数理解析研究所講究録
第331巻 1978年 30-50

The Lorenz Dynamical System

北大 工学部 長島知正
理学部 島田一平

§1. 序論

最近,(熱)統計力学の分野において,従来の研究の枠をこえて,熱平衡状態から非常に隔った非線型領域での非平衡状態の研究が意識的に行われつゝある。特に,外部からエネルギー(又は,粒子)の補給を受けた巨視的体系の定常状態の類別,その(不)安定性及び巨視的状態のまわりの"ゆらぎ"の性質etcをめぐる議論がなされ,非平衡開放系に特徴的な"散逸構造"(熱平衡状態での構造に対比して)の概念を通し,非平衡状態での巨視的状態の統一的理解をはかる努力が続けられている。[1] この様な立場からは,流体力学系は,もっとも典型的な問題を提供しており,いわゆる"乱流"と呼ばれる現象は,非平衡状態に於ける巨視的な"相"の一つと見なされる。[4]
Ruelle-Takens による散逸力学系の"generic"な性質としての"strange attractor"の存在に関する命題は,

この意味で物理学者の注目をひく理由があった。更に、その様な"strange attractor" (Axiom-A attractor)上での不変測度の存在と変分原理による不変測度の特徴付けを与えたBowen, Ruelleらの仕事は、何よりも"乱流の統計力学"の基盤を考える上で、極めて有力な方向を指唆していると考えられる。
然ながら、Hamilton系のflowのエルゴード問題の例に見られる如く、物理的に意味のある具体的モデルから、数学的厳密な結果が得られることは稀であり、この小論では、多少とも、物理的に興味のある、Lorenz力学系に関して、我々の数値実験の結果を中心に報告する。

§2. Lorenz力学系

Lorenz力学系の物理的背景etc.について、詳しく述べる余裕はないが、若干の説明を加える。(詳しくは、文献2を参照)
Lorenz系は、重力場のもとに、下から熱せられた流体の不安定性(熱対流発生)の問題(普通Benard問題と呼ばれている)を基点にもつ。
浮力を考慮した粘性流体の方程式(Navier-Stokes eq.)の解を(適当な境界条件と系の対称性を考えて)空間的にFourier分解

して，次の3つのモードでdecoupleした方程式をLorenz力学系と呼ぶ。

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y$$
$$\dot{Y} = -XZ + \gamma X - Y \qquad (1)$$
$$\dot{Z} = XY - \beta Z$$

変数（パラメータ）は，元の（偏微分）方程式で，次の内容を持っている。 Xは，流れ関数の基本モード，Y及びZは，温度場の基本及び第2高調波モードである。γ, σ, b は夫々Rayleigh数，Prandle数及び系の幾何学的形状で決まる定数である。又（σ, b, γ）は総て非負の実数。

§2－1. 線型解析など。

方程式(1)の右辺で定義されるベクトル場 $\mathbb{X}$ で定められる力学系（R^3, $\mathbb{X}$） は 不動点（$\mathbb{X}=0$） として (i) $0<\gamma<1$ で，$x_0=(0,0,0)$ 又 (ii) $\gamma>1$ で，$x_\pm=(\pm c, \pm c, \gamma-1)$ 但し，$c=\sqrt{b(\gamma-1)}$ をもち，線型安定性より 「a) $0<\gamma<1$ ‥‥ x_0 は安定 b) $1<\gamma<\gamma_T \equiv \sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)$ ‥‥ $x_\pm$ のみ安定 c) $\gamma>\gamma_T$ ‥‥ x_0, $x_\pm$ 共不安定」 であることが分る。ここで，特に $\gamma>\gamma_T$ が興味ある。

又，更にこの力学系が次の性質を持つことは容易に認められる。

i) 系の総ての解は，有界な領域にboundされる。

ii) 系の時間発展に伴い，体積要素は一定の割合で縮少する。

iii) 力学系(1)は，　$(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, Z)$ の変換に不変。

§2-2.　大域的性質　・・・・　双曲的アトラクター

Lorenz は、パラメータとして，$(\gamma, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ を選び，非周期的解が得られること数値的に示した。ここでは，R^3 での軌道の大域的振舞いを（$z = \gamma - 1$ の断面で）図1-a) に示した。又この断面上での dynamics を表わす Poincaré map を図1-b) に示した。(この P-map は，Y 軸で軌道をパラメトライズして得た。) 図1-a) に示した構造は初期条件を(この構造内，或は，)この構造から離れた点に変えた場合にも，(数回のステップの後には) この構造に吸い込まれるので，attractor の概形（断面上の）を示めしていると考えられる。(この attractor を以後 original Lorenz attractor と呼ぶ) 図1-b) に示めした P-map よりこの力学系が一つの膨張的次元を持っていること又，回帰的性質を持つことが分る。 attractor の概形は断面上でほゞ線分に見えるが，この力学系が式(1)で定義された微分方程式であることより，線分ではなく，概形を

表わす線分と局所的に直交する方向に稀薄の構造をつくっていると考えられるが，これを数値的に示すのは，必ずしも簡単ではない。図1-(b)のP-Mapに見られる膨張的次元の存在と§2-1の(ii)で述べた性質を共存させる状況を考えれば，Lorenz attractorが双曲型の構造を持っていることが了解されよう。尚，Lorenz力学系の大域的性質に関して，原点(0,0,0)にある(不安定)不動点x_0の安定多様体(2次元)は，この系の特徴的性質である2つの(不安定)不動点$x_\pm$のまわりのspiral状の運動を特徴付ける基本的役割(図1-(b)のP-mapのsingular pointに注目されたい)を果しているが，この多様体の位相幾何学的構造は極めて"奇妙"なものになっていると予想され，式(1)で定義される本来のLorenz力学系の位相的性質はほとんど分っていないことを付け加えておきたい。

