underset{\sim}{u}$ と書いて、

$$\begin{cases} M\dot{\underset{\sim}{u}} + (C\underset{\sim}{u}+K+K^*)\underset{\sim}{u} + (K'+K'^*)\underset{\sim}{u} + Q\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{f} & (5) \\ R\underset{\sim}{u} = 0 & (6) \end{cases}$$

（ここに $\mu'|\tau|$ 項からのものに＊印を，$U_{l,i}$ 側からのものに ′ 印をつけた）

3．定常問題

この場合、$\underset{\sim}{u}$，$\underset{\sim}{p}$ は t を含まぬ単なる未知ベクトルとなり、前頁の(5)，(6)式は、

$$
\begin{array}{ll}
(7) & \left\{ \begin{array}{l} (C\underset{\sim}{u}+K+K^{*})\underset{\sim}{u}+(K'+K'^{*})\underset{\sim}{u}+Q\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{f} \\
(8) \qquad R\underset{\sim}{u} = 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

となる。ここに、$(\mu+\mu'|t|)(U_{\ell,i})$ 側からの $(K'+K'^{*})\underset{\sim}{u}$ なるものは、$\mu+\mu'|t|$ が場所に依存しなければ消失する項で、一般に小さい。一方これを左辺に置いたまゝで反復式を作ると、LU 分解が大変になるから、右辺に移した反復式を作る：

$$
(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (C\underset{\sim}{u}^{(\nu-1)}+K+K^{*(\nu-1)})\underset{\sim}{u}^{(\nu)}+Q\underset{\sim}{p}^{(\nu)} = \underbrace{\underset{\sim}{f}-(K'+K'^{*(\nu-1)})\underset{\sim}{u}^{(\nu-1)}}_{\underset{\sim}{f}^{(\nu-1)}\text{と略記}} \\
R\,\underset{\sim}{u}^{(\nu)} = 0 \end{array} \right.
$$

視覚的印象の鮮明を願って、一度 $(\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \underset{\sim}{u}_3, \underset{\sim}{p})^T$ に関する *matrix form* で書いて置く：$\tilde{K}_i^{(\nu-1)} = K_i + K_i^{*(\nu-1)}$ と書き、

$$
(10) \quad \begin{bmatrix} C_\ell \underset{\sim}{u}_\ell^{(\nu-1)}+\tilde{K}_1^{(\nu-1)} & 0 & 0 & Q_1 \\ 0 & C_\ell \underset{\sim}{u}_\ell^{(\nu-1)}+\tilde{K}_2^{(\nu-1)} & 0 & Q_2 \\ 0 & 0 & C_\ell \underset{\sim}{u}_\ell^{(\nu-1)}+\tilde{K}_3^{(\nu-1)} & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{u}_1 \\ \underset{\sim}{u}_2 \\ \underset{\sim}{u}_3 \\ \underset{\sim}{p} \end{bmatrix}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{f}_1 \\ \underset{\sim}{f}_2 \\ \underset{\sim}{f}_3 \\ 0 \end{bmatrix}^{(\nu-1)}
$$

実は、(10)式でもまだ大変なのである。その理由は、本当の計算手順はちょっと違うが、原理的には以下の如くである：

(9)式を、$C\underset{\sim}{u}^{(\nu-1)}+K+K^{*}=A$，$\underset{\sim}{u}^{(\nu)}\Rightarrow\underset{\sim}{u}$ などと略記して、

(11) $$\begin{cases} A\underset{\sim}{u}+Q\underset{\sim}{p}=\underset{\sim}{f} & \rightarrow \quad \underset{\sim}{u}=-A^{-1}Q\underset{\sim}{p}+A^{-1}\underset{\sim}{f} \\ R\underset{\sim}{u} \qquad\quad =0 & \rightarrow \quad R(-A^{-1}Q\underset{\sim}{p}+A^{-1}\underset{\sim}{f})=0 \end{cases}$$ より、

(12) $$RA^{-1}Q\underset{\sim}{p}=RA^{-1}\underset{\sim}{f}$$

A は帯のまゝで LU 分解でき、それを使って右辺は帯のまゝで計算できるのだが、左辺の $RA^{-1}Q$ は密行列化する。

このとき、大きな実メモリ容量が必要になるという難点を克服するために、'並列部分構造化'とブロックザイデル式の準陰解法を採用したい。また、多くの応用に於いて、p_i の大きい方向は一つだから、* それに応じた $Q_i\underset{\sim}{p}_i$ だけを右辺に置いた反復式で済ませたい。ところが、準陰解法だから、純陰解法のとき以上に分割を細かくして十分 Cell Re を抑えてやらないと収束しなくなる。これでは困る。

• ここで K^{*} 項の効果があらわれる。すなわち、K^{*} 項が、分割の粗密に応じて適度に利いて、Cell Re を抑え、行列の條件指数を抑え、反復式の'縮小行列' $A^{-1}B$ のノルムを抑える。

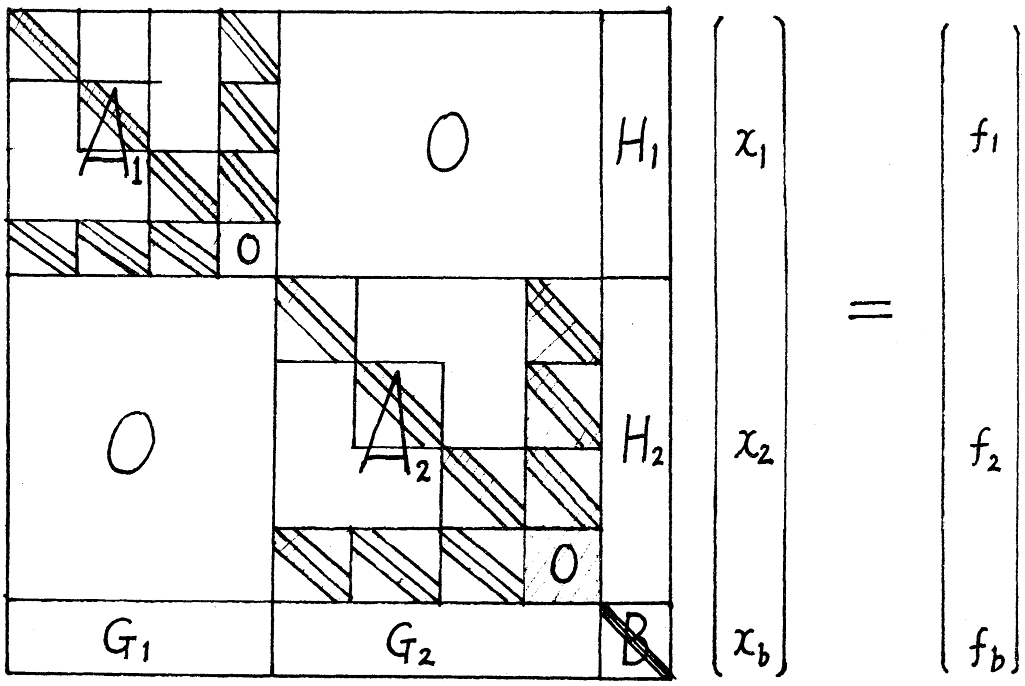
• もうひとつ、準陰解法に於いては、その出発ベクトルを、

---

* 特に、部分構造化するとき、各部分構造毎に、そう仕向けることができる。

本物に近いものにえらびたい。それには、粗い分割系によって解いたものを、部分構造間境界値ベクトルの作成に使うのが常とう手段である。このときやはり、Cell Re を抑えるために、$\mu'|\tau|$ 項が是非必要となるのである。粗い分割系の Cell Re を単に抑えるためだけならば、μ を大きくするだけでも間に合うが、それでは全く人工的で、物理的につぢつまが合わない。(詳しくは5で議論する。)

