

## Lašnev 空間の次元について

筑波大 数学系 岡 晋平

一般に距離空間からの閉写像による像を Lašnev 空間と呼ぶ。また  $\dim X$  は空間  $X$  の covering dimension を表わす。最近 I.M. Leibo [3] によって得られた結果を改良することにより、講演者は次の定理を証明した。( [5] を参照 )

定理 : 空間  $X$  が  $\dim X \leq n$  を満たす Lašnev 空間であるための必要十分条件は  $\dim X_0 \leq 0$  を満たす Lašnev 空間  $X_0$  と  $X_0$  から  $X$  上への閉写像  $f$  で  $\text{ord } f \leq n+1$  を満たすものが存在することである。(ここで  $\text{ord } f = \sup \{ |f^{-1}(x)| : x \in X \}$  ) .

この結果、距離空間の場合に K. Morita [4] によって示された事実とまったく相似な事実が Lašnev 空間においても成立することがわかったわけである。ここではこの定理の証明の概略を述べることにする。そのためには若干の準備が必要である。

$\text{Ind } X = n$  を満たす正規空間  $X$  において、閉集合  $F$  とその閉近傍  $G$  が  $\text{Ind } X$  を決定しているとは、 $\bar{U} \subset G$  を満たす  $F$  の任意の閉近傍  $U$  に対して  $\text{Ind } \text{Bd}(U) \geq n-1$  が成立している時のことを言う。(ここで  $\text{Ind } X$  とは空間  $X$  の large inductive dimension を意味する)。

正規空間  $X$  において、閉集合  $F_i$  とその閉近傍  $G_i$  からなる可算族  $\mathfrak{A} = \{F_i, G_i\}_{i=1}^{\infty}$  が  $X$  の special family であるとは、 $X$  の任意の閉集合  $X'$  に対し、ある自然数  $j$  が存在して、 $\{X' \cap F_j, X' \cap G_j\}$  が  $\text{Ind } X'$  を決定していることである。( [2], [3] を参照 )

Special family  $\mathfrak{A} = \{F_i, G_i\}_{i=1}^{\infty}$  を持つ正規空間  $X$  から、距離空間  $S$  上への連続写像  $f$  が  $\mathfrak{A}$  に関して special (map) であるとは次の2つの条件が成立している時のことを言う。

- (1) 任意の  $i$  に関して  $f(F_i)$  は  $S$  の閉集合である。
- (2) 各  $i$  に対して  $f(F_i)$  の  $S$  における閉近傍  $U_i$  が存在して  $f^{-1}(U_i) \subset G_i$  を満たす。( [2], [3] を参照 )

以下、表われてくるすべての diagram は空間と連続写像から成り立っているものとする。

下記の commutative diagram 1 が pullback square であるとは、任意の commutative diagram 2 に対して、diagram 3 を commutative にするような  $t': T' \rightarrow T$  が一意的に存在

することである。

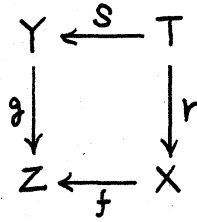


Diagram 1.

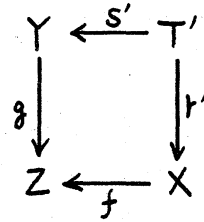


Diagram 2.

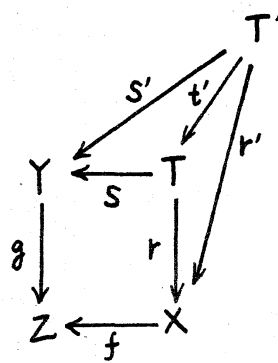


Diagram 3.

