数理解析研究所講究録
第333巻 1978年 8-56

グラフ方程式について

日本医大　秋山 仁
東京理大・理　浜田 隆資
日本医大　金子 紀美子

§1. 序

グラフ方程式の概念は、最初に Cvetković, Simić [14], [15] によって導入された。この概念は、グラフ理論の古くからある分野、たとえばグラフの特徴づけ、因子分解、同型性、種々のグラフの不変数（点、線の数から、難しいものはスペクトラム、染色数 etc.）等と深い関連をもつものである。このテーマの特殊性により、体系的な理論の発展は難しい。しかしながら、個々のグラフ方程式の興味は、グラフのどの不変数に着目し、いかに彩やかに解くか、または解グラフがおもしろいもの（Petersen Graph, Platonic Graph etc.）になるものを見つけることが、このテーマの最大の焦点であり、そのために、グラフのあらゆる性質を調べる必要が生ずる。ここに既に発表したものも含めて、いくつかのグラフ方程式を分類

して述べる。

§2. グラフ方程式の定義と分類

グラフの集合に関して種々のオペレーションが定義されている。これらのオペレーションを用いて、有限個のグラフの組 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ をもとに $f(G_1, G_2, \cdots, G_n)$ によって表わされる合成グラフを作り、$f(G_1, G_2, \cdots, G_n)$ を $G_1, G_2, \cdots, G_n$ を変数とする'代数式'とみなすことにする。ここで、同じ変数の集合をもつ2つの代数式を等しいとおくことにより、グラフ方程式という概念を導入することができる。一般にそれは形式的に次のように書き表わす。

(*) $\quad f(G_1, G_2, \cdots, G_n) = g(G_1, G_2, \cdots, G_n)$

この時、グラフ方程式(*)をみたすすべてのn組のグラフ $G_1, G_2, \cdots, G_n$ を見つけることを'その方程式を解く'という。但し、グラフGは多重線やループをもたないものとし、2つのグラフが'等しい'ということは、それらが同型であると定義する。(グラフGが多重線やループをもつ場合のグラフ方程式もいくつか知られているが、ここでは扱わないことにする。)

グラフのオペレーションとして、ここでは complement $\overline{G}$、line graph $L(G)$、total graph $T(G)$、middle graph $M(G)$、 the n-th power graph G^n、the n-th repeated line graph $L^n(G)$、clique graph $K(G)$ を使う。また、記号については、K_n (complete graph)、$K_{m,n}$ (complete bipartite graph)、C_n (cyclic graph)、P_n (path) を用いる。その他の用語は Harary[19] にある。

ここでは、グラフ方程式を変数の個数、及び型によって次のように大別する。

(I) 1つの未知グラフを含むグラフ方程式

(I)-1　$\varphi(G) = C$

(I)-2　$\varphi(G) = G$

(I)-3　$\varphi(G) = \psi(G)$

(II) 2つの未知グラフを含むグラフ方程式

(II)-1　$\varphi(G) = H$ ，(H にある制約を加える。)

(II)-2　$\varphi(G) = \psi(H)$

(II)-3　$F = \varphi(G) = \psi(H)$

但し、φ、ψ はグラフに関するあるオペレーションを表わし、C はある与えられたグラフとする。

(I)-1　方程式 $\varphi(G) = C$

この方程式に関して次のような問題が考えられる。

(i) 解の存在と一意性。すなわち解が存在するためのCの条件および解が一意的に決まるためのCの条件を見つけること。

(ii) 具体的なCに対して、方程式を解くこと。

この種の方程式の解の存在に関するCの条件を求めることは、'グラフの特徴づけ'と一致する。

(I)－2　方程式　$\varphi(G)=G$

オペレーションφに関して不変なグラフGを求めることである。

(I)－3　方程式　$\varphi(G)=\psi(G)$

ある2つの異なるオペレーションφとψをほどこして得られたグラフも等しくなるようなグラフGを求める。

(II)－1　方程式　$\varphi(G)=H$　（Hにある制約を加える。）

2つの未知グラフGとHをもつ方程式$\varphi(G)=H$は一般的すぎるので、解の集合をせばめるために、あるいは問題をさらに興味深いものにするために、Hにいくつかの制約を与える。たとえば、Hが planar、outerplanar、connected など。

(II)－2　方程式　$\varphi(G)=\psi(H)$

あるオペレーションφとψをほどこして得られたグラフが等しくなるようなGとHの組を求める。

(II)－3　方程式　$F=\varphi(G)=\psi(H)$

この連立グラフ方程式 $F=\varphi(G)=\psi(H)$ をみたすグラフ F の集合を求める。

§4と§5で、以上の分類にしたがって、グラフ方程式の例を示す。

§3 グラフ方程式のproof techniques

グラフ方程式を解く方法は、グラフのあらゆる性質を駆使している。たとえば、グラフ方程式 $f(G_1,\cdots,G_n)=g(G_1,\cdots,G_n)$ について、それをいくつか上げると、

(1) $f(G_1,\cdots,G_n)$ と $g(G_1,\cdots,G_n)$ の不変数を比較する方法（点と線の個数などの簡単な不変数や、彩色数やスペクトラムなどの複雑な不変数を比較）（定理6(イ)，定理21 など）

(2) 線グラフなどのように禁断誘導部分グラフが知られているようなものは、それを使う方法（定理6(ロ)，定理5，定理24など）

(3) 隣接行列を使う方法

(4) 不動点定理を使う方法

などにより、解となりうるグラフの集合を小さくしていくのが主な手段である。また、

(5) 置換群を応用する方法（定理4）

により、首尾よく解を得た例[26]もある。今後さらに、新

しい手法を用い、グラフ方程式を解くことが期待される。

§4 1つの未知グラフを含む種々のグラフ方程式

(I)-1 $\varphi(G)=C$ のタイプ

任意のGに対して、方程式 $\varphi(G)=C$ をみたすCの条件を調べる。

1° $L(G)=C$

次のBeinekeの定理[11]により、Cは特徴づけられる。

$\boxed{\text{定理1}}$ (Beineke) 次の4つの命題は互いに同値である。

(1) Cは線グラフである。

(2) Cの線全体をいくつかの完全部分グラフに分割して、それらの部分グラフの多くても2つと、Cの1点を共有するようにできる。[21]

(3) Cは $K_{1,3}$ を誘導部分グラフとしてもたず、かつもしGの2つの奇三角形が1つの線を共有すれば、それら2つの三角形の点によって誘導された部分グラフは K_4 である。[27]

(4) 図1の9個のグラフは、すべてGの誘導部分グラフにはなり得ない。

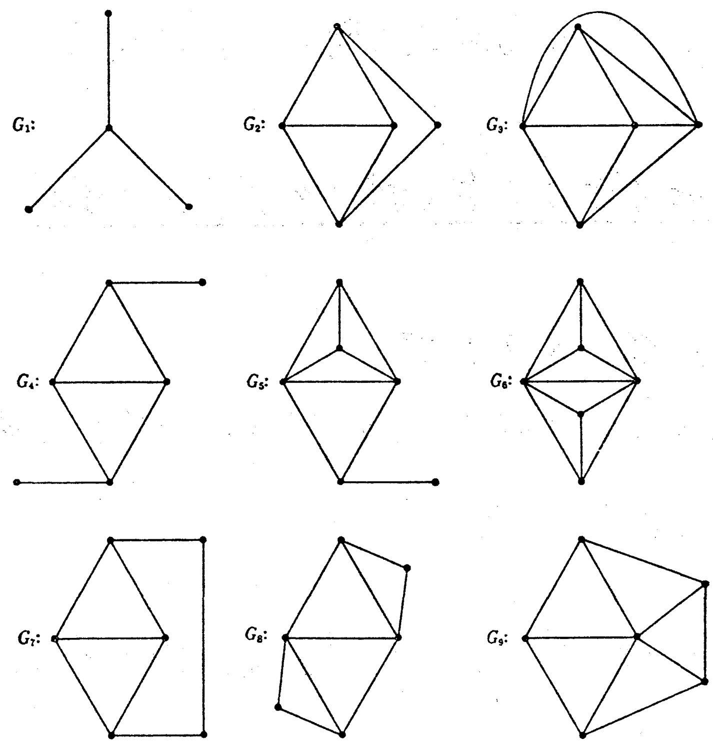


図1.