部分構造化と、ブロックザイデル準陰解法



(上図は、$i=1,2$ すなわち二つの部分構造に分けたときを示す.)

$$\begin{cases} A_i x_i + H_i x_b = f_i \\ \sum_{i=1}^{K} G_i x_i + B x_b = f_b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_i x_i^{(\mu+1)} = f_i - H_i x_b^{(\mu)} \\ B\ x_b^{(\mu+1)} = f_b - \sum_{i=1}^{K} G_i x_i^{(\mu+1)} \end{cases}$$

- $A_i = L_i U_i$, $B = L_b U_b$ なる LU 分解だけやればよくなる。
- $x_b^{(0)}$ は、粗い分割系を解いて決める。

反復式(9)に関するコメント

反復式(9)は、原点シフトをしない方式である。それよりも、原点シフトを行なう、ニュートン・ラプソン類似の反復式の方が、収束すれば速いであろう。但し、'軌道から外れる'危険があるというGartling等の考えに従って、本文では(9)式を採った。しかしながら、最初の粗い分割系での計算は兎も角として、細分割系に対する計算に於いては、その危険はすくないと考えられる。原点シフトを行なう反復式をみちびいて置こう。

(8)式をシンボリックに $A(w)w = -B(w)w + f$ と書く。ここに、$w = (u, p)^T$ とした。また、$(K' + K^{*\prime})u$ 項を $B(w)w$ と書いた。

ここで、$w^{\nu} = w^{\nu-1} + r^{\nu}$ とおいて次式を作る。

$$[A(w^{\nu-1}) + A(r^{\nu})](w^{\nu-1} + r^{\nu}) = -B^{\nu-1}(w^{\nu-1} + r^{\nu}) + f$$

これを、r^{ν}に関する式に直すとき、$A(r^{\nu})w^{\nu-1}$ 項を、

$$A(r^{\nu})w^{\nu-1} = \tilde{A}(w^{\nu-1})r^{\nu} + A'(r^{\nu})w^{\nu-1}$$

の形に書いたのち、$A'(r^{\nu})w^{\nu-1}$ を $A'(r^{\nu-1})w^{\nu-1}$ に換える。また $A(r^{\nu})r^{\nu}$ を $A(r^{\nu-1})r^{\nu-1}$ に換え、$-B^{\nu-1}r^{\nu}$ を $-B^{\nu-1}r^{\nu-1}$ に換えて次式を得る:

◎
$$\boxed{\begin{aligned}[A(w^{\nu-1}) + \underline{\tilde{A}(w^{\nu-1})}]\, r^{\nu} = -[A(w^{\nu-1}) + B^{\nu-1} + \underline{A'(r^{\nu-1})}]\, w^{(\nu-1)} + f \\ \underline{-B^{\nu-1}r^{\nu-1}} - \underline{A(r^{\nu-1})r^{\nu-1}}\end{aligned}}$$

[上式で、rの二次の項 $A(r^{\nu-1})r^{\nu-1}$ を消したものが、ニュートン・ラプソン類似の式である。$\sim\!\sim$ の項を皆消したものが本文のものに相当する。]

4．非定常問題

Ladyzhenskaya (2, 3) によつて、解の存在性、一意性、データに対する解の連続的依存性に関する諸問題がほゞ完全に論じられているのは、この非定常問題に於いてである。定常問題に対しては、$\mu'|c|$ が、解の一意性のための十分條件を、どのようにゆるめる働らきをするか、明らかにされていない。〔附記を参照されたい。〕

さて、彼女は、一貫してソレノイダルすなわち $\mathrm{div}\, v = 0$ であるようなヒルベルト空間の中でのガレルキン近似によつて議論を展開している。そのため圧力 p が消去された常微分方程式が初めから得られ、それは正規形になつている。それに対して我々のガレルキン近似によつて得られた常微分方程式系；3頁(5), (6) は、(6)式によつて近似的にソレノイダルに仕向ける，というものであつて、正規形でない。従って解の一意的存在性が、彼女の場合ほどには自明でない。しかし、それは Lions (9) に示唆されているような方法で証明できると思われるから、それを認めることにしよう。そして、

分割 Δ^h に対応した常微分方程式(5), (6) の一意解を $\underset{\sim}{u}^h(t)$, $\underset{\sim}{p}^h(t)$ と書こう。このとき、分割の列 $\{\Delta^{h_k}$；但し Δ^{h_k} は $\Delta^{h_{k-1}}$ の細分$\}$

を作るとき、$h \to 0$ のとき $\underset{\sim}{u}^{h_k}(t)$, $\underset{\sim}{p}^{h_k}(t)$ が素直に収束するかどうか?、$\mu'|\tau|$ 無しの系の場合、高 Re の三次元場では、全くその保証はない。それが、$\mu'|\tau|$ の附加によって、高 Re の場で、画然と事情が好転することを彼女の所論から期待するわけである。

上にもふれたように、我々のガレルキン近似は、彼女のそれと同じでないから、直接その恩恵をこうむると言うわけに行かない。別途理論を構築して、検証す可きものであるが、それは筆者の手に余る。この小論では、常微分方程式(5),(6)を更に t も離散化したとき、それを数値的に解く段階に於いて $\mu'|\tau|$ がどのように利くかについてだけ調べる。

t も離散化した反復式の作成手順.

