数理解析研究所講究録
第 333 巻 1978 年 1-7

On the Reconstruction of a Graph

東海大 理　恵羅 博
上智大 理工　斉藤 友克

ここで考えるグラフはすべて有限単純グラフ，すなわち，ループ，多重線を持たず，向き付けを考えない有限グラフとする。グラフ G の点集合を VG，線集合を EG で表す。任意の $v \in VG$ に対して，v 及び v に隣接するすべての線を G から取り除いて得られる G の部分グラフを G_v で表す。

P. J. Kelly [6] と S. M. Ulam [12] によって次のような問題が提起された。

問題 1.　すべての $v \in VG$ に対して G_v が与えられたとき
これらのグラフの集まりから G は決定可能か？

表現を変えてもう少し正確に述べれば次のようになる。G と H を 2 つのグラフとし，それらの点集合の間に 1 対 1 写像 $\sigma : VG \longrightarrow VH$ が存在して次の条件を満たしているとする。「任意の $v \in VG$ に対して $G_v \cong H_{\sigma(v)}$ 」 このとき G と H との関係を $G \overset{R}{\sim} H$ で表す。

問題 1.′　$G \stackrel{e}{\sim} H$ ならば $G = H$ か？

特にGが tree の場合については Kelly [6] によって肯定的に解決された。更に広い範囲のグラフについても，いくつかの肯定的な結果が得られているが，一般のグラフに対しては未だ解決されていない。一方，与えられる部分グラフの条件を変えることによって，いくつかの異なる決定問題も提起されている。ここでは，これらの問題を整理して紹介する。

グラフGに対して，G_v 全体の集まりを $\mathcal{D}_1$ で表し，問題1. の意味で決定可能なグラフを $\mathcal{D}_1$-reconstructible であるという。（注．$\mathcal{D}_1$ には，一般に，同型なグラフも重複して含まれる。）　任意の $e \in EG$ に対して，Gから e を取り除いて得られるGの部分グラフを G^e で表す。グラフGに対して，G^e 全体の集まりを $\mathcal{D}_1'$ で表す。問題1と同様に次のような問題が考えられる。

問題 2.　$\mathcal{D}_1'$ が与えられたとき，Gは決定可能か。[F. Harary 4]

問題1. と問題2 との間には次のような関係が知られている。

命題 [R.L.Hemminger 5]　Gが $\mathcal{D}_1'$-reconstructible であることの必要十分条件は，Gの線グラフ L(G) が $\mathcal{D}_1$-reconstructible であることである。

命題〔D. L. Greenwell 2〕 グラフGの$\mathcal{D}_1'$が与えられれば，$\mathcal{D}_1$は一意に決定される。

したがって問題2は問題1の特別な場合とみることができる。

次の問題はHarary〔4〕による。

問題3. $\mathcal{D}_0 = \{G_v \mid v \in VG\}$とするとき，任意のグラフGは$\mathcal{D}_0$-reconstructibleである。

（注、$\mathcal{D}_0$は，$\mathcal{D}_1$に含まれる部分グラフのうち，同型でないものを1つづつ集めたものになる。）

問題1.，3.について未解決なグラフは次の2つの類に大別できる。

1）non-separableグラフ，すなわち，連結でcut-pointを持たないグラフ。

2）連結で，次数1の点を持ち，uni-cyclic（cycleを2つ以上含む）でないグラフ。

これらのグラフの更に有効な類別を考えることが問題解決に役立つと考えられる。上の1），2）に属さないグラフ，例えば，非連結グラフ，cut-pointを持ちend-pointを持たないグラフ，uni-cyclicグラフ等は$\mathcal{D}_1$-reconstructibleである。〔例えば3.を見よ〕 1）のクラスでも，構造に著しい特徴のあるいくつかのグラフに関しては若干の結果が得られ

ている。

命題［B. Manvel 10］ 極大 outer-planar グラフは，
$\mathcal{D}_0$-reconstructible である。

命題 G を 2-connected で以下の条件をみたすグラフとする。

(1) G の２つの誘導部分グラフ H，K は 3-connected で，$VG = VH \cup VK$

(2) 任意の点 $v \in VH$，$u \in VK$ に対して，

$|E\langle\{v\}, K\rangle| + 1 \leq |EK|$

$|E\langle\{u\}, H\rangle| + 1 \leq |EH|$

（ただし，$\langle\{v\}, K\rangle$，$\langle\{u\}, H\rangle$ はそれぞれ，v, K，u, H で生成される誘導部分グラフ）