2° $M(G)=C$

$\boxed{\text{定理2}}$ (秋山.浜田.吉村[7]) 任意のグラフGに対して、$M(G)=C$となるためのCの必要十分条件は、Cが次の2つの条件をみたすことである。

(1) Cの線全体をいくつかの完全部分グラフに分割して、それらの部分グラフの3個以上に共有されている点はない。

(2) 各完全部分グラフは、ひとつただひとつの他の完全部分グラフには含まれない点をもつ。

3° $L(G)=C$

この方程式をみたすCが、図2の9個のグラフを誘導部分グラフとして含まないことは、定理1より明らかである。さらに、Cvetković と Simić は次の定理を示した[16]。

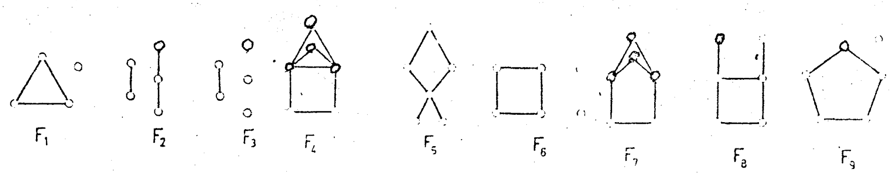


図2

定理3 グラフCは三角形を含まないとする。このとき $L(G)=C$ をみたすための必要十分条件は、Cが次の3つのグラフの中のひとつの誘導部分グラフになっていることである。（図3）

(1) $K_1 \cup (K_{m,n}-pK_2)$ (2) $K_{3,n}-C_6$ (3) Peterson graph

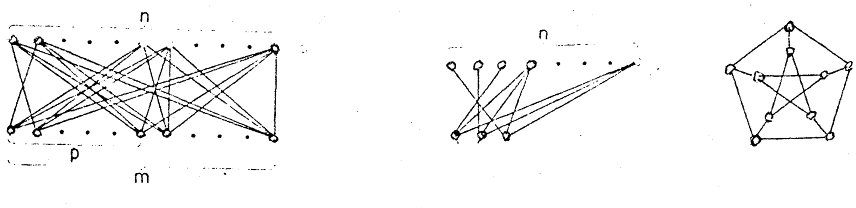


図3

(I)−2　$\varphi(G)=G$ のタイプ

1°　$\overline{G}=G$

グラフGの点の数が$4k$または$4k+1$ ($k=1,2,\cdots$) であれば、この方程式をみたす解は必ず存在する。この方程式をみたすグラフを自己補グラフといい、Ringelはこの構成法を示した[26]。(図4)

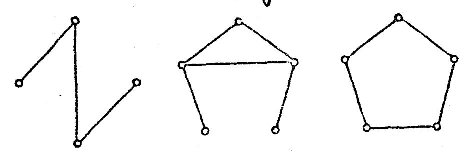


図4

$\boxed{\text{定理4}}$　n個の点からなる完全グラフK_nの点を$1,2,\cdots,n$で表わし、点iとjとで決まる線kを$k=(i,j)$と書く。グラフの点の数nは、$4k$または$4k+1$とし、σを置換群S_nの元で、そのサイクル表示への分解が長さ1または$4k$ ($k=1,2,\cdots$) 以外のものはもたず、長さ1のサイクルも高々1個しか現われないものとする。完全グラフK_mから任意に線k_1をとり青にぬる。$\sigma^2(k_1)$, $\sigma^4(k_1)$, $\sigma^6(k_1)$, $\cdots$を青にぬり、$\sigma(k_1)$, $\sigma^3(k_1)$, $\cdots$を赤にぬる。K_nの中から任意にぬられていない線k_2をとり、再びk_2, $\sigma^2(k_2)$, $\cdots$を青にぬり、$\sigma(k_2)$, $\sigma^3(k_2)$, $\cdots$を赤にぬる。この操作をぬられていない線が存在する限り続ける。このとき、青色の線からなるグラフが自己補グラフであり、また逆に、ある自己補グラフはこの方法で得られる。

2° $L^n(G)=G$

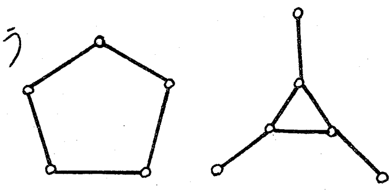
この解は次数2の正則グラフである。Menon [24], [25]。

(I)−3　$\varphi(G)=\Psi(G)$ のタイプ

1° $L(G)=\overline{G}$

Aigner [1] により、この解は図5のように C_5 と $K_3 \circ K_1$ だけである。

図5



C_5　　$K_3 \circ K_1$

2° $L^n(G)=\overline{G}$

Simić [29] は1°の方程式を拡張して、次の定理を得た。

定理5　グラフ方程式 $L^n(G)=\overline{G}$ の解は次のようである。

(1) $n=1$ のとき、　$G=C_5$　または　$G=K_3 \circ K_1$

(2) $n=2$ のとき、　$G=C_5$　または　$G=K_3 \circ \overline{K_2}$

(3) $n \geqq 3$ のとき、　$G=C_5$

3° $L(G)=G^n$

4° $L(G)=\overline{G^n}$

5° $L(G)=(\overline{G})^n$

上記3°〜5°のグラフ方程式の解は次の定理(秋山、金子、Simić) [8] による。

$\boxed{\text{定理6}}$ (イ) $L(G)=G^n$ の解は mK_3 である。(但し m は任意の正整数である。)

(ロ) $L(G)=\overline{G^n}$ $(n\geq 2)$ の解は C_{2n+3} である。

(ハ) $L(G)=(\overline{G})^n$ $(n\geq 2)$ の解は存在しない。

(証明)

(イ) あるグラフ H の最大クリークに含まれる点の数を $c(H)$ で表わすと、次の2つの関係式が導びかれる。

(a) $$c(L(G))=\begin{cases}\Delta(G) & \Delta(G)\geq 3 \text{ or } \Delta(G)\leq 1\\ 3 & \Delta(G)=2 \text{ and } K_3\subseteq G\\ 2 & \Delta(G)=2 \text{ and } K_3\not\subseteq G\end{cases}$$

(b) $$c(G^n)\geq \Delta(G)+1$$

但し、Δ はグラフ G の点の次数の極大なものとし、$\subseteq$ は誘導部分グラフとして含むという関係を示すものとする。(a) は線グラフに関する Whitney の定理[30]よりすぐ導びかれ、(b) も明らかである。2つのグラフが同型であるためには2つのグラフの不変数も等しくなければならないので、$c(L(G))=c(G^n)$ となり、$G=mK_3$ が得られる。

(ロ) まずいくつかの性質を示す。

(1) $\overline{L(G)}=G^n$ の方程式と同値である。

(2) G は連結グラフである。; さもなくば、任意の非負整数 i に対し、G_i を少なくとも1つ線を含む連結グラフとし、m を

任意の非負整数とし、$G=(\bigcup_{i\in I} G_i)\cup mK_1$ とおく。$|I|>1$ とすると、$\overline{L(G)}$は連結だが、G^nは非連結なので矛盾となり、ゆえに $|I|=1$。すなわち、$G=G_1\cup mK_1$ $(m\geqq 0)$。今、$m\gneqq 0$ とする。$G_1=K_2$ならば方程式をみたさないことは容易にわかる。また、G_1が2本以上の線を含めば、$G^n\geqq K_3\cup K_1$となるが、Beinekeの定理[11]より、$K_{1,3}\nleqq L(G)$なので矛盾する。ゆえに、$m=0$ すなわち、Gは連結グラフでなければならない。

(3) Gはユニサイクルグラフである。; $|V(G)|=|V(\overline{G^n})|=|V(L(G))|=|E(G)|$ より、Gはユニサイクルグラフである。

(4) Gの任意の点vに対し、$d(u,v)\geqq n+1$ をみたす点uが少なくともひとつ存在する。; さもなくば、Gのある点vに対して、Gのすべての点が距離n以下となり、vは$\overline{G^n}$において孤立点となり(2)に反するからである。

(5) Gには、条件(*)をみたす4点v_0, v_i, v_j, v_kは存在しない。

(*) $d(v_0, v_s)\geqq n+1$ $(s=i,j,k)$ かつ $d(v_s, v_t)\leqq n$ $(s,t=i,j,k)$

さもなくば、$\overline{G^n}$において、線グラフの禁断誘導部分グラフ$K_{1,3}$を、これら4点で誘導してしまうからである。

さて、Gをサイクルと、サイクルとは異なるユニサイクルグラフの2通りの場合に分けて考える。

Case 1. Gがサイクルのとき。($G=C_p$ とおく。)

$2n \geqq p-1$ とすると、$\overline{G^n} = N_p$ となり (2) に反するので、$2n < p-1$ 。この時、G の各点は距離 n 以下の点をそれぞれ $2n$ 個ずつもっているので、$|E(G^n)| = np$ となる。一方、$|E(\overline{L(G)})| = {}_pC_2 - p$ なので $p = 2n+3$ 。ゆえに、$G = C_{2n+3}$ が解となり得て、実際これが解となることは容易に確かめられる。

Case 2. G がサイクルとは異なるユニサイクルグラフのとき。

G に含まれるサイクルを C_k、但し、k はサイクルの長さとし、k を場合分けして考える。

(a) $k \geqq 2n+2$ のとき。

G において、$\deg v = 1$ なる点 v が少なくともひとつ存在し、v と (*) をみたす C_k 上の3点からなる通路 P_3 が存在し、(5) に反す。

(b) $k = 2n-2l$ ($l = 0, 1, \cdots\cdots, n-2$), $k = 2n-2l+1$ ($l = 0, 1, \cdots\cdots, n-1$) のとき。

(α) 任意の端点とサイクルとの距離は高々 $l+1$ である。; さもなくば、サイクルからの距離が $l+2$ の点 v が存在し、サイクル上の通路 P_3 で、v から P_3 の各点への距離が n より大のものが存在し、これら4点で (*) をみたし、(5) に反すからである。

(β) サイクル上の任意の点から長さ $l+1$ の枝が少なくともひとつでている。; さもなくば、長さ $l+1$ の枝が出ていないサイクル上の点を v_0 とすると、v_0 とサイクルで向かい合う点 u_0 (

kが奇数の場合は向かいあう2点のうちの1点）から、距離nより大なるGの点は存在せず、(4)に反するからである。

したがって、サイクル上の任意の点v_0から、長さ$l+1$の枝の1つに、順次$v_1, \cdots\cdots, v_{l+1}$と名づける。また、$v_0$とサイクルに関して向かいあった点を$u_0$とし、$u_0$からでる長さ$l+1$の枝の1つに、順次$u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{l+1}$と名づける。（図6.）

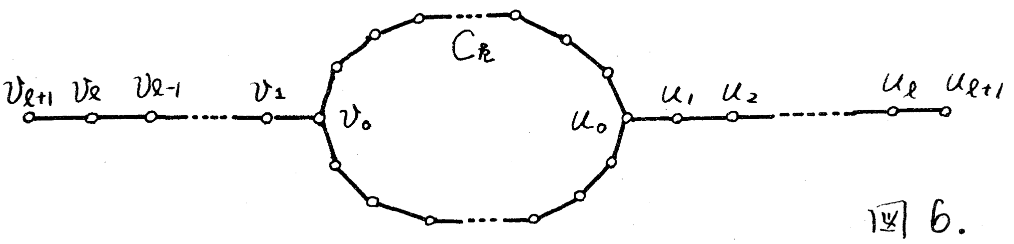


図6.

