数理解析研究所講究録
第330巻 1978年 11-17

積空間の subsequentiality

愛媛大 理学部 野倉嗣紀

§1. 序

Sequential 空間の部分空間と同相な空間は subsequential 空間と呼ばれる。ここでは subsequential 空間に対し K. Nagami 氏により提出された2つの問題に対する完全解と部分解を与える。

問題 1. Lašnev 空間（＝距離空間の閉連続写像による像空間）は可算 compact, sequential な正則空間に埋め込むことができるか。

問題 2. Lašnev 空間の有限又は可算無限積は subsequential 空間か。

上の2つの問題に関して次のことを示す。

問題1について. 距離化可能でない Lašnev 空間は可算 compact, 可算 tightness をもつ正則空間には埋め込めない。

問題2について. 連続体仮説を仮定すれば（以下 CH と

記す）正則な Fréchet 空間 X と Y で $X \times Y$ が subsequential でないものが存在する。

Fréchet 空間は sequential 空間であるから上の結果は[8]で得られた定理「subsequential 空間の可算積は subsequential である」の反例を与えている。以下空間は全て正則であると仮定する。

§2. 問題1について

定義1([1, p.954]). 空間Xが可算 tightness をもつとは $\forall A \subset X$ と $\forall x \in Cl_X A$ に対し，可算集合 $B \subset A$ が存在して $x \in Cl_X B$ となることを云う。

定義2([3, p.109]). 空間Xの部分集合 U が sequentially open であるとは U の点へ収束する任意の極限点列は有限個の点を除いて全てUの点であることを云う. Xの任意の sequentially open な部分集合がXの open set であるときXを sequential 空間と云う.

定義3([3]). 空間Xが Fréchet 空間とは定義1のBとして極限点列がとれるときを云う。

以上の各空間の関係は

Lašnev space → Fréchet → sequential → subsequential → 可算 tightness をもつ

$R = \{0\} \cup \{1/n\,;\, n \in \omega\}$ を極限点列, $S = \sum_{i=1}^{\infty} R_i$, $R_i = R$

$A = \{0_n \in R_n\,;\, 0_n = 0, n \in \omega\}$ とし $T = S/A$ を A を一点と同一視した商空間とする.

<u>定理1</u>. T を可算 compact, 可算 tightness をもつ空間に埋め込むことはできない。

<u>定理2</u>. X を Lašnev 空間で距離化可能でないものとする. そのとき X は T の copy を closed subset としてもつ。

<u>系 1</u>. Lašnev 空間 X が可算 compact, 可算 tightness をもつ空間に埋め込めたとすると X は距離化可能である。

<u>系 2</u>. X を Lašnev 空間, Y を discrete でない空間とする. $X \times Y$ が Fréchet と仮定すれば X は距離化可能である。

§3. 問題2について

N を自然数全体の集合とする. $\mathcal{F}$ を N の filter とするとき

$N\cup\{\mathcal{G}\}$ で，Nの各点は孤立点，点$\{\mathcal{G}\}$ の近傍は$G\cup\{\mathcal{G}\}$; $G\in\mathcal{G}$ なる位相が入った空間を表すものとする．NのStone-Čech compact化 をβN，$M\subset N$ に対し $M^* = Cl_{\beta N}M - N$ を表すものとする。

定義4．点 $x\in X$ が空間Xの P-point であるとは，任意可算個のxの近傍の共通集合が再びxの近傍になっていることを云う

補題1([9, p415] CH)．N^* には P-point が存在する。

補題2([6, 定理1])．$\mathcal{G}=\{G_\alpha ; \alpha\in A\}$ をNの free filter とする。$G=\cap\{Cl_{\beta N}G_\alpha ; \alpha\in A\}$ とするとき，$N\cup\{\mathcal{G}\}$ が Fréchet 空間である必要十分条件は $G = Cl_{\beta N}(Int_{N^*}G)$ となることである。