常微分方程式系(5),(6)を、クランク・ニコルソン流の方法で時間差分化を行なう。$\underset{\sim}{u}(t_\nu)$ を $\underset{\sim}{u}^{(\nu)}$ などと略記して、

$$\dot{\underset{\sim}{u}} \xrightarrow{(\text{おきかえ})} \frac{\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)} - \underset{\sim}{u}^{(\nu)}}{\tau},$$

$\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{p}$ に関する一次項については、

$\underset{\sim}{u} \to \hat{\underset{\sim}{u}} = \theta \underset{\sim}{u}^{(\nu+1)} + (1-\theta)\underset{\sim}{u}^{(\nu)}$ などによる。非線形項 $(C\underset{\sim}{u})\underset{\sim}{u}$ は $\to$

$$(C\hat{\underset{\sim}{u}})\hat{\underset{\sim}{u}} = \theta^2 (C\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)})\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)} + \theta(1-\theta)\left[(C\underset{\sim}{u}^{(\nu)})\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)} + (C\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)})\underset{\sim}{u}^{(\nu)}\right] + (1-\theta)^2 (C\underset{\sim}{u}^{(\nu)})\underset{\sim}{u}^{(\nu)}$$

がオーソドックスなクランク・ニコルソンであろうが、やゝ簡便な次式:

$$(C\underset{\sim}{u})\underset{\sim}{u} \longrightarrow \theta'(C\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)})\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)} + (1-\theta')(C\underset{\sim}{u}^{(\nu)})\underset{\sim}{u}^{(\nu)}$$

によるとして以下の議論を進める。本質的には同じである。

K^*, K'^* 値に関しては、$\underset{\sim}{u}^{(\nu)}$ 値からの計算で済ます。

(5), (6) 式で $K+K^*$, $K'+K'^*$ と書いたのを今度はそれぞれ、$\tilde{K}$, $\tilde{K}'$ であらわして、離散化式を書いて見る。簡単のため $\theta=\theta'=\frac{1}{2}$ にとるとき、

$$
(1)\quad \begin{cases}
\left[2M+\tau\left(C\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)}+\tilde{K}^{(\nu)}\right)\right]\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)}+\tau\tilde{K}'\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)}+\tau Q\underset{\sim}{p}^{(\nu+1)} \\
\qquad\qquad = \underset{\sim}{f}+\left[2M-\tau\left(C\underset{\sim}{u}^{(\nu)}+\tilde{K}^{(\nu)}\right)\right]\underset{\sim}{u}^{(\nu)}-\tau\tilde{K}'\underset{\sim}{u}^{(\nu)}-\tau Q p^{(\nu)} \\
\tau R\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)}=0 \quad (\text{或いは、}\tau R\underset{\sim}{u}^{(0)}=0,\ \tau R u^{(\nu+1)}=-\tau R u^{(\nu)})^{*}\ \text{次頁注}
\end{cases}
$$

ここに、前に $K+K^*$, $K'+K'^*$ とあったものをそれぞれ、$\tilde{K}$, $\tilde{K}'$ と書いた。

この (1) 式を、$\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)}$, $\underset{\sim}{p}^{(\nu+1)}$ に関する方程式と見て解くわけであるが、それは非線形方程式だから、線形化された反復式を $\nu\to\nu+1$ の間に作らねばならない。その前に、$\underset{\sim}{u}^{(\nu+1)}$, $\underset{\sim}{p}^{(\nu+1)}$ を $\underset{\sim}{w}$, $\underset{\sim}{q}$ と書いて、添字 (ν) のついたものは、常数扱いすることにするとき、(1) 式は次のように書ける.

$$
(2)\quad \begin{bmatrix} 2M+\tau(C\underset{\sim}{w}+\tilde{K}) & \tau Q \\ \tau R & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{w} \\ \underset{\sim}{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau\tilde{K}'\underset{\sim}{w} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{f}^{*} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$(\underset{\sim}{w}, \underset{\sim}{q})^T = x$ と考えてこれを $A_0(x)x = Bx+b$ 形の非線形方程式と見て、反復式 $A_0(x^{m-1})x^m = Bx^{m-1}+b$ によって解くとしよう。他に、Douglass-Dupont 等 (4) のものその他があるが、$\mu'|\nabla|$ 項がどう利くかに関しては、大同小異である。

さて、(2)式を解くための $A_0(x^{m-1})x^m = Bx^{m-1}+b$ 形の反復式は、

$$\begin{bmatrix} 2M+\tau(C\underset{\sim}{w}^{m-1}+\tilde{K}) & \tau Q \\ \tau R & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{w}^{m} \\ \underset{\sim}{q}^{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau \tilde{K}'\underset{\sim}{w}^{m-1} \\ \underset{\approx}{0}\,{}^{*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{f}^{*} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

であるが、左辺のＬＵ分解のために必要となる主メモリ容量を小さく抑えるための方策に、大別して二つの方策がある：

(i) 部分構造化により、部分構造間境界と部分構造内点とのカップルに関する項を右辺に移す。このとき反復式は、$A_0(x^{m-1})x^m = B(x^{m-1})x^{m-1}+b$ 形になる。（特に Re の低い部分構造ができたら、そこの'移流項'も右辺に移す。）

(ii) (3)式の〜をしたところの０行列を、εI に換え、≈をしたところに $\varepsilon I\,\underset{\sim}{q}^{m-1}$ を加える。そのうえで、左辺の $\tau Q\,\underset{\sim}{q}^{m}$ を $\tau Q\,\underset{\sim}{q}^{m-1}$ に換えて右辺に移す：

$$\begin{bmatrix} 2M+\tau(C\underset{\sim}{w}^{m-1}+\tilde{K}) & 0 \\ \tau R & \varepsilon I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{w}^{m} \\ \underset{\sim}{q}^{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau \tilde{K}'\underset{\sim}{w}^{m-1} - \tau Q\,\underset{\sim}{q}^{m-1} \\ \underset{\approx}{-\tau R\,\underset{\sim}{w}^{m-1}}\,{}^{*} + \varepsilon I\,\underset{\sim}{q}^{m-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{f}^{*} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

＊注．(4)式右辺の≈のところは、$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t}$ に相当する εI 項を附加した場合、クランク・ニコルソン流という建て前から置いたものである。

(4)の反復式は、$A_0(x^{m-1})x^m = Bx^{m-1}+b$ 形の反復式である。

さて、$(\nu)\to(\nu+1)$ の間の反復式(3)或いは(4)の各 m 段で、LU 分解を行なうのを省略する方式が試みられる。(4)式について云うならば、左辺の $\tau(C\underset{\sim}{w}^{m-1})\underset{\sim}{w}^m$ の項を、$\tau(C\underset{\sim}{w}^0)\underset{\sim}{w}^m+\tau(C(\underset{\sim}{w}^{m-1}-\underset{\sim}{w}^0))\underset{\sim}{w}^m$ と書いて置いて、この右側の項を右辺に移して $\tau(C(\underset{\sim}{w}^{m-1}-\underset{\sim}{w}^0))\underset{\sim}{w}^{m-1}$ と換える： $r^{m-1}=\underset{\sim}{w}^{m-1}-\underset{\sim}{w}^0$ とおいて、

$$(4')\quad \begin{bmatrix} 2M+\tau(C\underset{\sim}{w}^0+K) & 0 \\ \tau R & \varepsilon I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underset{\sim}{w}^m \\ \underset{\sim}{q}^m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\tau[\tilde{K}+Cr^{m-1}]\underset{\sim}{w}^{m-1}-\tau Q\underset{\sim}{q}^{m-1} \\ \varepsilon I\underset{\sim}{q}^{m-1}-\tau R\underset{\sim}{w}^{m-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \underset{\sim}{f}^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4')式は、$A_0x^m=B(x^{m-1})x^{m-1}+b$ 形の反復式である。

