数理解析研究所講究録
第 330 巻 1978 年 18-23

Lašnev 空間の次元について

筑波大 数学系　岡 晋平

一般に距離空間からの閉写像による像を Lašnev 空間と呼ぶ．また $\dim X$ は空間 X の covering dimension を表わす．最近 I.M. Leĭbo [3] によって得られた結果を改良することにより，講演者は次の定理を証明した．（[5] を参照）

定理：空間 X が $\dim X \leq n$ を満たす Lašnev 空間であるための必要十分条件は $\dim X_0 \leq 0$ を満たす Lašnev 空間 X_0 と X_0 から X 上への閉写像 f で $\mathrm{ord}\, f \leq n+1$ を満たすものが存在することである．（ここで $\mathrm{ord}\, f = \sup\{ |f^{-1}(x)| : x \in X \}$）．

この結果，距離空間の場合に K. Morita [4] によって示された事実とまったく相似な事実が Lašnev 空間においても成立することがわかったわけである．ここではこの定理の証明の概略を述べることにする．そのためには若干の準備が必要である．

$\mathrm{Ind}\,X = n$ を満たす正規空間 X において，閉集合 F とその閉近傍 G が $\mathrm{Ind}\,X$ を決定しているとは，$\overline{U} \subset G$ を満たす F の任意の閉近傍 U に対して $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Bd}(U) \geq n-1$ が成立している時のことを言う．（ここで $\mathrm{Ind}\,X$ とは空間 X の large inductive dimension を意味する）．

正規空間 X において，閉集合 F_i とその閉近傍 G_i からなる可算族 $\Phi = \{F_i, G_i\}_{i=1}^{\infty}$ が X の special family であるとは，X の任意の閉集合 X' に対し，ある自然数 j が存在して，$\{X' \cap F_j, X' \cap G_j\}$ が $\mathrm{Ind}\,X'$ を決定していることである．（[2]，[3] を参照）

Special family $\Phi = \{F_i, G_i\}_{i=1}^{\infty}$ を持つ正規空間 X から，距離空間 S 上への連続写像 g が Φ に関して special (map) であるとは次の2つの条件が成立している時のことを言う．

(1) 任意の i に関して $g(F_i)$ は S の閉集合である．

(2) 各 i に対して $g(F_i)$ の S における閉近傍 U_i が存在して $g^{-1}(U_i) \subset G_i$ を満たす．（[2]，[3] を参照）

以下，表われてくるすべての diagram は空間と連続写像から成り立っているものとする．

下記の commutative diagram 1 が pullback square であるとは，任意の commutative diagram 2 に対して，diagram 3 を commutative にするような $t' : T' \to T$ が一意的に存在

することである.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g"'] & T \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "r"] \\ Z & X \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Diagram 1.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g"'] & T' \arrow[l, "s'"'] \arrow[d, "r'"] \\ Z & X \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Diagram 2.

$$\begin{tikzcd} & & T' \arrow[dll, "s'"'] \arrow[dl, "t'"] \arrow[ddl, "r'"] \\ Y \arrow[d, "g"'] & T \arrow[l, "s"] \arrow[d, "r"'] & \\ Z & X \arrow[l, "f"] & \end{tikzcd}$$

Diagram 3.

上は pullback square の categorical な定義であるが，より直感的には T, r, s をそれぞれ次のように見做してもよい.

$$T = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\} \subset X \times Y.$$

$$r = p_X | T \quad ; \quad p_X : X \times Y \longrightarrow X \text{ は Projection.}$$

$$s = p_Y | T \quad ; \quad p_Y : X \times Y \longrightarrow Y \text{ は Projection.}$$

次はよく知られた結果である.

補助定理 1 : 上の Pullback square において次が成立する.

(1) もし f が perfect なら，s も perfect である.

(2) もし $\operatorname{ord} f \leqq n$ なら，やはり $\operatorname{ord} s \leqq n$ である.

次の結果は定理の証明にとって本質的である.

補助定理2 (S. Oka [5]) : 上の pullback square において, もし次の3つの条件が成立するならば, r は閉写像になる.

(1) g は閉写像である.

(2) X は Hausdorff 空間である.

(3) f は閉写像で, 任意の $z \in Z$ に対して $|f^{-1}(z)| < \aleph_0$ を満たす.

さて定理を証明しよう. 定理の条件が十分条件であることはよく知られている. ([6, 9.2.13] を参照). 必要条件であることを示すために Y を Lašnev 空間で $\dim Y \leqq n$ であると仮定しよう. その時, Y の special family Φ と, $\dim Z \leqq n$ を満たす距離空間 Z と, Φ に関する special map $g: Y \to Z$ が存在する. ([2] を参照) さらによく知られているように, この Z に対して $\dim X \leqq 0$ を満たす距離空間 X と X から Z 上への閉写像 f で $\operatorname{ord} f \leqq n+1$ を満たすものが存在する. そこで空間 T と写像 r, s で下の diagram 4 の lower square を pullback square にするようなものを作れば, 補助定理1より, s は閉写像となり $\operatorname{ord} s \leq n+1$ を満たす. また T は明らかに正規空間であって, [3] において $\dim T \leqq 0$ が証明されている. 一方 Y は Lašnev 空間であるから, ある

距離空間 M と M から Y 上への閉写像 h が存在する．そこで空間 T' と写像 r', s' で diagram 4 の outer square を pullback square にするようなものを作れば，pullback square の定義より，$t': T' \longrightarrow T$ で diagram 4 全体を commutative にするものが（一意的に）存在する．するとよく知られているように，diagram 4 の upper square も pullback square になる（[1] Exercise 21 E を参照）．そこで，この pullback square に補助定理2を適用すると，t' は閉写像になる．一方 T' は距離空間 $X \times M$ の部分空間として，やはり距離空間であるから，T' は結局 Lašnev 空間になる．以上，定理は証明された。

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "h"'] & & T' \arrow[ll, "s'"'] \arrow[dl, "t'"'] \arrow[ddl, "r'"] \\
Y \arrow[d, "g"'] & T \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "r"] & \\
Z & X \arrow[l, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Diagram 4.

References

[1] H. Herrlich and G. E. Strecker : Category Theory. Allyn and Bacon Inc., Boston (1973).

[2] I. M. Leĭbo : On the equality of dimensions for

closed images of metric spaces. Soviet. Math. Dokl., 15, 835 - 839 (1974).

[3] —— ; On closed images of metric spaces. ibid., 16, 1292 - 1295 (1975).

[4] K. Morita : A condition for metrizability of topological spaces and for n-dimensionality. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, 5, 33-36 (1955).

[5] S. Oka : A note on the covering dimension of Lǎsnev spaces. Proc. Japan Acad., 54, Ser. A (1978).

[6] A. R. Pears : Dimension Theory of General Spaces. Cambridge University Press, Cambridge (1975).