(i)　$l \geqq 1$のとき、4点v_{l+1}, u_0, u_1, u_2は(ホ)をみたし(5)に反す。

(ii)　$l=0$のとき、

(イ)　$k=2n+1$のとき、サイクル上でu_0とは異なる、v_0と向かいあった点をu_0'とおけば、4点u_0, u_0', u_1及び$v_{l+1}=v_1$とで(ホ)をみたし、(5)に反す。

(ロ)　$k=2n$のとき、(β)よりサイクル上の任意の点から、距離1の枝が少なくともひとつは出ているが、サイクル上の任意の点から2本以上の距離1の枝が出ていることはない。さもなくば、サイクル上のある点w_0から2本以上の距離1の枝が出ていて、それらのうちの任意の2本の線の端点をw_1, w_1'と

し、w_0とサイクルに関して向かいあった点から出る任意の距離1の枝の1つの端点をv_0とすれば、4点v_0, w_0, w_1, w_1'は(*)をみたし、(5)に反す。

よって考えられるグラフは$C_k \circ K_1$であるが、$L(C_k \circ K_1)$と$(\overline{C_k \circ K_1})^n$の次数1の点の数を比較することにより、これが解になり得ないことがわかる。

したがって、方程式の解はC_{2n+3}だけである。

(ハ) 前と同様に、$G=(\bigcup_{i \in I} G_i) \cup mK_1$とする。但し、$G_i$は線を含む連結グラフで、$m$を任意の非負整数とおく。$m \neq 0$とすると$(\overline{G})^n$は完全グラフになるが、$L(G)$は$|I|=1$かつ$G_1$がスターグラフかまたは$K_3$のときに完全グラフとなる。しかし両方の場合とも、$L(G)$と$(\overline{G})^n$の点の数が異なるので同型にはなり得ない。$m=0$ならば成分の数を比較することにより、$|I|=1$が成りたつ。ゆえに$G$は連結グラフでなければならない。さらに、$L(G)$と$(\overline{G})^n$の点の数を比較することによって、$G$はユニサイクルグラフであることがわかる。

Gが次の条件の場合を除くと、$(\overline{G})^n$は完全グラフとなる。

(*) Gで互いに隣接している2点があって、残りの点もすべてその2点の少なくともいずれか一方に隣接している。なぜならば、Gの任意の2点uとvが隣接していないとすると、この2点は$(\overline{G})^n$では隣接している。またuとvは隣接していて

u とも v とも隣接していない点 w が存在すれば $(\overline{G})^n$ では u と v は隣接するからである。

$(\overline{G})^n$ で完全グラフで、$L(G)$ も完全グラフのときは、K_3 または $K_{1,n}$ のときしかないが、いずれも方程式の解ではない。したがって(*)の場合を考える。このとき考えられるグラフは、三角形にそのうちの多くとも2点から距離1の枝が出ているグラフかまたは四角形に多くともそのうちの隣接した2点から距離1の枝がついているグラフのいずれかである。

(i) K_3 または C_4 は、解でないことが容易に確かめられる。

(ii) K_3 の1点から枝が出ているときは、$(\overline{G})^n$ は非連結だが、$L(G)$ は連結なので解にはなり得ない。

(iii) K_3 の2点から枝が出ているとき、$n \geq 3$ ならば $(\overline{G})^n$ は完全グラフとなり、$n=2$ ならば、線グラフの禁断誘導部分グラフ $K_5 - x$ を含む。

(iv) C_4 に多くともそのうちの隣接した2点から枝が出ているとき、図7のグラフの場合を除いて、$(\overline{G})^n$ は $n=2$ ならば $K_5 - x$ を含み、$n \geq 3$ ならば完全グラフとなる。したがって考えうるグラフは図7のグラフだけだが、このグラフも方程式の解にならないことはすぐわかる。

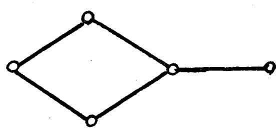


図7

したがって方程式をみたすグラフは存在しない。 □

6° $L(G)=L(\overline{G})$ 解は自己補グラフ、及び$K_{1,3}$、$K_1 \cup K_3$。

7° $(L(G))^n = L(G)$ $(n \geq 2)$ 解は $lK_{1,p} \cup mK_3 \cup nK_1$ である。但し l, m, n は任意の非負整数である。

8° $L(G^n) = G^n$ $(n \geq 2)$ 解は $mK_3 \cup nP_2$。

$6^\circ \sim 8^\circ$の方程式については、秋山、金子、Simić [9]。

9° $L(G)=K(G)$

$\boxed{\text{定理7}}$ $L(G)=K(G)$をみたすグラフは三角形を含まないグラフである。

（証明）

$G=\bigcup_{i \in I} G_i \cup mK_1$（$m$は任意の非負整数、$G_i$は連結成分とする）とおき、$L(G)$と$K(G)$の連結成分の個数を比較することにより$m=0$となる。したがって$G$は孤立点をもたない。今、3つの場合に分けて考える。

(1) Gがサイクルを含まないとき。

(2) Gの内周が4以上のとき。

(1)(2)ともに、誘導部分グラフが完全グラフとなるものはK_2だけである。ゆえにクリークグラフは、線を点に対応させた交グラフとなり、線グラフの定義に一致する。

(3) Gの内周が3に等しいとき。

Gを(p,q)グラフとし、このとき$L(G)=K(G)$の解は存在

しないことを示す。$|V(L(G))|=q$ なので $|V(K(G))|=q$。今、G より、$K_\ell\ (\ell\geqq 3)$ を作っている線以外の線を除き、G' なるグラフを作る。このとき除去した線の数を m 本とする。G' のすべての線は $K_\ell\ (\ell\geqq 3)$ に含まれているので、G' のクリークの個数は G' のサイクル階数以下である。G' の連結成分の個数を k' とすれば、G' のサイクル階数は $(q-m)-p+k'$ で表わされる。 $|V(L(G))|\leqq (q-m)-p+k'+m = q-p+k'$

となり、 $q\leqq q-p+k'$ すなわち $p\leqq k'$ を得る。G' で連結成分の個数が点の数より多いということは、G' は全非連結グラフになり、G の線はすべて K_2 にのみ含まれることになり、内周が3の仮定に反する。 □

§5 2つの未知グラフを含む種々のグラフ方程式

(II)-1 $\varphi(G)=H$; H にある条件を課したタイプ.

グラフ H にある条件（平面性、外平面性等）を課したときに、それぞれのグラフ方程式をみたすグラフ G の特徴を調べる。

1° $L(G)=H$; H: 平面的

この特徴づけは、Sedláček [28] によって与えられた。その後、Greenwell と Heminger [18] は、この特徴づけを禁断

部分グラフとして表わした。

$\boxed{定理8}$ (Sedlaček) Gの線グラフが平面的であるための必要十分条件は、Gが平面的でかつ $\Delta(G)\leqq 4$、かつ、もし $\rho(v)=4$ ならばそのとき v は切断点である。

$\boxed{定理9}$ (Greenwell, Heminger) グラフGが平面的線グラフをもつための必要十分条件は、Gが $K_{3,3}$, $K_{1,5}$, P_4+K_1, $K_2+\overline{K_3}$ と同相な部分グラフをもたないことである。(図8)

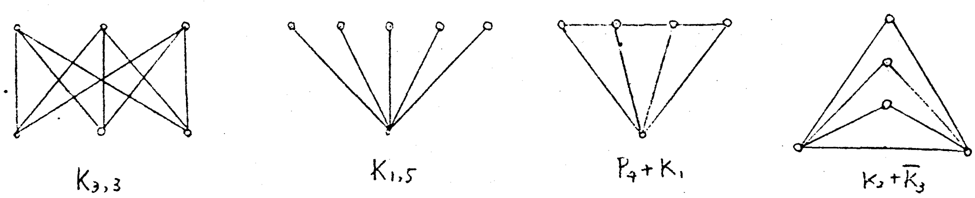


図8

2° $M(G)=H$; H: 平面的グラフ

秋山、浜田、吉村[6]は、この方程式をみたすGは $\Delta(G)\leqq 3$ であることを示し、秋山[2]は禁断部分グラフで表した。

$\boxed{定理10}$ (秋山) グラフGが平面的中間グラフをもつための必要十分条件は、Gが $K_{3,3}$ または $K_{1,4}$ に同相な部分グラフをもたないことである。