$A(x)x=b$ を $A(x)=A_0(x)-B(x)$ とおいて、$A_0(x)x=B(x)x+b$ と書いたものを、

$$(5)\qquad A_0(x^{m-1})x^m=B(x^{m-1})x^{m-1}+b$$

形の反復式によって解く場合の、収束と誤差に関するメモ。

$A(x)x=b$ には、解 x^* があるとする。すなわち、

$$(6)\qquad A_0(x^*)x^*=B(x^*)x^*+b$$

とする。

Rheinboldt (7)によれば、何等かのノルムに関し、

$$(7)\qquad \|A(x)-A(x')\|\leqslant\beta\|x-x'\|\ ,\ {}^\exists\beta>0$$

$$(8)\qquad \beta\|A(x^*)^{-1}\|^2\|b\|<1$$

ならば、或る正数 r が存在して、$\|x^0-x^*\|<r$ なる x^0 から出

発した反復式(9)による $x^{(m)}$：

(9) $\quad A(x^{(m-1)})x^{(m)}=b$ 　すなわち　$A_0(x^{(m-1)})x^{(m)}=B(x^{(m-1)})x^{(m)}+b$

は、x^* に収束する；ということが証明できると言う。

ところが、我々のものは(9)でなく(5)に基づく。しかも、(5)による列 $\{x^m\}$ 自身は、計算機による誤差のために実際には求めることはできない。実際に求められるものは、次のような列 $\{\tilde{x}^m\}$ である：　今後 $A_0(\tilde{x}^{m-1})=A_0^{m-1}$, $B(\tilde{x}^{m-1})=B^{m-1}$ などと略記することにして、

$$A_0^{m-1}=\tilde{L}_0^{m-1}\tilde{U}_0^{m-1}+A_\varepsilon^{m-1}$$ （$\tilde{L}_0^{m-1}$, $\tilde{U}_0^{m-1}$ が計算機により求まるもの）

と書き、$\tilde{A}_0^{m-1}=\tilde{L}_0^{m-1}\tilde{U}_0^{m-1}$ と書いて、

(10) $$\tilde{A}_0^{m-1}\tilde{x}^m=B^{m-1}\tilde{x}^{m-1}+b+e+\varepsilon^{m-1}$$

LU分解に伴なう誤差の影きようが実際には主となるのであるが、$B(\tilde{x}^{m-1})\tilde{x}^{m-1}$ の計算も正しく行なわれるわけでないし、前進代入，後退代入すなわち $\tilde{L}_0^{m-1}z=\tilde{f}$, $\tilde{U}_0^{m-1}x=z$ の計算も正しくは行なわれないので、この段での誤差を集めて右辺に ε^{m-1} を置いた。また、後の応用を考えて，b でなく $b+e$ とした。（e は後の応用で、ν 段から $\nu+1$ 段へ繰り越されて来る誤差項の意味を持つことになる。）

(10)式と、(6)式：$A_0^*x^*=B^*x^*+b$ を辺々相引いて、次式を得る：

$$A_0^*(x^* - \tilde{x}^m) + (A_0^* - \tilde{A}_0^{m-1})\tilde{x}^m$$

(11)

$$= B^*(x^* - \tilde{x}^{m-1}) + (B^* - B^{m-1})\tilde{x}^{m-1} - e - \varepsilon^{m-1}$$

ここで、$\| A_0^* - \tilde{A}_0^{m-1} \| \leqq \| A_0^* - A_0^{m-1} \| + \| A_0^{m-1} - \tilde{A}_0^{m-1} \|$

$$\leqq \beta \| x^* - \tilde{x}^{m-1} \| + \| A_\varepsilon^{m-1} \|$$

$\| B^* - B^{n-1} \| \leqq \beta' \| x^* - \tilde{x}^{m-1} \|$ とすると、

$$\| x^* - \tilde{x}^m \| \leqq \| A_0^{*-1} \| (\| A_\varepsilon^{m-1} \| + \| e \| + \| \varepsilon^{m-1} \|)$$

(12)

$$+ \| A_0^{*-1} \| (\beta \| x^m \| + \beta' \| x^{m-1} \| + \| B^* \|) \| x^* - x^{m-1} \|$$

ここで、$\{x^m\}$ の有界性：$\| x^m \| < \xi$ と、$\| A_\varepsilon^{m-1} \| \leqq \alpha_\varepsilon$, $\| \varepsilon^{m-1} \| < \varepsilon$ を仮定するとき、

(13) 條件： $\gamma = \| A_0^{*-1} \| (\beta\xi + \beta'\xi + \| B^* \|) < 1$ の下に、

(14) $$\| x^* - x^m \| \leqq \frac{\| A_0^{*-1} \| (\alpha_\varepsilon \xi + \| e \| + \varepsilon)}{1 - \gamma} + \gamma^m \| x^* - \tilde{x}^0 \|$$

(14)式の右辺第一項は、mに関係なく残るから注意が要る。

我々の問題に於いて、(7)式のβに相当するものはて$\|C\|$である。てを小さくとって、(8)式を満すようにすることは必ずできるから、反復式(9)による$\{x^{(m)}\}$がx^*に收束するようには必ずできる。ところが実際にはそれではなくて、(3)，或いはそれを部分構造化して作ったもの、或いは(4)，(4')にもとづく(10)形の反復式であった。それらの收束性と誤差評価のために(13)，(14)式が利用できる。ここで、$\| A_0^{*-1} \| / (1-\gamma)$ が重要。

(i) 部分構造化法の影響、 $\|B^*\|$項が、部分構造化に伴なう右辺への移項によって増すが、同時に $\|A_0^{*-1}\|$ と α_ε は逆に減小する。従って、この方法は、τを適当に小さくとることによって(13)式を確保し、必要に応じてmを大きくして、(14)式右辺第2項を抑えることにすればよい。この方法に於ける(14)式右辺第1項は、部分構造化しないときと比べて必ず小さくなる点は、好ましい。

(ii) 反復式(4)を使用する場合 このとき、

$$A_0(x) = \begin{bmatrix} 2M+\tau(C\underset{\sim}{w}+\tilde{K}) & 0 \\ \tau R & \varepsilon I \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -\tau\tilde{K}' & -\tau Q \\ -\tau R & \varepsilon I \end{bmatrix}$$

という具合にとったわけである。このときの(13)式のγは、

$$\gamma = \|A_0(x^*)^{-1}\|\,(\beta\xi + \|B\|) \quad , \quad \beta = \tau\|C\| \quad 。$$

従って、$\tau \to 0$ のとき、

$$\|A_0(x^*)^{-1}\| \to \frac{1}{\min[\,2M\text{の最小固有値},\ \frac{1}{\varepsilon}\,]} \ , \ (\beta\xi + \|B\|) \to \varepsilon$$

