数理解析研究所講究録
第 330 巻 1978 年 1-4

距離に依存する次元 d_2 について

埼玉大学教育学部　後藤　達生

距離に依存する次元関数 d_2, d_3, d_5, $d_0=\mu\dim$ は [2][3][4] 等において導入され，一般の距離空間 (X,ρ) において

$$d_2(X,\rho)\leq d_3(X,\rho)\leq d_5(X,\rho)\leq d_0(X,\rho)\leq \dim X\leq 2d_2(X,\rho)$$

が成立する，ただし $\dim X$ は X の被覆次元を表す([4] [5] [9])。

Roberts-Slaughter [10] が一般の距離空間において d_0 の実現定理を証明して以来，他の次元関数 d_i についての実現定理が成立するかどうかが問題とされてきた。

<u>実現定理</u>　距離空間 (X,ρ) において $d_i(X,\rho)<\dim X$ のとき $d_i(X,\rho)\leq k\leq \dim X$ なるかってな整数 k に対し，$d_i(X,\rho_k)=k$ となる ρ と位相同値な距離関数 ρ_k が存在する ($i=0,2,3,5$)。

$i=3,5$ の場合は J.C. Nichols [6] が一般の距離空間に対し，$i=2$ の場合はやはり Nichols [7] が特別の距離空間に対し

上の実現定理が成立することを示した。ここでは一般の距離空間 における d_2 の実現定理の証明の概略を述べる（[1]参照）。

$d_2(X,\rho) < \dim X = n$ とし，k を $d_2(X,\rho) = k \le n$ なるかってな整数とする。$\{C_1, C_1'; \cdots ; C_n, C_n'\}$ を X の n-defining system とする。 $j=1,2,\cdots$ に対し

$$A_j = \bigcup_{i=1}^{n} A_{ji}, \quad A_{ji} = \{x \in X : \rho(x, C_i) \le 1/j,\ \rho(x, C_i') \le 1/j\}$$

と定める。$\{\mathcal{U}_i\}$ を (X,ρ) の一様開被覆の列で $\mathcal{U}_{i+1} \overset{*}{<} \mathcal{U}_i$, mesh $\mathcal{U}_i < 1/i$ ($i=1,2,\cdots$) を満たすものとする。

$$B_j = St(A_j, \mathcal{U}_j),\ \mathcal{V}_j = \{B_j\} \cup \{U \in \mathcal{U}_j : U \cap A_j = \emptyset\}$$

とすれば，$\mathcal{V}_{j+1} \overset{*}{<} \mathcal{V}_j$ が成立し，各 $x \in X$ に対し $\{St(x, \mathcal{V}_j) : j=1,2,\cdots\}$ は x の近傍基となる。従って ρ と位相同値な X の距離関数 σ で，

$$\mathcal{V}_{i+1}^{\Delta} < \{S_{2^{-i}}(x,\sigma) : x \in X\} < \mathcal{V}_i^{\Delta} \qquad i=1,2,\cdots$$

を満たすものがある。このとき，$f_i : X \to I = [0,1]$ $(1 \le i \le n)$ を適当に定めれば，$f_i(C_i) = 0$，$f_i(C_i') = 1$ を満たし，さらにかってな $\varepsilon > 0$ に対し X の開集合 U が存在して，σ-diameter $U < \varepsilon$ かつ各 i に対し $f_i|(X \setminus U)$ は σ-uniformly continuous となるように出来る。そこで $g_k = (f_1, \cdots, f_k) : X \to I^k$ とし，X 上の距離関数 ρ_k を

$$\rho_k(x,y) = \sigma(x,y) + \sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - f_i(y)| \qquad x, y \in X$$

と定めれば，ρ_k は ρ と位相同値で，$d_2(X,\rho_k)=k$ を満たす。

参考文献

[1] T. Goto : On the realization of dimension function d_2, Proc. A.M.S. 58 (1976) 265-271

[2] R.E. Hodel : Note on metric-dependent dimension functions, Fund. Math. 61 (1967) 83-89

[3] M. Katetov : On the relation between the metric and topological dimension, Czech. M. J. 8 (1958) 163-166

[4] K. Nagami and J.H. Roberts : Metric-dependent dimension functions, Proc. A.M.S. 16 (1965) 601-604

[5] —— : Study of metric-dependent dimension functions, Trans. A.M.S 129 (1967) 414-435

[6] J.C. Nichols : Equivalent metrics giving a different values to metric-dependent dimension functions, Proc. A.M.S. 23 (1969) 648-652

[7] —— : The realization of dimension function d_2, Fund. Math. 77 (1973) 211-217

[8] J.H. Roberts : Metric-dependent function d_2 and covering dimension, Duke M. J. 37 (1970) 467-472

[9] —— : Realizability of metric-dependent dimensions,

Proc. A. M. S 19 (1968) 1439 – 1442.

[10] —— and F. G. Slaughter; Metric dimension and equivalent metrics, Fund. Math. 62 (1968) 1–5.