（証明）

必要性：Gが平面的中間グラフをもつならば、Gの任意の部分グラフGも平面的中間グラフをもつ。それゆえ、$K_{3,3}$または$K_{1,4}$に同相な任意のグラフは、平面的中間グラフを持たないことを示せばよい。$K_{3,3}$に同相なグラフは、非平面的であり、$K_{1,4}$に同相なグラフは$\Delta(G)>3$となり、平面的中間グラフの特徴づけに反する。

十分性：Gを$K_{3,3}$または$K_{1,4}$に同相な部分グラフを含まないグラフとする。Gは$K_{1,4}$に同相な部分グラフを含まないので、K_5と同相な部分グラフを含みえない。それゆえGは$K_{3,3}$に同相な部分グラフを含まないのでKuratowskiの定理からGは平面的でなければならない。さらに、$\Delta(G)\leqq 3$。なぜならさもなくばGは部分グラフとして$K_{1,4}$を含むからである。□

3° $T(G)=H$; H：平面的グラフ

この特徴づけはBehzad[10]によって与えられ、秋山[2]はこれを禁断部分グラフで表わした。

定理11 （Behzad） グラフGが平面的全グラフをもつための必要十分条件は、Gの各点の次数は高々3であり、vが次数3の点ならば切断点である。

$\boxed{\text{定理12}}$（秋山） グラフGが平面的全グラフをもつための必要十分条件は、GがP_3+K_1または$K_{1,4}$と同相な部分グラフを含まないことである。

（証明）

必要性：Gが平面的全グラフをもつならば、Gの任意の部分グラフG'も平面的全グラフをもつ。それゆえ、P_3+K_1または$K_{1,4}$に同相なすべてのグラフが平面的全グラフを含まないことを示せばよい。P_3+K_1に同相なグラフは切断点でない次数3の点をもつ。また$K_{1,4}$と同相なグラフは$\Delta(G)>3$となるので、定理11よりこれが示される。

十分性：GがP_3+K_1または$K_{1,4}$に同相な部分グラフを含まないとする。$\Delta(G)\leqq 3$。なぜなら、さもなくばGは部分グラフとして$K_{1,4}$を含む。Gが切断点でない次数3の点をもつと仮定する。この仮定が矛盾を導くことを示すことによって証明が完結する。

a, b, cをvに隣接する点とする。vは切断点でないので、vを含まないaからbにいたる道路Pが存在する。cとPの接続性に依存して、2つの場合に分ける。

Case 1：cがP上にある場合。このときGはP_3+K_1と同相な部分グラフを含む。

Case 2：cがP上にない場合。vは切断点でないのでcか

らaに至る通路P'が存在する。yをPとP'の（cからはじまって）最初の共通点としよう。このときP上のyの位置に依存してさらに2つの場合に分けられる。

Case 2.1: $y=a$ またはb。どちらの場合にもGはP_3+K_1と同相な部分グラフをもつ。

Case 2.2: $y \neq a$ かつb。このときyをP上のaとbの間にある点と仮定できる。よってGはP_3+K_1と同相な部分グラフをもつ。

これですべての場合がつくされたが、どの場合においてもGがP_3+K_1と同相な部分グラフを含むことがわかる。よってvがGの次数3の点ならば切断点である。それゆえ定理11より平面的全グラフをもつ。 □

<u>4° $L(G)=H$; H: 外平面的グラフ</u>

Chartrand, Geller, Hedetniemi [13] によって、次の定理が示された。

$\boxed{\text{定理13}}$ $L(G)$ が外平面的線グラフをもつための必要十分条件は、GがP_3+K_1 または$K_{1,4}$と同相な部分グラフをもたないことである。

5° $M(G)=H$; H: 外平面的グラフ

$\boxed{\text{定理14}}$ (秋山[2]) グラフGが外平面的中間(全)グラフをもつための必要十分条件は、Gが$K_{1,3}$ (K_3または$K_{1,3}$)と同相な部分グラフをもたないことである。

6° $L^n(G)=H$; H: 平面的グラフ ($n \geqq 2$)

この特徴づけは次の3つの定理に示されている。Kulli, Sampathkumar[22]による。

$\boxed{\text{定理15}}$ グラフGが平面的2階線グラフをもつための必要十分条件は、Gが次の4条件をみたすことである。

(i) Gは平面的である。

(ii) $\Delta(G) \leqq 4$

(iii) 任意の線(v_1, v_2)に対し、$\rho(v_1)+\rho(v_2) \leqq 6$

(iv) $\rho(v_1)+\rho(v_2)=6$ なる線(v_1, v_2)はすべてGの橋である。

$\boxed{\text{定理16}}$ グラフGが平面的3階線グラフをもつための必要十分条件は、Gが次の2条件をみたすことである。

(i) $\Delta(G) \leqq 3$

(ii) Gの$\rho(v)=3$となる点vに隣接する点の次数の和は高々4である。

$\boxed{\text{定理17}}$ グラフGが平面的n階線グラフ($n\geq 4$)をもつための必要十分条件は、Gが次の2条件をみたすことである。

(i) $\Delta(G)\leq 3$

(ii) Gのある点vが$\rho(v)=3$ならば、点vを含む成分は$K_{1,3}$である。

上記の3つの定理を、秋山[3]はそれぞれ禁断部分グラフで表わした。

$\boxed{\text{定理18}}$ グラフGが平面的2階線グラフをもつための必要十分条件は、Gが図9に示された$K_{1,5}$, $K_{3,3}$またはAと同相な部分グラフを含まないか、P_3+K_1, BまたはCとe-疑似同相な部分グラフを含まないことである。但し、G′がGの線e以外の任意の線を有限回細分をくり返して得られる時、G′がGとe-疑似同相であるという。

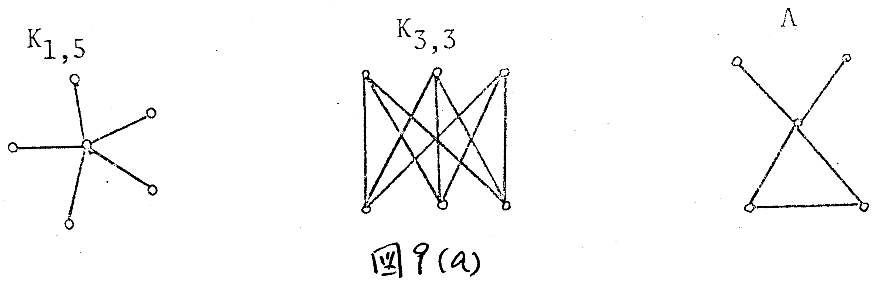


図9(a)

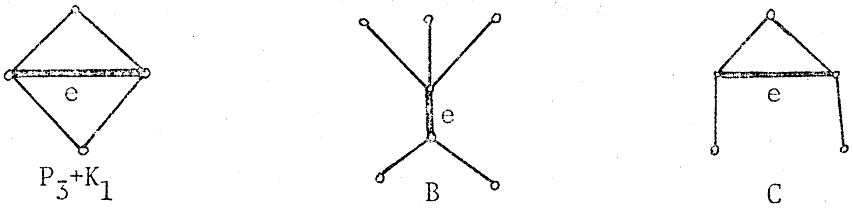


図9(b)

（証明）

必要性：Gが平面的2階線グラフをもつならば、Gの任意の部分グラフG'も平面的2階線グラフをもつ。それゆえ $K_{1,5}$, $K_{3,3}$, A に同相なグラフ、あるいは P_3+K_1, B, C に e－疑似同相なグラフが平面的2階線グラフを含まないことを示せばよい。$K_{1,5}$ に同相なグラフは定理15より $\Delta(G)>4$ となり、$K_{3,3}$ に同相なグラフは平面的でない。Aに同相なグラフや、Cや P_3+K_1 に e－疑似同相なグラフは定理15の条件(iv)をみたさず、Bに e－疑似同相なグラフは条件(iii)をみたさない。したがって、$K_{1,5}$, $K_{3,3}$, A に同相なグラフや、P_3+K_1, B, C に e－疑似同相なグラフは平面的2階線グラフを含まない。

十分性：Gが $K_{1,5}$, $K_{3,3}$, A に同相な部分グラフ、または P_3+K_1, B, C に e－疑似同型な部分グラフを含まないとする。GはAに同相な部分グラフを含まないので K_5 に同相な部分グラフを含まない。$K_{3,3}$ に同相な部分グラフを含まないので、Kuratowskiの定理[23]から、Gは平面的でなければならない。さらに $\Delta(G)\leq 4$ である。なぜなら、さもなくばGは $K_{1,5}$ を部分グラ

フとして含むからである。GはBにe－疑似同型な部分グラフを含まないので、Gの任意の線(v_1, v_2)に対して、
$\rho(v_1)+\rho(v_2) \leqq 6$ が成り立つ。ゆえに、Gが $\rho(v_1)+\rho(v_2)=6$ をみたす、橋ではない線(v_1, v_2)をもつとしたときに、矛盾を導くことによって、証明が完結する。

v_1またはv_2のどちらかに接合するe以外の線は全部で4本存在する。v_1に接合する線の個数によって2つの場合に分ける。

Case 1：e以外の線で、v_1に接合する線が3本あるとき。eはサイクル上の線なので、GはAに同相な部分グラフをもつ。

Case 2：e以外の線で、v_1に接合する線が2本あるとき。eがただ1つのサイクル上にあるときは、GはCにe－疑似同型な部分グラフをもつ。またeが2つ以上のサイクル上にあるときは、GはP_3+K_1にe－疑似同型な部分グラフをもつ。