§2-3. アトラクターの分岐

この original Lorenz attractor の構造安定性は，Guckenheimer etc.[3)]により，互いにhomeomorphicでないattractorの存在が示され，構造不安定であるとされている。(但し，彼等の議論は，式(1)で定義される本来のLorenz系自身を調べたものではない。式(1)で定義される系を数値的に，(σ, bを固定)パラメータrを$r \gtrsim r_T$ の近傍で変化

させた場合，attractorの構造の大きな変化は見られない。）

さて，パラメータr（σ，b：fix）を変化させた時，$r=r_T$でsubcritical bifurcationをすることは良く知られている。今，（σ，b：fix）$r\to$大なるとき，Lorenz attractorは，どんな構造を採り，又，そのbifurcationはどんなタイプであるのか？ 簡単に述べる。ここでは，$r\doteqdot 220$の近傍に（$\sigma=16.0$，$b=4.0$）限ることにする。

$r\doteqdot 228$では，Lorenz系のattractorは図2に示した様なperiodic attractorである。

図－2

ここで，$r\to$小の方向にパラメータを変えれば，周期が2^n（$n=1,2,\cdots$）のperiodic attractorが逐次分岐してくる。(*) 又，逆に$r\to$大の方向に変化させるとあるrの値で突然periodic attractorから"strange attractor"に分岐する。ここであげた2つのタイプのperiodic orbitのbifurcationは，Lorenz力学系のみならずR^3で定義される力学系のchaoticなattractorの存在へ導く，一つの一般的bifurcationのschemeになる可能性がある。5),6),7)（ここで述べた2つのタイプのbifurcation自身はBrunovskyによって調べられたものと考えられるが，この分岐が逐次おこる現象の解析は，未だ一次元

注 (*) §4-2でこの立場から，パワー・スペクトルの例が示される。

差分系を除いて 完全 なされていない）

§3. Ljapunov 特性数[8,9]

§2-2. で Lorenz attractor には双曲性が認められることを述べたが，ここでは，その双曲性を定量的に特徴付けるため，Ljapunov 特性数に関する定理とその数値的解法について説明する。 ここで述べる Ljapunov 数の理論は，Sinai による古典力学系のエントロピーの理論との関連に於いて，比較的最近になって注目されている。附録1で，数値計算の基礎となる部分の Ljapunov 数に関する定理をまとめておいた。記号 etc の詳細は附録に従うことにして，Ljapunov 特性数は次の様に定義される： 今，$\{T^t\}$ を flow，多様体 M 上，$x \in M$ での接空間 E_x から T_x^t での接空間 $E_{T_x^t}$ への導写像を dT_x^t とする。

i) （一次元）Ljapunov 特性数；$\chi(e, x)$

$$\chi_\pm(e, x) = \overline{\lim_{t\to\pm\infty}} \frac{1}{|t|} \ln \| dT_x^t \cdot e \|$$

（ 但し，e は一つのベクトル $\in E_x$ である）

ii) （k 次元） Ljapunov 特性数；$\chi(e^k, x)$

$$\chi_\pm(e^k, x) = \overline{\lim_{t\to\pm\infty}} \frac{1}{|t|} \ln \lambda(e^k, dT_x^t)$$

ここで，$\lambda(e^k, dT_x^t)$ は E_x のある基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$

によって生成される線型空間 e^k に関し，($dT_x^t e_1$, $dT_x^t e_2$, ・・・，$dT_x^t e_k$) によって決まる平行体 (parallelotope) の体積要素であり，e^k 方向の膨張係数と呼ばれる。$k=1$ の場合の膨張係数は $\lambda(e^1, x) = \| dT_x^t \cdot e_1 \|$ である。又，$k=1$ の場合 あるベクトル $e \in E_x$ を"任意に"選べば，一次元 Ljapunov 数の内 ($\chi_+(e_i, x)$，$i=1,2,\cdots,k$) 最大の Ljapunov 数を与える。

この最大 Ljapunov 数は，図3 で示す方法によって数値的に評価できる。

図3

図中に示された量を用いて，次の量：k_n を計算できる。

$$k_n(\tau, x, d) = (n\tau)^{-1}\sum_{i=1}^{n} \ln(|d_i|/|d|)$$

この k_n は，$n \to \infty$ の極限で最大 Ljapunov 数を近似することになる[9]。

今，あるベクトル e として，図3の中の($y_0 - x_0$)をとる。即ち，$e = y_0 - x_0$ とする。充分微小な $|d|$ に対し，(τ: fix)

$$|d_1|/|d| \doteqdot \|dT_x^{\tau} \cdot e\| / \|e\|$$

が成立つ。

導写像に対する鎖法則：$dT_x^{t+s} = dT_{T_x^s}^{t} \circ dT_x^{s}$ より，

$$|d_i|/|d| = \|dT_x^{i\tau} \cdot e\| / \|dT_x^{(i-1)\tau} \cdot e\| \qquad i=1,2,\cdots$$

が成立つ。

このことより，

$$k_n(\tau, x, d) = (n\tau)^{-1}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(|d_i|/|d|\right)$$

$$\cong (n\tau)^{-1}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\|dT_x^{i\tau}\cdot e\|/\|dT_x^{(i-1)\tau}\cdot e\|\right)$$

$$= (n\tau)^{-1}\ln\left(\|dT_x^{n\tau}\cdot e\|/\|e\|\right)$$

が成立する。

この k_n を Lorenz 力学系に適用した結果，初期条件には依存しない漸近的に一定な正定数が与えらる。このことは，最大 Ljapunov 数が正定数を意味することより，Lorenz 力学系がエルゴード的であることの強い保証になる。[11]

§4. 統計的性質

この節では，attractor 上に制限した力学系の統計的性質に関する数値実験の結果を簡単に述べよう。

最大 Ljapunov 数が正定数であり，かつ又，初期条件に依存しないという事実は Lorenz 系が attractor 上で ergodic であると同時に，この attractor 上に不変測度が存在すれば，その不変測度に関する Kolmogorov entropy に結び付くことによって混合的でもあることを示唆する。