上は pullback square の categorical な定義であるが、より直感的には  $T, r, S$  をそれぞれ次のように見做してもよい。

$$T = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\} \subset X \times Y.$$

$$r = P_X|_T \quad ; \quad P_X: X \times Y \rightarrow X \text{ は Projection.}$$

$$S = P_Y|_T \quad ; \quad P_Y: X \times Y \rightarrow Y \text{ は Projection.}$$

次はよく知られた結果である。

補助定理 1 : 上の Pullback square において次が成立する。

- (1) もし  $f$  が perfect なら、 $S$  も perfect である。
- (2) もし  $\text{ord } f \leq n$  なら、やはり  $\text{ord } S \leq n$  である。

次の結果は定理の証明によって本質的である。

補助定理 2 (S. Oka [5]) : 上の pullback square において, もし次の3つの条件が成立するならば,  $\tau$  は閉写像になる.

- (1)  $g$  は閉写像である.
- (2)  $X$  は Hausdorff 空間である.
- (3)  $f$  は閉写像で, 任意の  $z \in Z$  に対して  $|f^{-1}(z)| < \aleph_0$  を満たす.

さて定理を証明しよう. 定理の条件が十分条件であることはよく知られている. ([6, 9.2.13] を参照). 必要条件であることを示すために  $Y$  を Lašnev 空間で  $\dim Y \leq n$  であると仮定しよう. その時,  $Y$  の special family  $\mathfrak{F}$  と,  $\dim Z \leq n$  を満たす距離空間  $Z$  と,  $\mathfrak{F}$  に関する special map  $g: Y \rightarrow Z$  が存在する. ([2] を参照) さらによく知られているように, この  $Z$  に対して  $\dim X \leq 0$  を満たす距離空間  $X$  と  $X$  から  $Z$  上への閉写像  $f$  で  $\text{ord } f \leq n+1$  を満たすものが存在する. そこで空間  $T$  と写像  $\tau, S$  で下の diagram 4 の lower square を pullback square にするようなものを作れば, 補助定理 1 より,  $S$  は閉写像となり  $\text{ord } S \leq n+1$  を満たす. また  $T$  は明らかに正規空間であって, [3] において  $\dim T \leq 0$  が証明されている. 一方  $Y$  は Lašnev 空間であるから, ある

距離空間  $M$  と  $M$  から  $Y$  上への閉写像  $h$  が存在する。  
 そこで空間  $T'$  と写像  $r', s'$  で diagram 4 の outer square  
 を pullback square にするようなものを作れば, pullback square  
 の定義より,  $t': T' \rightarrow T$  で diagram 4 全体を commuta-  
 tive にするものが (一意的に) 存在する。するとよく知ら  
 れているように, diagram 4 の upper square も pullback  
 square になる ([1] Exercise 21E を参照)。そこで,  
 この pullback square に補助定理 2 を適用すると,  $t'$  は閉写  
 像になる。一方  $T'$  は距離空間  $X \times M$  の部分空間として,  
 やはり距離空間であるから,  $T'$  は結局 Lašnev 空間になる。  
 以上, 定理は証明された。

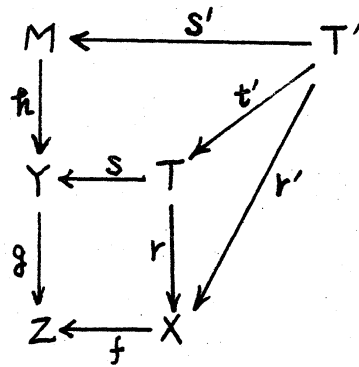


Diagram 4.

## References

- [1] H. Herrlich and G.E. Strecker : Category Theory.  
Allyn and Bacon Inc., Boston (1973).
- [2] I.M. Leïbo : On the equality of dimensions for

closed images of metric spaces. Soviet. Math. Dokl., 15, 835 - 839 (1974).

[3] — ; On closed images of metric spaces. *ibid.*, 16, 1292 - 1295 (1975).

[4] K. Morita : A condition for metrizability of topological spaces and for  $n$ -dimensionality. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, 5, 33-36 (1955).

[5] S. Oka : A note on the covering dimension of Läsnev spaces. Proc. Japan Acad., 54, Ser. A (1978).

[6] A. R. Pears : Dimension Theory of General Spaces. Cambridge University Press, Cambridge (1975).