これですべての可能性がつくされたが、どの場合においても、Gは図9の6つのグラフに同相なグラフかあるいはe－疑似同相なグラフを含む。よって定理15より、Gは平面的2階線グラフをもつ。 □

$\boxed{\text{定理19}}$ グラフGが平面的3階線グラフをもつための必要十分条件は、Gが図10に示された3つのグラフ$K_{1,4}$, D, E

と同相な部分グラフを含まないことである。

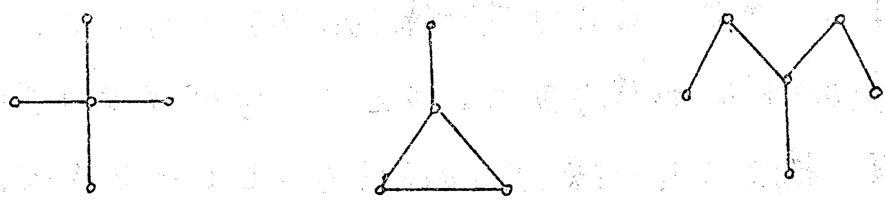
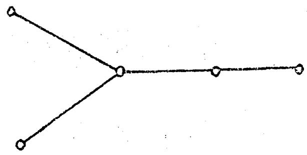


図10

$K_{1,4}$ D E

$\boxed{\text{定理20}}$ グラフGが平面的線グラフ $L^n(G)$ ($n \geq 4$) をもつための必要十分条件は、Gが図10と図11の3つのグラフ、$K_{1,4}$、D, F と同相な部分グラフを含まないことである。



F

図11.

7° $G^2 = H$; H: 平面的グラフ

$\boxed{\text{定理21}}$ (Harary, Karp, Tutte [20]) 平面性をみたすグラフHに対して、グラフ方程式 $G^2 = H$ をみたす解Gは次の性質をみたす。

(1) $\Delta(G) \leq 3$

(2) 次数3の点はすべて切断点である。

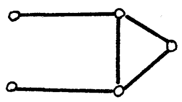
(3) 4点以上をもつGのブロックはすべて偶サイクルである。

(Ⅱ)−2 　$\varphi(G)=\psi(H)$ のタイプ

1°　$L(G)=T(H)$

この方程式はCvetkovićとSimić[14]によって解かれた。

定理21　G, Hが連結グラフならば、グラフ方程式 $L(G)=T(H)$ の解G, Hは次のグラフの対である。
(K_{n+1}, K_n) $(n=1,2,\cdots)$, $(K_{1,3}, K_2)$, (S, P_3)。
但し S：



G, Hが非連結ならば、$G=(\bigcup_{i\in I} G_i)\cup nK_1$, $H=\bigcup_{i\in I} H_i$
(但し、nは任意の非負整数でかつ各iに対して $L(G_i)=T(H_i)$)
がグラフ方程式の解である。

2°　$\overline{L(G)}=T(H)$

Cvetković, Simić[14]による。

定理22　グラフ方程式 $\overline{L(G)}=T(H)$ の解(G,H)は次のグラフの対である。$(K_{1,n}, nK_1)$ $(n=1,2,\cdots)$, $(K_3, 3K_1)$, $(3K_2, K_2)$, $(3K_{1,2}, K_3)$, $(K_2\cup P_5, K_{1,2})$, 及び $((K_3\circ K_1)\cup K_2, K_{1,3})$。

$3°$ $L(G)=M(H)$

$4°$ $M(G)=T(H)$

$5°$ $\overline{M(G)}=T(H)$

$3°$～$5°$ は秋山、浜田、吉村［5］の次の定理による。

定理23　任意のグラフ G, H に対して、

(i) $L(G)=M(H)$ の解は $(G, H)=(H^+, H)$

(ii) $M(G)=T(H)$ の解は $(G, H)=(nK_1, nK_1)$ $(n=1,2,\cdots)$

(iii) $\overline{M(G)}=T(H)$ の解は $(G, H)=(3K_1, K_2)$, $(G, H)=(K_3 \cup K_1, K_{1,3})$ である。

（証明）

以降、常に $M(H)=L(H^+)$、$M(G)=L(G^+)$ とおく。([3][9])

(i) $L(G)=M(H)$ i.e. $L(G)=L(H^+)$

任意のグラフ H に対し、H^+ は nontrivial で $K_{1,3}$ でも K_3 でもない。定理[14]の 8.3 より、解 $(G, H)=(H^+, H)$ を得る。

(ii) $M(G)=T(H)$ i.e. $L(G^+)=T(H)$

$L(G)=T(H)$ の解が定理21ですべて得られている。それらの組の中で、(G^+, H) の形をしているのは、(K_2, K_1) だけである。ゆえに(ii)の解は $(G, H)=(K_1, K_1)$。一般には、$(G, H)=(nK_1, nK_1)$ $(n=1,2,\cdots)$。

(iii) $\overline{M(G)}=T(H)$ i.e. $\overline{L(G^+)}=T(H)$

$\overline{L(G)}=T(H)$ の解は定理22で求められているが、これらの組の中で、$(3K_2, K_2)$, $((K_3 \circ K_1) \cup K_2, K_{1,3})$ だけが (G^+, H) の形をしている。ゆえに(iii)の解は、$(3K_1, K_2)$, $(K_3 \cup K_1, K_{1,3})$ である。 □

6° $\overline{L(G)}=M(H)$

定理24 (秋山、浜田、吉村[5]) $\overline{L(G)}=M(H)$ をみたすすべてのグラフの組は次のものである。$(K_{1,n}, nK_1)$ $(n=1, 2, \cdots)$, $(K_3, 3K_1)$, $(K_2 \cup K_{1,2}, K_2)$, $(K^+_{1,2}, K_{1,2})$, $(S(K_{1,3}), K_3)$, $(Y, K_1 \cup K_2)$, $(Z, 2K_1 \cup K_2)$。(図12)

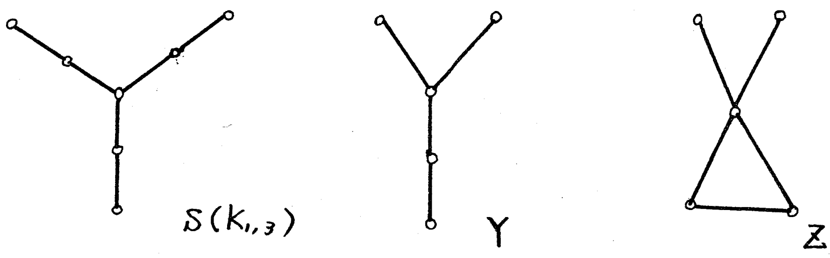


図12

(証明)

定理1で、Gが線グラフである必要十分条件は、ある9個のグラフのいずれもGの誘導部分グラフとして含まないことが示されている。ここでその9個のうちの3個のグラフとその補グラフを示す。(図13)。線グラフ $L(H)$ がこれら3つのグラフ $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}$ の少なくとも一つをその誘導部分グラフ

として含むならば、$L(H)$は$\overline{L(G)}$ではあり得ない。

次にグラフ方程式 $\overline{L(G)}=M(H)$ i.e. $\overline{L(G)}=L(H^+)$の解を求める。

(I) Hが連結グラフの場合

(i) Hが次数$\rho(v)\geqq 3$なる点vをもつと仮定。

中心vをもつ星状グラフ(v,a,b,c)をSで表わし、S^+はSに破線$\{v,v'\}$, $\{a,a'\}$, $\{b,b'\}$, $\{c,c'\}$を加えて得られるグラフとする。(図14)。線グラフ$L(S^+)$は図14において、太線で示されるグラフである。このとき、$L(S^+)$は$\overline{F_1}$を誘導部分グラフとして含むので、$L(H^+)$は$\overline{L(G)}$であり得ない。