4−1. 不変測度

Lorenz 系が不変測度をもつことを示すため，y座標上に

射影した不変測度を図4 に示した。

図4

4-2. パワー・スペクトル

a) original Lorenz attractor に関するパワー・スペクトルは、文献10で与えられている。

b) ここでは、$\gamma \gg$ 大なるパラメータの領域で見付けだされた periodic な attractor からの逐次分岐にそって power spectrum* の例を図5 に示めした。(*大 y座標についての)

図 5-(a) ~(d)

[尚(a)は周期解、
(a)以外は chaotic branch の解

power spectrum は次の式で計算した。

$$\langle \tilde{f}(\omega) \rangle = 1/n \sum_{j=1}^{n} 1/T \left| \int_{t_j}^{T+t_j} f(t) \exp(i\omega t)\, dt \right|^2$$

ここで、$n = 60$, 1つの time series には 1024個のサンプリング点を含む。(但し、我々の計算には window をかけていない為スペクトルの微細構造はあまり信用できないが、global なスペクトルの形状は変らないものと考えられる)

ここに示した、brunovsky type の periodic attractor の逐次(転移)分岐の延長上にある chaotic branch でのスペクトル(特に図5-(b))と original Lorenz attractor 上のパワースペクトルは、かなり異っている。

§5、終りに

以上，数値計算に基いて，Lorenz系が，具体的な系として，散逸系におけるエルゴード的な力学系になっていることの状況証拠を明らかにして来た。以上述べて来た結果を，より厳密なものにする一つの方法として記号力学の方法は有効と思われる。

最後に，ここで扱ったタイプの力学系は，従来，物理でのエルゴード性の問題の対象がミクロのレベルでの粒子の構成する力学系（Hamilton系）であったのに対し，ここでは，マクロのレベルでの（流体力学的階層での）散逸的力学系であり，熱力学極限（$N\to\infty$）の問題をふれずに，力学系のエルゴード性が直接，物理的観測量と結びつき得るものであり，この種のエルゴード問題の物理的位置付けは極めて異ることを指摘して終りたい。

附録：　ここでは，本文中で述べた最大Ljapunov数に重きおいて，Osledecによる Ljapunov数に関する定理を文献9にそってまとめておく。

記号：

M; 微分可能 (C^2) な n 次元コンパクト多様体

E_x; $x \in M$ での接空間

$\|\cdot\|$; M上のリーマン計量

$\{T^t\}$; flow , $T^t x = x(t)$ ($x(0) = x$)

dT_x^t; x でのMの接空間 E_x から T_x^t での接空間 $E_{T_x^t}$ への導写像

μ; M上の (normalized) 測度 ($\{T^t\}$:不変)

定理 $M_1 \subset M$, $\mu(M_1) = 1$ とし, $x \in M_1$ に対し

1). 総ての $e \in E_x$ ($e \neq 0$) について, 次の極限が存在しかつ有限である。

$$\lim_{t \to \infty} 1/t \ \ln \|dT_x^t \cdot e\| = \chi(e, x)$$

2). E_x の基底の中で次の様なものが存在する。

$\Pi = \{(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \cdots, \tilde{e}_n) : E_x$ の基底$\}$ として,

$$\sum_{i=1}^{n} \chi(e_i, x) = \inf_{\Pi} \sum_{i=1}^{n} \chi(\tilde{e}_i, x)$$

3). $\chi_i(x) = \chi(e_i, x)$, $1 \leq i \leq n$ として, $\{\nu_j(x)\}_{1 \leq j \leq s(x)}$ を $\{\chi_i(x)\}_{1 \leq i \leq n}$ の中の異なる Ljapunov 数とし, $k_j(x)$ を $\nu_j(x)$ の重複度とする。又, $\nu_i < \nu_j$, if $i < j$ とする。

このとき, 総ての $x \in M_1$ に対し, 次の性質を有する E_x の線型部分空間 $\{H_l\}$, ($l = 1, 2, \cdots, s$) が存在する

i) $E_x = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_s$

ii) $\dim H_\ell = k_\ell(x)$, $\quad 1 \le \ell \le s$

iii) if $e \in H_\ell$ $(e \neq 0)$, then

$$\lim_{t \to \pm\infty} 1/t \ \lim \| dT_x^t \cdot e \| = \pm \nu_\ell(x), \quad 1 \le \ell \le s$$

iv) if $e \in H_1 \oplus \cdots \oplus H_\ell$, but $e \notin H_1 \oplus \cdots \oplus H_{\ell-1}$, then

$$\chi(e, x) = \nu_\ell(x), \quad 1 \le \ell \le s \qquad //$$

文献（極めて不完全であるが，直接関係するものをあげる）

1) P. Glansdorff and I. Prigogine : Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations (Wiley, 1971)

2) 長島知正，島田一平 : 日本物理学会誌 33 (1978) 第6号 P.505 ，及びこの文献を参照されたい

3) J. Guckenheimer : The Hopf bifurcation and its Application (Springer 1976) P.368

4) 富田和久 : 数理科学 4 (1978) 18.

5) I. Shimada and T. Nagashima : Prog. theor. phys 59 (1978) 1033.

6) K. Tomita and T. Kai : Phys. Letters 66A (1978) 91.

7) T. Nagashima : Ôji seminar (1978. Kyoto) での講演.

8) V. I. Oseledec : Trans. Moscow Math. Soc. 19 (1968) 197.

9) G. Benettin, L. Galgani, and J. Strelcyn : Phys. Rev A 14 (1976) 2338.

10) Y. Aizawa and I. Shimada : Prog. Theor. Phys. 57 (1977), 2147.

11). T. Nagashima and I. Shimada : Prog. Theor. Phys. 58 (1977) 1318.