より、 $\gamma \to \min[\,\varepsilon/\min[2M\text{の最小固有値}],\ 1\,]$

従って、$\varepsilon \ll \min[2M\text{の最小固有値}]$ にとって置いてのち、τを十分小さくとれば、必ず $\gamma < 1$ は達成できる。

最後に、以上の文脈の中で、$\mu'(t)$項からの K^* 項は、常に好ましい作用を及ぼす。すなわち、$A(x^*)$ の正定値化を促がし、$A(x^*)$ の最小固有値を引き上げ、$\|A(x^*)^{-1}\|$ の値を引き下げる。$A_0(x^*)$ に対しても同様である。従って(13),(14)式に於いて γ を引き下げ、$\|A_0^{*-1}\|/(1-\gamma)$ を引き下げる。

5．おわりに

純粋な数値計算的実務の見地からは、$\rho ch^2(x)|\tau|$に対応する項は、有限要素分割の、要素毎の粗さに依存して要請された一種の‘人工粘性項’と見られる。但し‘人工’をここで直ちに‘不自然’の意味にとらないことにしよう。人工によって離散化系が十分に Well posed になることは判ったが、そのためモデルが不自然になったのでは困る。実は筆者は、$\rho ch^2(x)|\tau|$の附加は、十分広い応用範囲に於いて、‘より自然なモデル’に近附け得るものと期待して居るのである。その点についての見解を簡単に示して、この小論を打ち切ることにしたい。

((1)) 実験装置による観測がそうであるのに似て、‘数値実験’のために離散化された系の未知量u_{in}は、流れ場に設定された節点P_nに於ける、流れ場の流速そのものではなく、節点P_nのまわりの流速の、或る種の平均量$U_i(P_n)$をあらわすものだと考える。我々は、一度離散化という数値実験場を設定した瞬間に、そういうものしか追えなくなるものと考える。

その際、有限要素法で現実的に追うことのできる程度の粗さの分割に於いては、その節点に対応する基底函数の台の中では、レイノルズ方程式をみちびくために要請される、流速や圧力のゆらぎが、高Re場に於いては、必ずしも乱流とは言い難い場に於いても存在する、と考える。

《2》とすると、我々が追う可き局所平均的な物理量U_i, Pは、乱流シミュレーションに通常使われているレイノルズの方程式：

$$(\rho U_i)_{,t} = -\left(\rho U_i U_\ell + P\delta_{i\ell} - \mu(U_{i,\ell}+U_{\ell,i}) - \rho\,\overline{v_i' v_\ell'}\right)_{,\ell}$$

に従がう。ここに $v_i' = v_i - \overline{v_i}$（ゆらぎ速度成分）とし、$\overline{\rho} = \rho$ $\overline{\mu} = \mu$ を仮定した。また、$\overline{f\,\overline{g}} = \overline{f}\,\overline{g}$ が成り立つとしている。それは、式変形；

$$\overline{\rho\, v_i v_\ell} = \rho\,\overline{v_i v_\ell} = \rho\,\overline{(\overline{v_i}+v_i')(\overline{v_\ell}+v_\ell')} = \rho(U_iU_\ell + \overline{v_i' v_\ell'})$$

を正当化するための仮定である。

以上の仮定の下に、通常，乱流モデル作成のための基礎式として使用されているところの、$R_{i\ell} = \overline{v_i' v_\ell'}$, $k = \frac{1}{2}\sum_\ell \overline{v_\ell' v_\ell'}$, $\phi = \nu \sum_{i\ell} \overline{v_{i,\ell}' v_{i,\ell}'}$ に関する、（モデル化前の）輸送方程式も、我々の‘乱流とは言い難い場’に於いても正当となる。たとえば、

$$\text{[R]}\quad \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + U_\ell (R_{ij})_{,\ell} = -R_{j\ell}U_{i,\ell} - R_{i\ell}U_{j,\ell} - (\overline{u_i u_j u_\ell})_{,\ell}$$
$$+ \frac{1}{\rho}\left[\overline{p'(u_{i,j}+u_{j,i})} - \overline{(p'u_i)_{,j} + (p'u_j)_{,i}}\right]$$
$$+ \nu (R_{ij})_{,\ell\ell} - 2\nu\,\overline{u_{i,\ell}u_{j,\ell}}$$

$$\text{[k]}\quad \frac{\partial k}{\partial t} + U_\ell k_{,\ell} = -R_{i\ell}U_{i,\ell} - \frac{1}{2}(\overline{u_i u_i u_\ell})_{,\ell} + \nu k_{,\ell\ell} - \phi$$

ϕの式は長くなるから省略する。

《3》 ところがこの先、R_{ij} などをモデル化する段階になると、乱流には乱流独自の理論と実験に支えられたモデル化が行なわれる。従って、それらのモデルを直ちには流用しかねる。しかし目的が、乱流場もその一部として含むこともあるような場の、全体的な流れのプロフィル をまず求めようということであるから、式の形式ぐらいは、事情を心得たうえで乱流モデルから借用するということは、ナンセンスとは言えまい。このように考えて、乱流モデルの中から比較的よく使われていて、しかも Ladyzhēnskaya の推奨する形式に最も近いものを探すと、次の形式のものに目が止まる：

$$[\odot] \qquad R_{ij} = -\ell^2 \left[\frac{1}{2}(U_{\alpha,\beta}+U_{\beta,\alpha})^2\right]^{\frac{1}{2}}(U_{i,j}+U_{j,i}) + \frac{2}{3}k\,\delta_{ij}$$

ここに、ℓ は length scale と呼ばれる。上の k, ϕ との関係は、$\ell^2 = ck^3/\phi^2$ とされる。我々は、この⊙式を使うことにした。但し、k は圧力 P の中に繰り入れられるとする。

(3) さてここで、⊙式と[R]式とを比べて見よう。⊙式はずい分簡単になっている。たとえば、⊙式では、平均場の変形テンソル $U_{i,j}+U_{j,i}$ と、R_{ij} の主軸の方向が一致することを強制する。従って、そのような場でないような場では、この表式は明らかに不適当である。乱流場でそのような場が形成されることがあることは知られている。しかし、そうかと言

って、[R],[k],[φ] 方程式に帰って、乱流モデルに於ける、*two-equations model*，或いは更に進んで *stress-eqs. model* 並みのモデルを作ろうとしても、今のところ徒労に終ることが恐れられる。従って、我々はせいぜい，

$$R_{ij} = -\ell^2|\tau|\tau_{ij} + \frac{2}{3}k\delta_{ij} - C_1\ell^2(\tau_{ik}\Omega_{kj} + \tau_{jk}\Omega_{ki})$$

但し、 $\tau_{ij} = U_{i,j} + U_{j,i}$ ， $\Omega_{ij} = U_{i,j} - U_{j,i}$ (うずテンソル)