よってHの各点の次数は2以下であることがわかる。

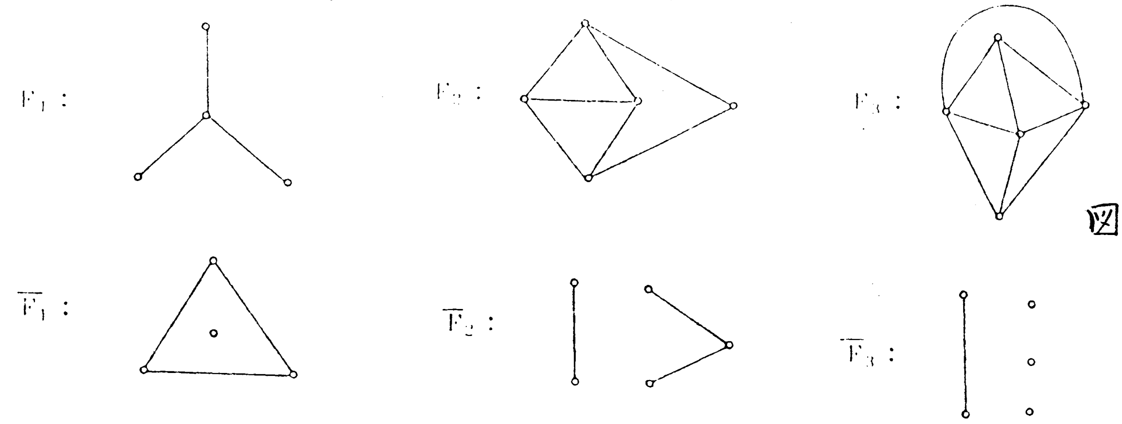


図13

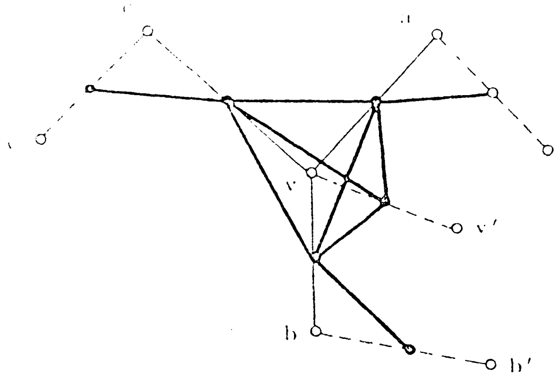


図14

(ii) H が通路 P_4, v_1, v_2, v_3, v_4 を含むと仮定。

このとき $L(P_4^+)$ は、$\overline{F_1}$ をその誘導部分グラフとしてもつ(図15)から、$L(H^+)$ の直径は3より小であることがわかる。

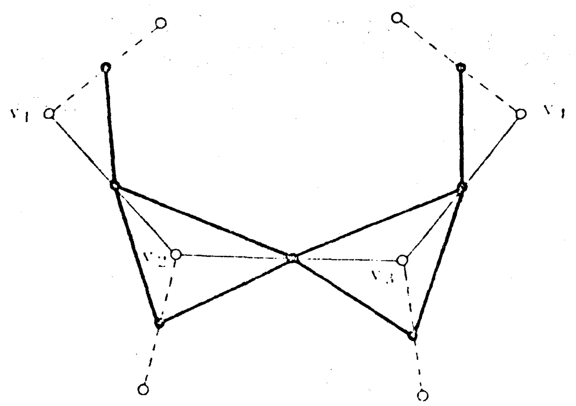


図15

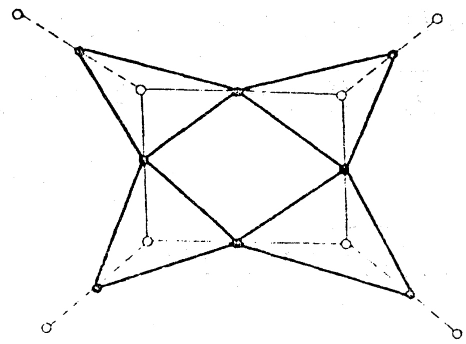


図16

(iii) H がサイクル C_4 を含むと仮定。

このとき $L(C_4^+)$ (図16) は $\overline{F_1}$ をその誘導部分グラフとして含む。(i)(ii)(iii) より、連結グラフ H は K_1, K_2, $P_3=K_{1,2}$, K_3 のいずれかである。これらのグラフに関して、グラフ方程式 $L(G)=M(H)$ をみたすグラフ G は、それぞれ K_2, $K_{1,2}\cup K_2$, $K_{1,2}^+$, $S(K_{1,3})$ (図12) である。

(II) H が非連結グラフの場合

(i) H が全非連結のとき、即ち、$H=nK_1$ $(n=1,2,\cdots)$ このとき $G=K_{1,n}$ $(n=2,3,\cdots)$, 但し $n=3$ は除く, $H=3K_1$ のとき、$G=K_{1,3}$ または K_3 。

(ii) $H=K_1\cup K_2$ のとき。$\overline{L(H^+)}=K_3\cdot K_2$ であり、G は図12の Y のグラフである。

(iii) $H=2K_1\cup K_2$ のとき。Gは図12のグラフZである。

(iv) $H=3K_1\cup K_2$ のとき。$L(H^+)$ は $\overline{P_3}$ をその誘導部分グラフとして含むので解は存在しない。

(v) $H=2K_2$ のとき。$L(H^+)=2K_{1,2}$ はその誘導部分グラフとして $\overline{P_2}$ を含むので、解は存在しない。 □

7° $\overline{L(G)}=L(H)$

$\boxed{\text{定理25}}$ (秋山、浜田、吉村[4]) 2つのグラフG, Hにおいて、Hはトリビアル($\boxed{1}$を1個とみなす)でない連結グラフとし、グラフ方程式 $\overline{L(G)}=L(H)$ の解(G, H)は次の$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$なる6個の解と、それらの解グラフの適当な部分グラフの対17個、あわせて23個である。

$\boxed{1}$ $(nK_2, K_{1,n})$, $(n=1,2,\cdots\cdots)$ (図17)

$\boxed{2}$ $(C_6\cup K_2, \overline{K_3\cup 2K_1})$ (図18)

$\boxed{3}$ $(3K_{1,2}, K_4)$ (図19)

$\boxed{4}$ $(S(K_{1,3}), K_3^+)$ (図20)

$\boxed{5}$ $(K_{3,3}, K_{3,3})$ (図21)

$\boxed{6}$ (C_5, C_5) (図22)

(証明)

(第一段) $\overline{L(G)}=L(H)\cdots(*)$ とおく。

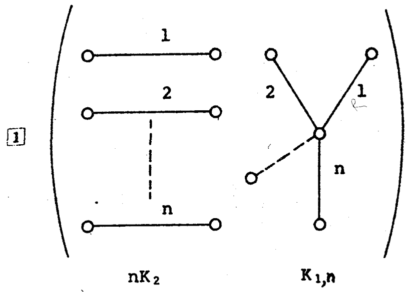


図17

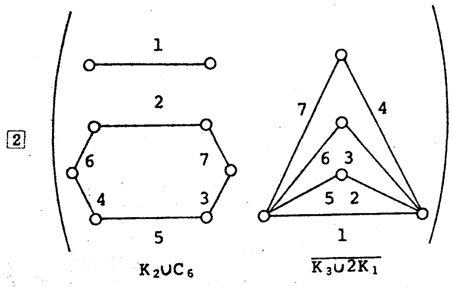


図18

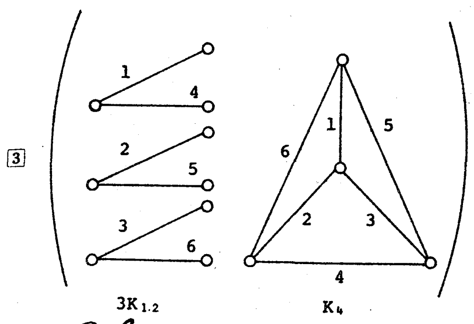


図19

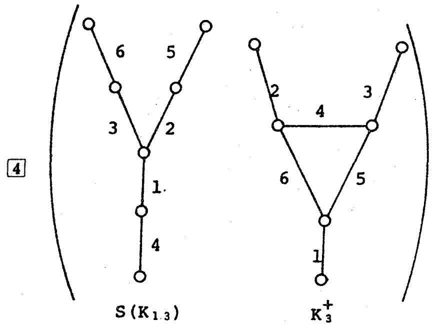


図20

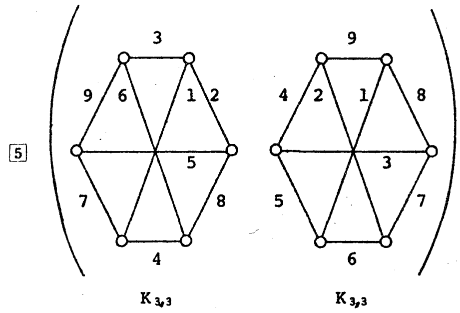


図21

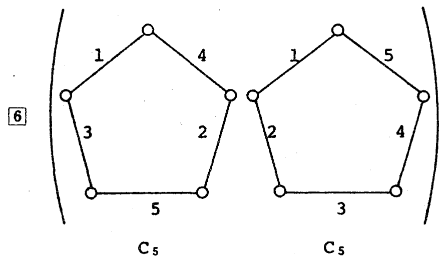


図22

(i) (*)より、$L(H)=L(G)$を得るから．(G,H)が(*)の解ならば(H,G)も(*)の解である。

(ii) $P=L(H)$とおくと(*)から$\overline{P}=L(G)$となる。P, $\overline{P}$のうち少なくともひとつは連結である。(たとえばPが連結とする。)
$P=L(H)$が連結だからHも連結である。

(iii) (*)より $|V(\overline{L(G)})|=|V(L(H))|$、一方 $|V(\overline{L(G)})|=|V(L(G))|$ よって、$|V(L(H))|=|V(L(G))|$。ところが線グラフの性質から $|V(L(H))|=|X(H)|$, $|V(L(G))|=|X(G)|$、よってこれら3つの等式より、$|X(H)|=|X(G)|$ を得る。即ち、(*)の解(G,H)の2つのグラフG,Hは等しい線数を持つ。