Fig. 1-(a)

$z = \gamma - 1$面の Lorenz attractor の概形 (schematic)

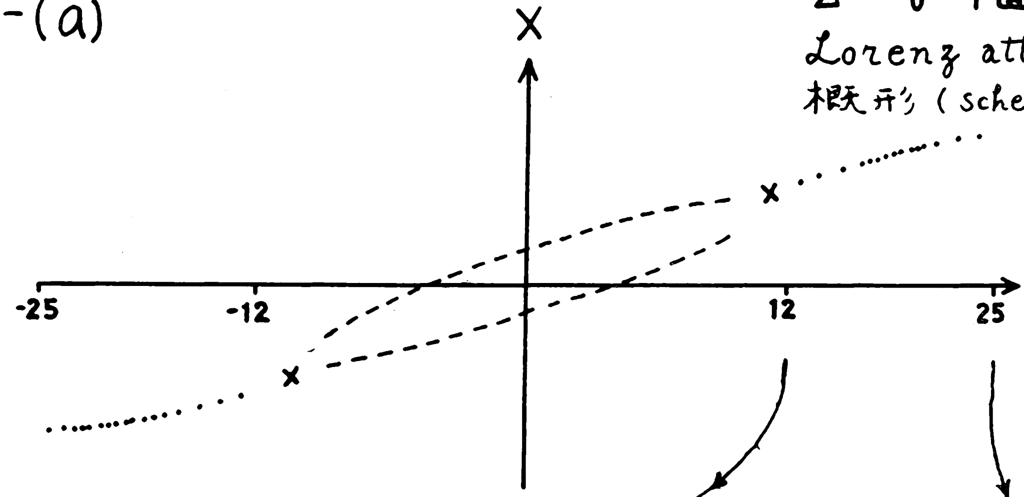


Fig. 1-(b)