このとき，グラフ G' に対して，G と G' の $\mathcal{D}_1$ が等しければ，G' の部分グラフで，上の (1)，(2) の条件をみたす H'，K' が存在し，$H' \cong H$，$K' \cong K$．

問題２の場合も上と類似した結果が得られている。また，グラフの構造的特徴を手がかりとしない次のような結果もある。

$|VG| = n$，$|EG| = m$ とする。

定理［L. Lovász 7］ $m > \frac{1}{2}\binom{n}{2}$ ならば G は $\mathcal{D}_1'$-reconstructible である。

定理［V. Müller 11］　$m > n(\log_2 n - 1)$ ならば G は，
　　$\mathcal{D}_1'$ - reconstructible である。

VG の部分集合 $S \subset VG$ に対して，S とそれらの点に隣接する線をすべて G から取り除いて得られる G の部分グラフを G_S で表す。次の問題は［Kelly 6］による。

問題 4. 任意の正の整数 s に対して，次の条件を満たす正の整数 $D(s)$ が存在する。

　$\mathcal{D}_s$ を G_S ; $S \subset VG$, $|S| = s$ 全体の集まりとするとき，$|VG| \geq D(s)$ ならば G は $\mathcal{D}_s$ - reconstructible である。

G が tree の場合，次の結果が得られている。

定理［W. B. Giles 1］　tree は $\mathcal{D}_2$ - reconstructible である。

一般のグラフに関しては，ほとんど何も判っていない。
［例えば 8 を見よ］

グラフの invariants，グラフ作用素等の概念が上記の決定問題にどのような役割をもつかほとんど未知である。次のようないくつかの結果がある。

命題［2］　$\mathcal{D}_1$ ($\mathcal{D}_1'$) はグラフの degree sequence を決定する。

命題　$\mathcal{D}_1$ は arboricity を決定する。

命題　任意のグラフ G の中間グラフ $M(G)$ は $\mathcal{D}_1$-reconstructible である。

命題　$\mathcal{D}_1'$ は spec(G) を決定する。

命題　$\mathcal{D}_1$ が $\mathcal{D}_0$ と一致するならば，G の自己同型群は，単位群である。

ここで，グラフ G を rooted グラフ (G, R) とすると，以下のことが示せる。

命題　$\mathcal{D}_1(R)$ は root R との距離が l の点の個数を決定する。

命題　$\mathcal{D}_1(R)$ は $d(v_i, R)$ を決定する。ここで v_i は $G - v_i = G_i$ となる点。

REFERENCES

[1] W. B. Giles　Reconstructing trees from two points deleted subtrees　Discrete Math. 15 (1976) 325-332

[2] D. L. Greenwell Reconstructing graphs　Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971) 431-432

[3] D. L. Greenwell, R. L. Hemminger　Reconstructing graphs　The Many Facets of Graph Theory L.N.M. 110 Springer '69

[4] F. Harrary　On the reconstructions of a graph from a collection of subgraphs

Czechoslovak Academy of Sciences, Prague/Academic Press
New York (1965) 47-52

[5] R. L. Hemminger On reconstructing a graph
Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969) 185-187

[6] P. J. Kelly A congeruence theorm for trees
Pacific J. Math. 7 (1957) 961-968

[7] L. Lovász A note on the line reconstruction problem
J. Comb. Th. (B) 13 (1972) 309-310

[8] B. Manvel Some basic observations on Kelly's Conjecture for graphs
Discrete Math. 8 (1974) 181-185

[9] B. Manvel On reconstructing graphs from their sets of subgraphs
J. Comb. Th. (B) 21 (1976) 156-165

[10] B. Manvel Reconstruction of maximal outerplanar graphs
Discrete Math. 2 (1972) 269-278

[11] V. Müller The edge reconstruction hypothesis is true for graphs with more than $n \log_2 n$ edges
J. Comb. Th. (B) 22 (1977) 281-283

[12] S. M. Ulam A collection of mathematical problems
New York, Wiley-Intersciences P29 (1960)