補題3(CH)．pをN^*の P-point とする。そのときNの filter $\{V_\alpha ; \alpha\in\omega_1\}$ で次の性質をもつものが存在する。

i) $V_\alpha^* \subsetneq V_\beta^*$，$\alpha>\beta$

ii) $\{V_\alpha^* ; \alpha\in\omega_1\}$ はpのN^*での近傍基。

補題4(CH). Nに次の性質をもつ filter $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が存在する。

i) $N\cup\{\mathcal{F}\}$, $N\cup\{\mathcal{G}\}$ は共に Fréchet 空間,

ii) $\mathcal{H}=\{F\cap G\ ;\ F\in\mathcal{F},\ G\in\mathcal{G}\}$ はNの極大 filter.

証明の概略. p を N^* の P-point とし, $\{V_\alpha\ ;\ \alpha\in\omega_1\}$ を補題3で構成されたものとする. Nの部分集合族 $\{W_{\alpha 1},\ W_{\alpha 2}\ ;\ \alpha\in\omega_1\}$ を次の性質をみたすものとする.

$$W_{\alpha 1}^*\neq\phi,\quad W_{\alpha 2}^*\neq\phi,\quad W_{\alpha 1}^*\cap W_{\alpha 2}^*=\phi,$$

$$W_{\alpha 1}^*\cup W_{\alpha 2}^*\subset V_\alpha^*-V_{\alpha+1}^*.$$

そのとき

$$F=Cl_{\beta N}(\cup\{W_{\alpha 1}^*\ ;\ \alpha\in\omega_1\}),$$

$$G=Cl_{\beta N}(\cup\{W_{\alpha 2}^*\ ;\ \alpha\in\omega_1\}).$$

$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ をそれぞれ F, G の βN での近傍 filter をNに制限したものとすれば, 補題2より i) が示され, $F\cap G=\{p\}$ であることから ii) が示される.

補題5. $\mathcal{G}$ をNの極大 filter とする。$N\cup\{\mathcal{G}\}$ は subsequential ではない。

定理3(CH). Fréchet 空間 X, Y で X×Y が subsequential とならないものが存在する。

証明. $p \in N^*$ の p-point, $X = N \cup \{\mathcal{F}\}$, $Y = N \cup \{\mathcal{G}\}$ を点 p から補題4で構成された Fréchet 空間とする。

$$f : N \cup \{p\} \longrightarrow X \times Y \quad \text{を}$$

$$f(n) = (n, n)$$

$$f(p) = \{\mathcal{F}\} \times \{\mathcal{G}\}$$

で定義すれば f は埋め込みとなる。従って $X \times Y$ が subsequential ならば $N \cup \{p\}$ は subsequential となり補題5に反する。

参考文献

[1] A. V. Arhangel'skiĭ, On the cardinality of bicompacta satisfying the first axiom of countability, Dokl. Acad. Nauk SSSR, 187 (1964), 967-970 (Russian). English Transl. : Soviet Math. Dokl., 12 (1969), 951-955.

[2] J. Fine and L. Gillman, Extension of continuous functions in N^*, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), 376-381.

[3] S. P. Franklin, Spaces in which sequente suffice, Fund. Math., 57 (1965), 107-115.

[4] N. Lašnev, Continuous decompositions and closed mappings of metric spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165 (1965),

756-758 (Russian). English Transl.: Soviet Math. Dokl., 6 (1965), 1504-1506.

[5] N. Lašnev, Closed image of metric spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 170 (1966), 505-507 (Russian). English Transl.: Soviet Math. Dokl., 7 (1966), 1219-1221.

[6] V. I. Malyhin, On countable space having no bicompactifications of countable tightness, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 206 (1972), 1293-1296 (Russian). English Transl.: Soviet Math. Dokl., 13 (1972), 1407-1411.

[7] K. Morita and S. Hanai, Closed mappings and metric spaces, Proc. Japan Akad., 32 (1956), 10-14.

[8] N. Noble, Products with closed projection II, Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 169-183.

[9] W. Rudin, Homogeneity problem in the theory of Čech compactifications, Duke. Math. J., 23 (1956), 409-419.