(a)に対応する Poincaré Map

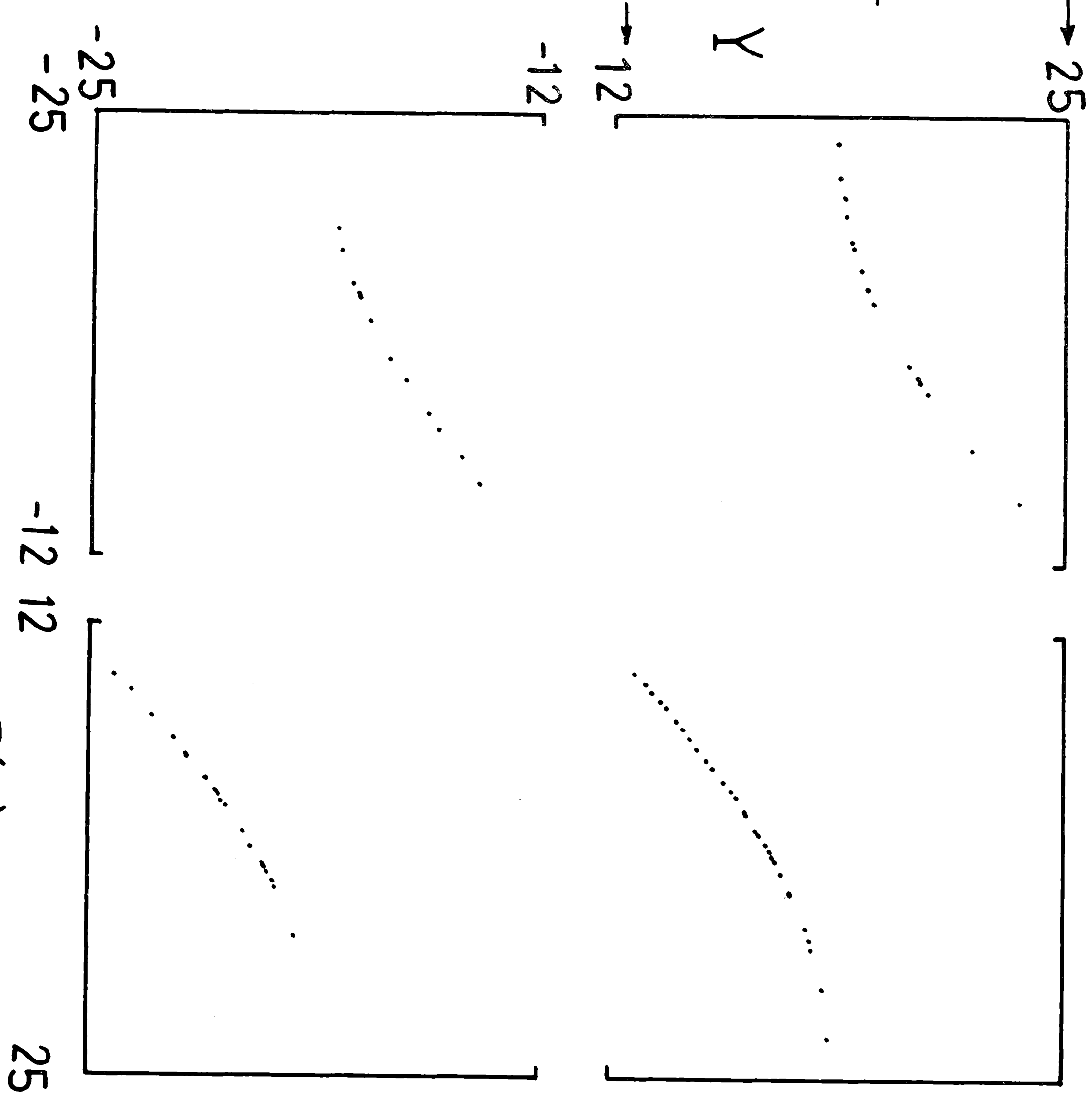


Fig. 2

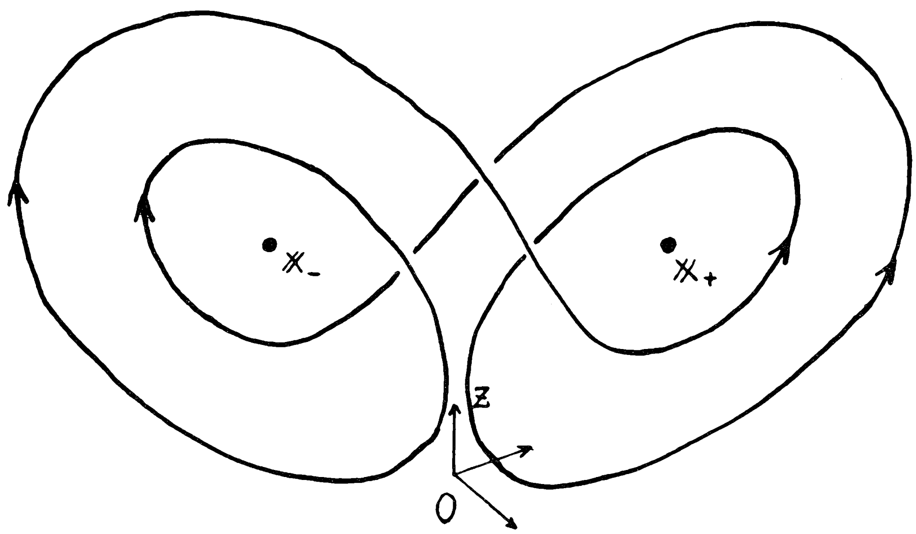


Fig. 3

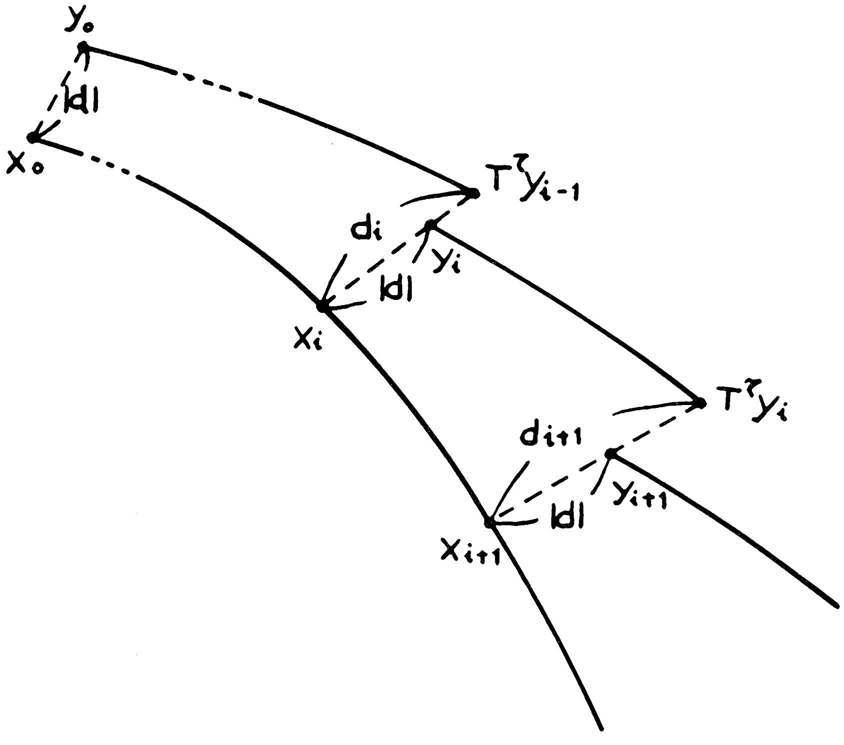
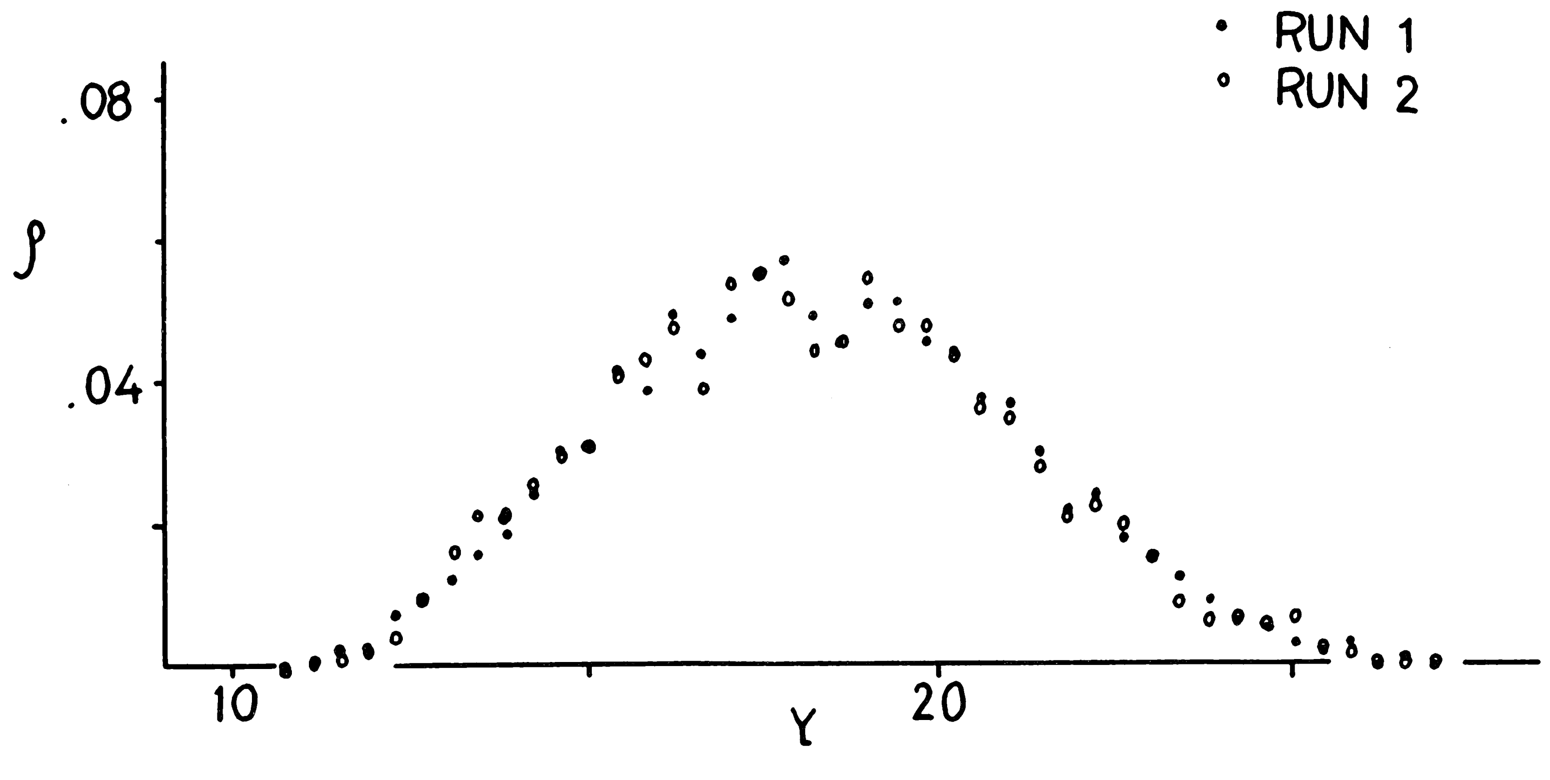