あたりのところまでてほこを収めて置くがよいと思われる。

(4) '乱流理論' に於いて乱流と言うときには、乱流理論を正当づけるための種々の属性が要請されている。(例えば、Tennekes & Lumley (9)) しかしながら実際の流れに於いて、それら属性に照らしてこれは乱流、それは乱流でないと区別するのは容易でない。そこで我々は、乱流であろうとあるまいと、高 Re 場に於いては平均流速 U_i に関する既述の方程式が、それなりの表現力を持つものと期待する。乱流場に於いて、⊙のモデルで可なりよくシミュレーションができるような場と同じ幾何学的形状の場に於いて、、実験定数 C を乱流場に於ける場合の 1/3 ぐらいにとるところから実験を始めて見たい。(例えば 0.005 (文献7))。 C をうまくえらべば、$\rho C h_n^2|\tau|$ を附加した方が、多くの場合より自然な系をシミュレートすることになると期待したい。

[附記] Ladyzhenskaya の著書(2), 論文(3) の要約

内容梗概(実務家の便宜のために)

- 通常のナビア・ストークス系 : $v_{i,t} + v_\ell v_{i,\ell} = -p_{,i} + \nu \Delta v_i + f_i$

は、式は簡単な代りに、数学的な性質が必ずしもよくない:

(i) 定常問題の広義解は、すくなくとも一つあるが、唯一つのためには條件が要る。それは十分條件ながら、次のような相当きびしいものである。

$$2\sqrt{3}\, \nu^{-1} \mu_1^{-\frac{1}{4}} \| v \|_H < 1 \ , \ ここに、\mu_1 = \inf_{w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1} \left(\frac{\int \nabla w \cdot \nabla w}{\int_\Omega w^2} \right) , \ \| w \|_H = \int_\Omega v_{,\ell} v_{,\ell}$$

(ii) 非定常問題の広義解は、存在すれば唯一つであるが、存在のためには條件が要る。それは十分條件ながら、次のような相当きびしいものである。簡単のため外力がポテンシャル力の場合について書くと、

$$\| v(x,0) \| \cdot \| v_{,t}(x,0) \| < \frac{\nu^3}{\beta^2} \ , \ ここに、\beta = \max_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1} \left[\frac{\left(\int_\Omega v^4 \right)^{\frac{1}{2}}}{\int_\Omega v_{,\ell}^2} \right]$$

(iii) 広義解が、データに対して連続的に依存する, しないの問題がデリケートである。

- 粘性テンソル : $\mu(v_{i,j} + v_{j,i})$ をニュートン流体のワク組みの外に、ちょっとはみ出させると、数学的に性質のよい系を設定できる。

たとえば、

$$(\mu + \mu' |\tau|)(v_{i,j} + v_{j,i}) \ , \quad 但し \ |\tau| = \left(\sum_{\alpha\beta} (v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1. 定常ナビア・ストークス系

$$(1)\quad \begin{cases} -\nu\Delta \boldsymbol{v} + v_\ell \boldsymbol{v}_{,\ell} = -\nabla p + f\ , \quad \nabla\cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{on}\ \Omega \\ \boldsymbol{v}|_S = 0 \end{cases}$$

ここに、Ω は有界な連結開集合，S はその境界

'ソレノイダルなベクトル空間' $j(\Omega) = \{ w\ ;\ \nabla\cdot w = 0,\ w_i \in \mathring{C}^\infty(\Omega) \}$ を、内積；$[u, w] = \int_\Omega u_{,\ell} w_{,\ell}\, d\Omega$ に関して完備化したヒルベルト空間を $H(\Omega)$ と書く。（Ω が有界ゆえ $^\exists\mu_1$；$\int_\Omega w^2 \leq \frac{1}{\mu_1}\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla w$）

（定理１）　問題(1)は、條件 $\int_\Omega f\cdot\Phi < c\|\Phi\|_H$ の下で、すくなくともひとつの広義解 $\boldsymbol{v}$ を持つ。ここに広義解 $\boldsymbol{v}$ とは、

$$(2)\qquad \int_\Omega (\nu \boldsymbol{v}_{,\ell}\cdot\Phi_{,\ell} - v_\ell \boldsymbol{v}\cdot\Phi_{,\ell}) = \int_\Omega f\cdot\Phi \quad , \ ^\forall \Phi \in H(\Omega)$$

［注］(2)式は、(1)式上段の式に Φ を掛け、部分積分によってみちびく。

〔証明の大筋〕　方程式(2)が、次の(3)式で表現されることをまず示す。

$$(3)\qquad [\nu \boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v} - F, \Phi] = 0 \ , \ ^\forall \Phi \in H(\Omega),$$

A は完全連続 すなわち、任意の $H(\Omega)$ の弱収束列 $\{\boldsymbol{v}^{(m)}\}$ に関して、$\{A\boldsymbol{v}^{(m)}\}$ は強収束。ここに $A\boldsymbol{v}$ は、リースの定理を使って $\int_\Omega v_\ell \boldsymbol{v}\cdot\Phi_{,\ell} = [A\boldsymbol{v}, \Phi]$ としたものである。

この段の証明の山場は、リースの定理が使用可能のための有界性：

$$\left| \int_\Omega v_\ell \boldsymbol{v}_\ell\cdot\Phi_{,\ell} \right| \leq 2\sqrt{3}\,\mu_1^{-\frac{1}{4}} \|\boldsymbol{v}\|_H^2 \|\Phi\|_H$$

と、A の完全連続性を示すための不等式：$^\forall$ 弱収束列 $\boldsymbol{v}^{(n)}$ に対し、

$$\| A\boldsymbol{v}^{(m)} - A\boldsymbol{v}^{(n)} \|_H \leq c_1 \| \boldsymbol{v}^{(m)} - \boldsymbol{v}^{(n)} \|_{L_4} (\|\boldsymbol{v}^{(m)}\|_H + \|\boldsymbol{v}^{(n)}\|_H)$$

を示すところである。初めの式のため不等式 $\int_\Omega u^4 \leq 4\mu_1 \left[\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u \right]^2$ を使う。後の式と Rellich の定理から、$\{A\boldsymbol{v}^{(m)}\}$ の 完全連続性 が従がう。

次に、$Bv = \frac{1}{\nu}(Av+F)$ とおいて、(3)を、$[v - Bv, \Phi] = 0$ と書き、

(4) $$v - \lambda B v = 0 \quad , \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1$$

に Leray-Shauder の定理を使う。

〔Leray-Shauder の定理〕 ヒルベルト空間 H 上の完全連続作用素 B が、もし、『方程式 $u = \lambda B u$ の解 u_λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ が、あれば必ず $\|u_\lambda\|_H \leqq \rho$ (ここに ρ は λ に無関係)』が論証されるならば、実は $\exists u_1$; $u_1 = Bu_1$