$|X(H)|=|X(G)|=g\ (\geq 1)$ としよう。同型対応φによって対応する$\overline{L(G)}$, $L(H)$上の対応点をそれぞれu, wとし、u wを生ずるG,Hの線をそれぞれx,yとする。x,yはφによって対応する2線である。今、Gからxを、Hからyを除去するとφによって対応する中心uの星形と、中心wの星形も同時に除去されて残るグラフ$\overline{L(G-x)}$と$L(H-y)$はやはり同型である。

今、φによって対応するG,Hの線をg'個$(0\leq g'\leq g-1)$まで除去し、その際孤立点を生じた時は、これらも除去することにして、G,Hから得られる部分グラフをそれぞれG',H'とすれば、$\overline{L(G')}=L(H')$が成立し、(G',H')も(*)の解である。

(iv) 線グラフのための9個の禁断誘導部分グラフ（定理1）の中の2個をF_1,F_2と名づけ、かつそれらの補グラフをそれぞれ$\overline{F_1},\overline{F_2}$として、図23に示す。グラフ$L(H)$が$\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$のどちらをも含まぬことが、$L(H)$が$\overline{L(G)}$であるための必要条件である。

(iv) (*)の解(G, H)において解グラフHはトリビアルでない連

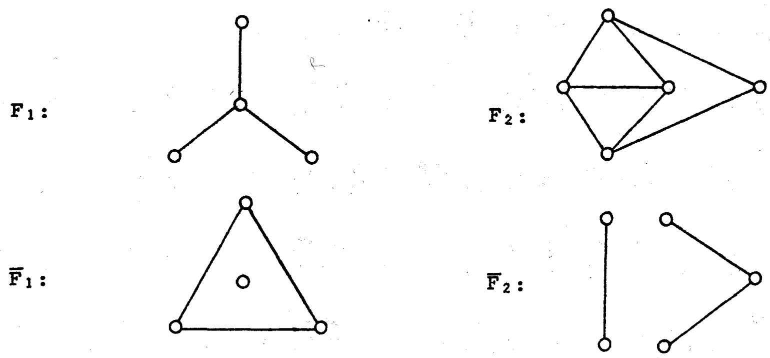


図23

結グラフとする。((ii)参照。)

(a) K_3がHの固有の部分グラフのとき、K_3の頂点に接合しない線があれば$L(H) \supset \overline{F_1}$である。(図24参照) よって、Hが$K_3$を固有の部分グラフとしてもつとき、Hが(*)の解グラフであるためにはHのすべての線が、そのK_3と少なくとも1点を共有することが必要である。

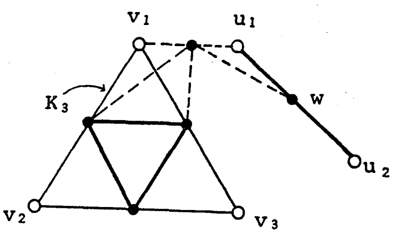


図24

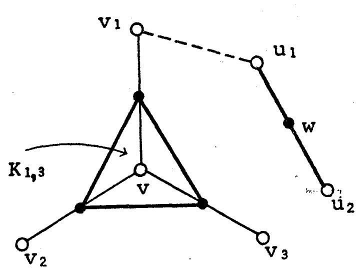


図25

(b) Hが$K_{1,3}$を誘導部分グラフとして含むとき、$K_{1,3}$に接合しない線があれば$L(H) \supseteq \overline{F_1}$である。(図25参照) よってHが$K_{1,3}$を誘導部分グラフとして含むとき、Hが(*)の解

であるためには、Hのすべての線がその$K_{1,3}$と少なくとも1点を共有することが必要である。

(vi)（補題）連結グラフHが、点の最高次数3で、K_3を部分グラフにもたず、各線はHの誘導部分グラフ$K_{1,3}$のすべてと少なくとも1点を共有するという性質をもつものとする。これらの性質を持ち、かつ最大の線数をもつグラフは$K_{3,3}$である。

（証明）Hに含まれる次数3の1点をとり、これをvとする。vを中心とする$K_{1,3}$の端点をv_1, v_2, v_3とし、線数を大にとるため$\rho(v_i)=3$（$i=1,2,3$）とし、この時生ずる新線を、$\{v_i, u_i\}, \{v_i, w_i\}$（$i=1,2,3$）とする。$H$は$K_3$を含まぬから$u_i, w_i$（$i=1,2,3$）のうちのどの点も$v_1, v_2, v_3$と一致することはない。（図 26 ）　u_i, w_i（$i=1,2,3$）がすべて異なるとすれば、たとえば線$\{v_1, u_1\}$はv_2, v_3をそれぞれ中心とする2つの$K_{1,3}$のいずれとも共有点をもたない。このことを避けるには、u_1がu_2, w_2のどちらかと一致し、かつu_3, w_3のどちらかと一致することが必要十分条件である。そこで$u_1 \equiv u_2 \equiv u_3$としてこの点を$u$とする。同様にして、$w_1 \equiv w_2 \equiv w_3$としてこの点を$w$とする。ここに得られたグラフは$K_{3,3}$であって$K_{3,3}$は$K_3$を含まず、その各線はすべての誘導部分グラフ$K_{1,3}$と少なくとも1点を共有する。

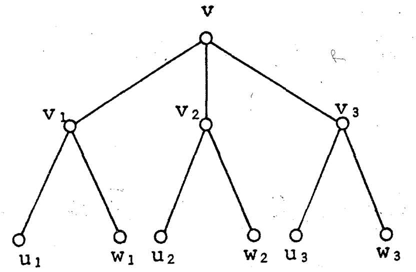


図26.

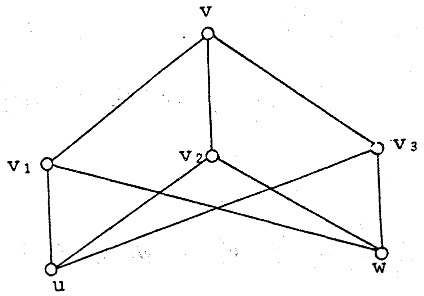


図27.

グラフ$K_{3,3}$にもはや1点も加えることはできない。何故なら、もし新しい線を加えうるものとすれば、それは図26におけるu_i, w_i $(i=1,2,3)$の中の1点を1端点とするものである。u_i, w_iのうちのどれを取っても同じことであるから、u_1を取って図26において$\{u_1, t\}$なる新線を加えてみよう。このとき、

(イ) tは勿論v_1と一致せず、点の次数3以下という仮定によりtはv_1, v_2, v_3と一致しない。求めるグラフがK_3を含まぬことから、tはw_1と一致しない。

(ロ) tはu_j, w_j $(j=1,2,3)$のどれかと一致するか、$\{u_1, t\}$が新しい1つの終線である。この場合、前と同様の推論により得られるグラフは$K_{3,3}$（図27）に1線$\{u, w\}$を加えたものか、$K_{3,3}$にuから出る終線を加えたものであるが、この両グラフは$\rho(v)=4$であって、ともに点の最大次数3という仮定に反する。ゆえに$K_{3,3}$が条件を満たし、かつ最大の線数をもつグラフである。

（第二段）

第一段の(i)〜(vi)を用いて、具体的に解(G, H)を求めよう。

Hが星形$K_{1,n}$のときは$G=nK_2$ $(n=1, 2, \cdots)$であることが容易にわかる。すなわち、$(G, H)=(nK_2, K_{1,n})$でこれが$\boxed{\mathrm{I}}$である。(図17)

次に星形$K_{1,n}$ $(n=1, 2, \cdots)$とは異なるものとし、H内で最大次数をもつ点をv、その次数をΔで表わす。

(I) $\Delta \geqq 5$. この場合はHが星形$K_{1,n}$ $(n \geqq 5)$以外にどんな1線をもつとしても、$L(H) \supset \overline{F_1}$となる。(図28, 29)

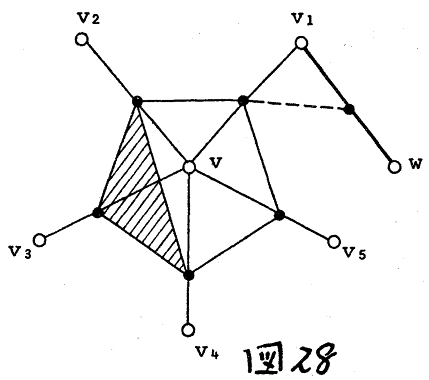


図28

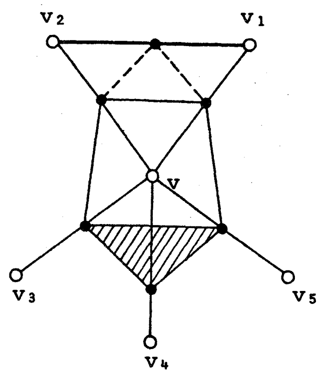


図29

よって、星形でない限り、(*)の解は存在しない。

(II) $\Delta=4$ 星形$K_{1,4}$の中心vからの距離2以上の点wがあるとすると、$L(H) \supset \overline{F_1}$となる。(図30参照) よって$K_{1,4}$に属さない線は、図31の$\{v_1, v_2\}$のごとく$K_{1,4}$の2つの端点を結ぶものでなければならない。(図31参照)