Fig. 4

$$\rho_{\vec{x}_0}(\vec{x}) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int^{T} \delta(\vec{x} - f^{t}(\vec{x}_0))\, dt$$



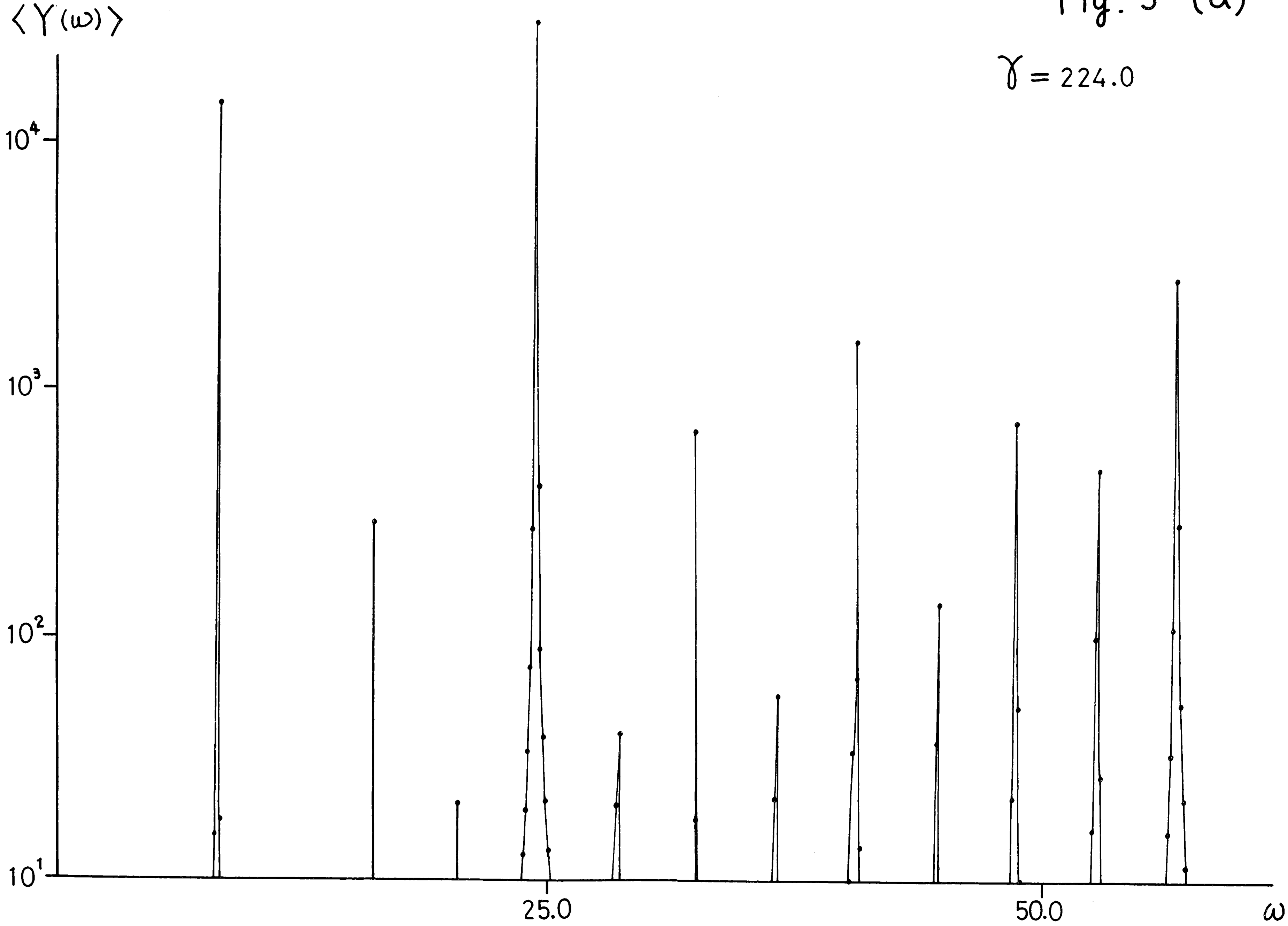


Fig. 5-(a)