我々のなす可きことは、「$v_\lambda = \lambda B v_\lambda$ のとき、$\exists \rho$; $\|v_\lambda\|_H \leqq \rho$」を示すこと:

$$\|v_\lambda\|_H^2 = [v_\lambda, v_\lambda] = [\lambda B v_\lambda, v_\lambda] = [\tfrac{\lambda}{\nu} A v_\lambda, v_\lambda] + [\tfrac{\lambda}{\nu} F, v_\lambda]$$

$$= [\tfrac{\lambda}{\nu} F, v_\lambda] \leqq \tfrac{\lambda}{\nu} \|F\|_H \|v_\lambda\|_H$$

($[\tfrac{\lambda}{\nu} A v_\lambda, v_\lambda] = 0$)

これで、$\|v_\lambda\|_H \leqq \frac{\lambda}{\nu}\|F\|_H \leqq \frac{1}{\nu}\|F\|_H$ が出た。右辺を ρ にとればよい。

〔定理2〕 定理1の条件に、次の条件が加わると、広義解が一意となる。

$$2\sqrt{3}\,\nu^{-1}\mu_1^{-\frac{1}{4}}\|v\|_H < 1 \quad (\text{或いは、} 2\sqrt{3}\,\nu^{-2}\mu_1^{-\frac{3}{4}}\|f\|_{L_2} < 1)$$

〔注〕上の条件を'レイノルズ的条件'と俗称しよう。μ_1 は既出であるが、それは、$-\nabla\cdot\nabla w = \mu w$, $w|_S = 0$ の最小固有値であり $\propto 1/\rho(\Omega)^2$ である。

〔証明の大筋〕 二つの広義解 v, v' があるとし、$\int_\Omega\{\nu(v_{,\ell} - v'_{,\ell}) - (v_\ell v - v'_\ell v')\} \cdot \Phi_{,\ell} = 0$. この式から、$u = v - v'$ とおき、Φ に u を使用して次式をみちびく。

$$\nu\|u\|_H^2 \leqq 2\sqrt{3}\,\mu_1^{-\frac{1}{4}}\|u\|_H^2\|v\|_H$$

この式から、定理2の式が成り立つときは、$\|u\|_H = 0$ が従がうことが判る。

2. 非定常ナビア・ストークス系

(1) $\quad v_{,t}-\nu\Delta v+v_\ell v_{,\ell}=-\nabla p+f(x,t)$, $\mathrm{div}\,v=0$, $x\in\Omega$, $t\in[0,T]$

(2) $\quad v|_S=0$, $v|_{t=0}=a(x)$, 但し $\mathrm{div}\,a(x)=0$, $a(S)=0$, $S=\partial\Omega$.

を考える。Ωは有界連結開集合, $Q_T=\Omega\times[0,T]$ として、

$$L_2(Q_T):=\{w(x,t)\,;\ w_i(x,t)\in L_2(Q_T)\}$$

$$\mathfrak{M}\ :=\{\Phi(x,t)\,;\ \Phi,\ \Phi_{,\ell}\in L_2(Q_T),\ \nabla\cdot\Phi=0,\ \Phi|_S=0\}$$

$\Phi\in\mathfrak{M}$ を(1)式両辺に掛けて積分を行なう。$\int_\Omega\nabla p\cdot\Phi=0$ などより、

(3) $\quad \int_0^T\int_\Omega(v_{,t}\cdot\Phi+\nu v_{,\ell}\cdot\Phi_{,\ell}-v_\ell v\cdot\Phi_{,\ell}-f\cdot\Phi)\,d\Omega\,dt=0$, $\forall\,\Phi\in\mathfrak{M}$

v , $v_{,\ell}$, $v_{,t}$ 共にQ_Tで二乗可積分, $\int_\Omega\sum_\ell v_\ell^4\,d\Omega$ が $t\in[0,T]$ で有界で, $\mathrm{div}\,v=0$, $v|_S=0$, $v|_{t=0}=a(x)$ 且つ(3)を満すとき、v は問題(1),(2)の広義解と言う。

[定理1] 広義解は、存在するときには唯一つに限る。

[定理2] 一般の三次元流れに於いて、$\|\cdot\|$ は$L_2(\Omega)$ノルムとし、

(1) $\quad a(x)=v(x,0)\in W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)$

(2) $\quad \left(\|v(x,0)\|+\int_0^T\|f\|\right)\left(\|v_{,t}(x,0)\|+\max_{0\le t\le T}\|f\|+\int_0^T\|f_{,t}\|\right)<\dfrac{\nu^3}{\beta^2}$

ならば、$0\le t\le T$ に於いて広義解が(一意的に)存在する。ここに、

$W_2^2(\Omega)=\{w\,;\ w,\ w_{,\ell},\ w_{,\ell m}\in L_2(\Omega)\}$, β の定義は後で。

(2)の條件は、ずい分きびしい。(2)の條件も'レイノルズ'的條件'と呼ぼう。

[定理2]の系 fがポテンシアル力の場合、fに関する項が消える。

〔証明の大筋〕

$H(\Omega)$の完全系を用意する：$\{a^k(x);\ k=1,2,\cdots\}$。このとき、$a^1(x)=a(x)$にとる。その部分空間$\{a^1(x),\cdots,a^n(x)\}$を固定し、その中でのガレルキン近似を考える：

(4) trial f. ： $v^{(n)}=\sum_{\ell=1}^{n} c_\ell(t)\,a^\ell(x)$

(5) test f. ： $\Phi^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} \psi_k(t)\,a^k(x)$

これらを、前頁の(3)式のv, Φに引き当てた式が、任意の連続な函数$\psi_k(t)$；$0\leqq t\leqq T$に関して成り立つように、$c_\ell(t)$を決めようとするわけである：

(6) $(v^{(n)}_{,t}-f,\,a^k)-(v^{(n)}_\ell v^{(n)},\,a^k_{,\ell})+\nu(v^{(n)}_{,\ell},\,a^k_{,\ell})=0$, $k=1,\cdots,n.$

この$c_\ell(t)$に関するn箇の式は、次式の形をしていて、所謂'正規形'である。

(7) $\frac{d}{dt}c_k(t)-\nu\sum_{i=1}^{n}a_{ki}c_i(t)+\sum_{i,j=1}^{n}b_{kij}c_i(t)c_j(t)=f_k(t)$

初期条件を、$v^{(n)}|_{t=0}=a(x)$に合わすため、$c_1(0)=1$, $c_2(0)=\cdots c_n(0)=0$とすると、　常微分方程式(7)は、次の条件下に於いて、一意解を持つ：

$$\int_0^t\left(\int_\Omega f\cdot f\,d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}dt<+\infty$$

よって、問題は大いにしぼられた。すなわち、各nに対して一意に定まるところのこの$v^{(n)}(x,t)$の列$\{v^{(n)}\}$を考えるとき、それから弱収束部列$\{v^{(n_k)}\}$をえらび出すことができて、その弱極限函数が広義解の資格を持つかどうか。