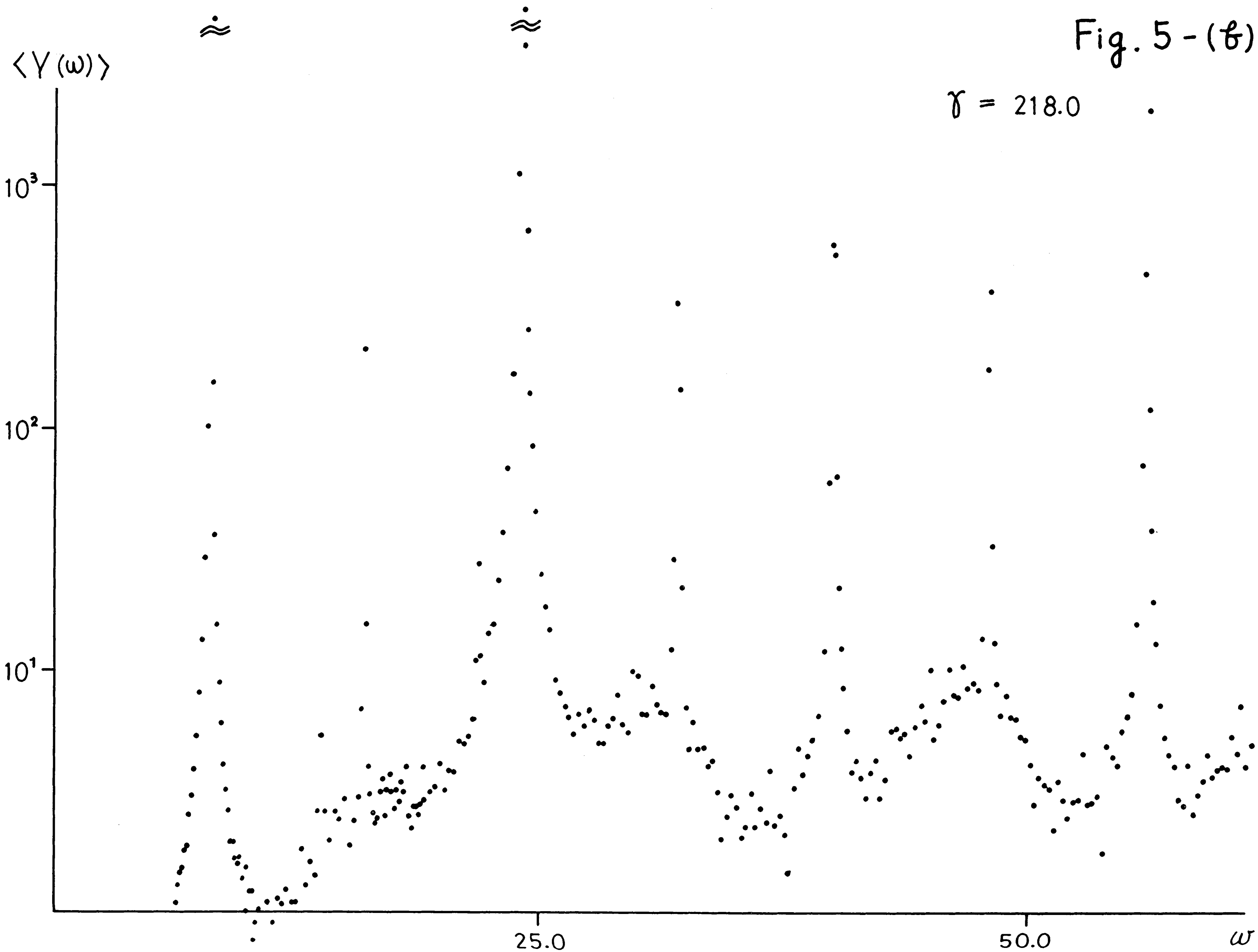


Fig. 5-(b)

Fig. 5 - (c)

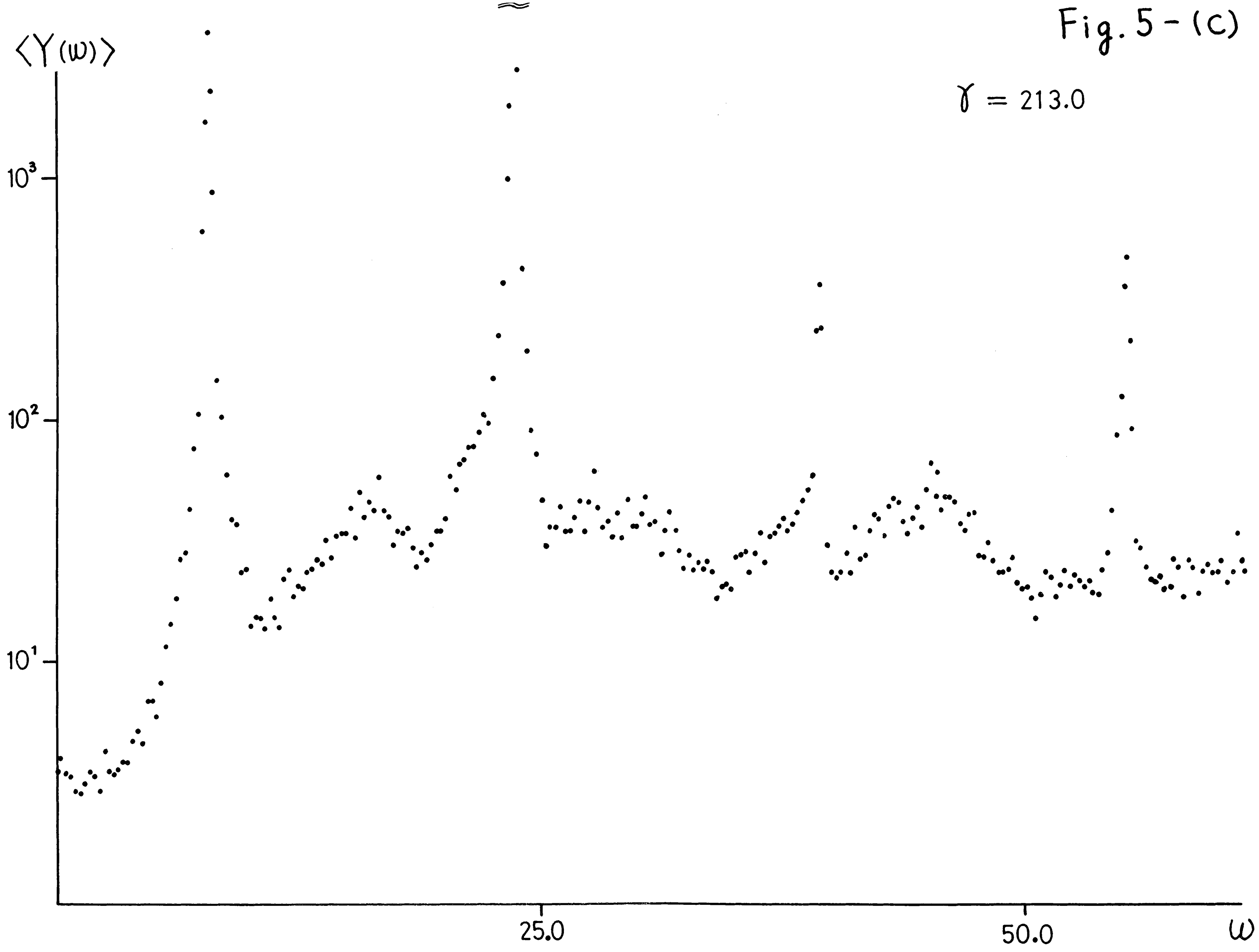
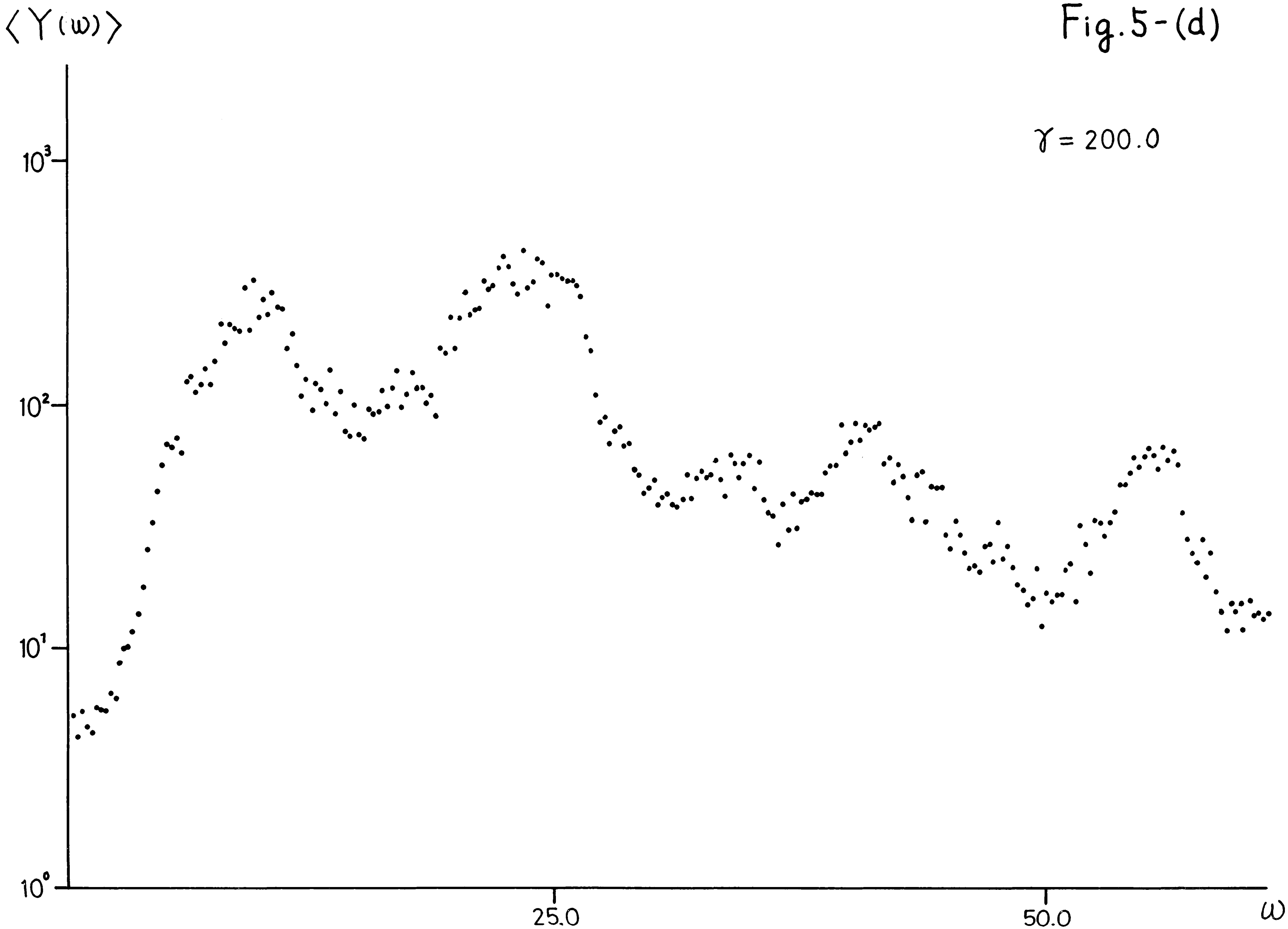


Fig. 5-(d)


$\langle Y(\omega) \rangle$
$\gamma = 200.0$
10^3
10^2
10^1
10^0
25.0
50.0
ω