さて、それを見るため、$\{v^{(n)}\}$, $\{v^{(n)}_{,\ell}\}$が有界，従って$\{v^{(n)}\}$から、

$$v^{(n_k)}\xrightarrow[\text{弱}]{}v^{(\infty)},\quad v^{(n_k)}_{,\ell}\xrightarrow[\text{弱}]{}v^{(\infty)}_{,\ell}$$

なる部分列$\{v^{(n_k)}\}$および$v^{(\infty)}$をえらび出すことまでは、特別な付加条件を要しない。(次頁(i)) 問題はその先である。(次頁(ii))

(i) $v^{(n)}$は次の等式を満す。$\|\cdot\|$を$L_2(\Omega)$ノルム，$(\cdot,\cdot)$をその内積とし、

(A) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\nu\sum_{\ell=1}^{3}\|v_{,\ell}\|^2=(f,v)$

(B) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{,t}\|^2+\nu\|v_{,t\ell}\|^2+\int_\Omega v_{\ell,t}v_{,\ell}v_{,t}=(f_{,t},v_{,t})$

この(A)式から、$v^{(n)}$は次の二つの不等式を満すことが従がう。

$$\|v(x,t)\|\leqq\|v(x,0)\|+\int_0^t\|f(x,\tau)d\tau$$

$$\|v(x,t)\|^2+2\nu\int_0^t\sum_\ell\|v_{,\ell}(x,\tau)\|^2d\tau\leqq2\|v(x,0)\|^2+3\left[\int_0^t\|f(x,\tau)\|^2d\tau\right]^2$$

これら不等式によって，$\{v^{(n)}\}$, $\{v_{,\ell}^{(n)}\}$が$L_2(\Omega)$で有界，従って部分列$\{v^{(n_k)}\}$と弱極限$v^{(\infty)}$；$v^{(n_k)}\xrightarrow[\text{弱}]{}v^{(\infty)}$, $v_{,\ell}^{(n_k)}\xrightarrow[\text{弱}]{}v_{,\ell}^{(\infty)}$が存在する。

(ii) ところが、(B)式からだけでは、$\{v_{,t}^{(n)}\}$の有界性が出ない。そこで、'レイノルズ的条件'が登場することになるのである。それが次の助定理である。

〔助定理〕 vが(A),(B)を満し、更に、

〔R〕 $A^2=\left(\|v(x,0)\|+\int_0^T\|f\|dt\right)\left(\|v_{,t}(x,0)\|+\max_{0\leqq t\leqq T}\|f\|+\int_0^T\|f_{,t}\|dt\right)<\frac{\nu^3}{\beta^2}$

ならば、$\nu-\beta\nu^{-\frac{1}{2}}A>0$となって、$t\in[0,T]$のとき、

$$\|v_{,t}\|^2+2(\nu-\beta\nu^{-\frac{1}{2}}A)\int_0^t\|v_{,t\ell}\|^2d\tau\leqq2\|v_{,t}(x,0)\|^2+3\left(\int_0^t\|f_{,t}\|^2d\tau\right)^2$$

ここに，$\beta=\sqrt{3}\max_{v\in\mathring{W}_2^1(\Omega)}\left[\frac{(\int_\Omega v^4)^{\frac{1}{2}}}{\int\sum_\ell v_{,\ell}^2}\right]$である。これは$\rho(\Omega)$と共に増大する。

この助定理によって$\{v_{,t}^{(n)}\}$, $\{v_{,t\ell}^{(n)}\}$の有界性が保証され、部分列：$\{v^{(n_{k'})}\}$；$v_{,t}^{(n_{k'})}\xrightarrow[\text{弱}]{}v_{,t}^{(\infty)}$, $v_{,t\ell}^{(n_{k'})}\xrightarrow[\text{弱}]{}v_{,t\ell}^{(\infty)}$を先程の$\{v^{(n_k)}\}$の中からえらび出せることになるのである。

レイノルズ的条件〔R〕が何故要請されたかを見たところで、終りとしよう。

3. 拡張されたナビエ・ストークス系

Ladyzhenskaya (2,3) は、ナビアストークス系を拡張した系；

$$
(\mathrm{L})\quad \begin{cases} v_{i,t} + v_\ell v_{i\ell} = -p_{,i} + \left((\nu + \nu'|\tau|^{2k})\tau_{i\ell}\right)_{,\ell} + f_i \\ v_{\ell,\ell} = 0 \quad \text{但し、} \tau_{i\ell} = v_{i,\ell} + v_{\ell,i}\ ,\ \tau = \left(\sum_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha\beta}^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}
$$

が、$k \geqq \frac{1}{4}$ のとき、三次元問題一般に関して、前節のような'レイノルズ的な條件'なしに、或るワク組みの中の広義解の存在性，一意性，そしてデータに対する解の連続的依存性を持つことを証明した。新しい非線形ストレス項 $\nu'|\tau|^{2k}\tau_{i\ell}$ の添加が、それを可能にする。

- 我々は、$k = \frac{1}{2}$ にとったものを採用したわけである。但し ν' は、定数とは考えないで、

$$
\nu' = c\,h^2(x)
$$

の形であるとした。それでもなほ、Ladyzhenskaya 流の証明技巧によって、うまく広義解の存在が主張できるであろうと考えた。

- また、文献(3)では、$\tau_{i\ell}$ のところを $v_{i,\ell}$ として証明しているが、$\tau_{i\ell}$ でも証明できるであろうことは彼女自身示唆しているから、それを採った。詳細は文献(3)を直接見ていただきたいが、例えば、

> 〔定理〕方程式系(L)は、データ；$v|_S = 0$, $v|_{t=0} = a(x) \in \mathring{J}^1_{2+2k}(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ に対し、$k \geqq \frac{1}{4}$ のとき、唯一つの広義解 v をもつ。ここに $\mathring{J}_{2+2k}$ とは $\{a(x);\ \nabla\cdot a = 0,\ a|_S = 0\}$ を W^1_{2+2k} のノルムで完備化したものである。

文献

(1) Gartling, D.K. & Becker, E.B. (1976) Comp. Meth. Appl. Mech & Engrng. 8 (51~60)

(2) Ladyzhenskaya, O.A. (1969) 'The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow'*)

(3) 〃 (1967) Proc. Steklov Inst. Math. 102 (95~118)

(4) Douglass, J & Dupont, T (1970) SIAM J. Num. Anal 7 (575~626)

(5) Deardorff, J.W. (1970) J. Fluid Mech 41 (453~480)

(6) Reynolds, W.C (1976) in 'Annual Rev. of Fluid Mech. 8.' (183~208)

(7) Rheinboldt, W.C. (1976) in 'The Mathematics of Finite Element & Applications II (465~482)

(8) Tennekes, H. & Lumley, J.L. (1972) 'A First Course in Turbulence' [MIT press]

(9) Lions, J.L. (1970) in SIAM-AMS Proc. Vol 2 (11~23)

*) : Gordon & Breath 近く 訳書が出される由. (藤田, 竹下 訳にて)