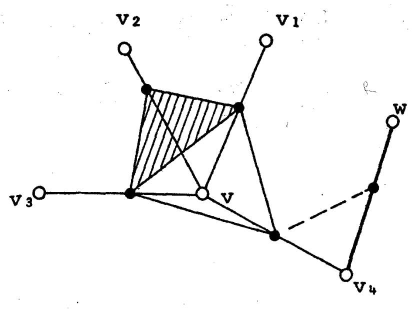


図30

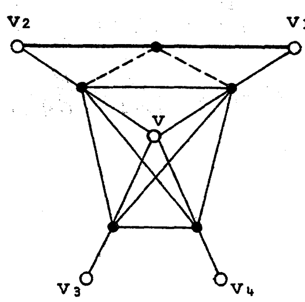


図31

与えられた$K_{1,4}$に線$\{v_1, v_2\}$の他に$\{v_3, v_4\}$を入れて得られるグラフは第一段の(V)の(a)に反する。v_i ($i=1,2,3,4$)の中の任意の3個からK_3を作った時も同様である。これらのことに注意して、(V)の(a)の条件をみたし、かつ最大の線数をもつグラフを求めると、$\boxed{2}$の$\overline{K_3 \cup 2K_1}$である。(図 18)このグラフが1つの解グラフHになることは(※)の式によって容易に検証され、対応する解グラフGが$K_2 \cup C_6$である。今、$\overline{K_3 \cup 2K_1}$からすべての固有の連結部分グラフを作る。[19, Appendix I 216-217]。これらの部分グラフに対し、それらの線のもつ番号と同じ番号の線から成る$K_2 \cup C_6$の部分グラフを

図32

⑦

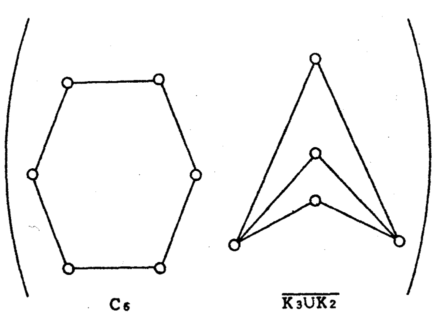
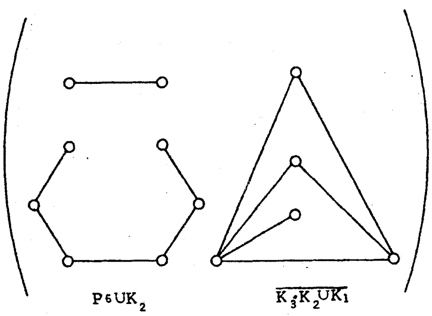


図33

⑧



対応させて得られるグラフの対は(*)の解である。((iii)参照)
これらの中から$\boxed{1}$に属するものを省くと次の⑦〜⑱を得る。

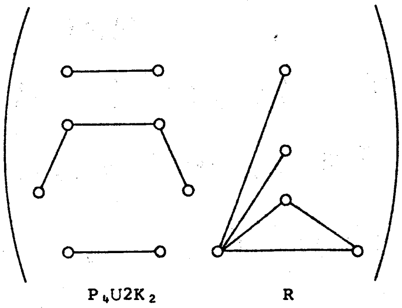
⑨


図34

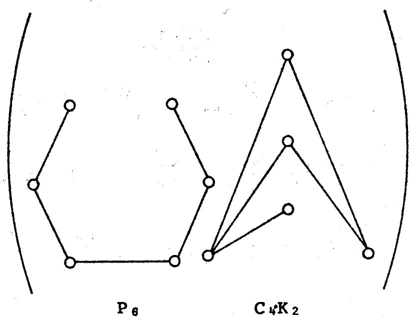
⑩


図35

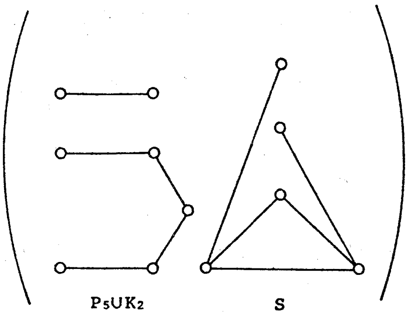
⑪


図36

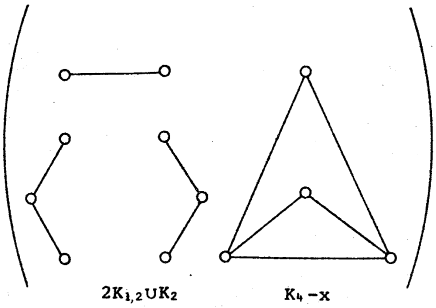
⑫


図37

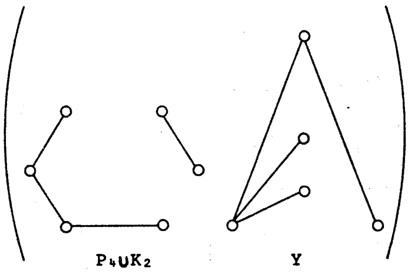
⑬


図38

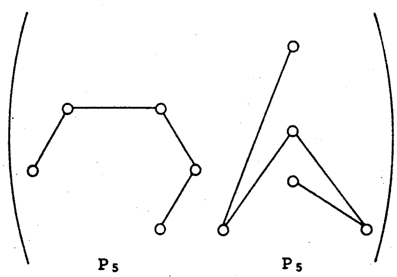
⑭


図39

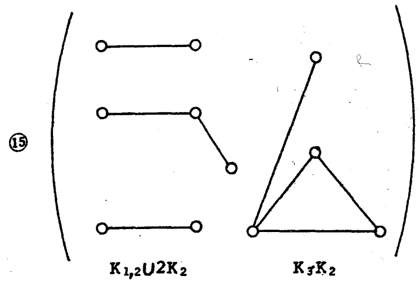


図40

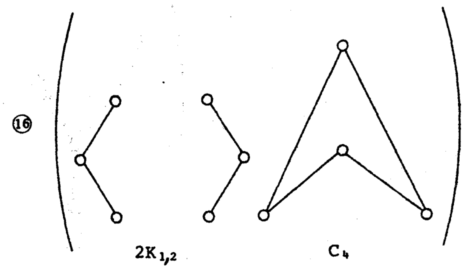


図41

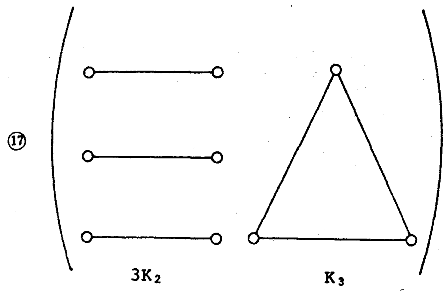


図42

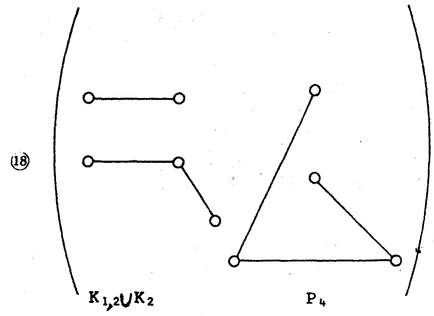


図43

(Ⅲ)　$\Delta=3$　　このとき、$H \supset K_{1,3}$ である。$K_{1,3}$ の中心を v とする。

(α) $K_3 \subset H$。この場合 H のすべての線は K_3 と少なくとも 1 点を共有する（第一段(V)の(a)参照）。このことを用いて得られる新しい解は次の２個である。：$\boxed{3}$（$3K_{1,2}$, K_4）（図 19）$\boxed{4}$（$S(K_{1,3})$, K_3^+）（図 20）。$\boxed{3}$の解グラフの部分グラフを作ると⑫～⑱ を得るが新しい解は得られない。$\boxed{4}$においては、K_3^+ を形成する線の１つ、例えば線４を除去して新しい解⑲ を得る。（図 44 参照）

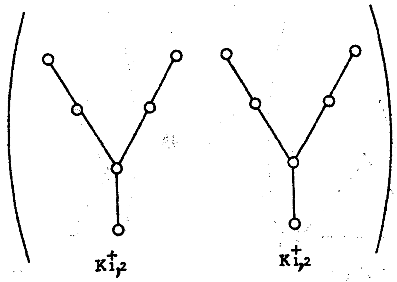
⑲ 

図44

(β) $K_3 \not\subset H$ 。この場合、第一段(vi)の補題によれば、必要条件(v)の(b)をみたすグラフのうちで、線数最大なものは $K_{3,3}$ である。$K_{3,3}$ は解グラフとなり、$\boxed{5}$ ($K_{3,3}$, $K_{3,3}$)(図 21)をうる。$\boxed{5}$ の解グラフ $H=K_{3,3}$ のトリビアルでないあらゆる連結グラフは18個あり[19, Appendix I, 218−222]、それらは対応するGの部分グラフと対になって(*)の解となるが、それらの新しく得られるものは、次の⑳〜㉓の4個である。

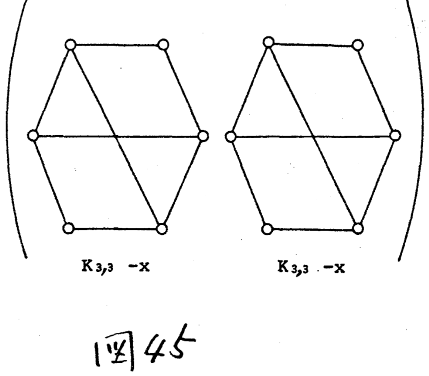
⑳ 

図45

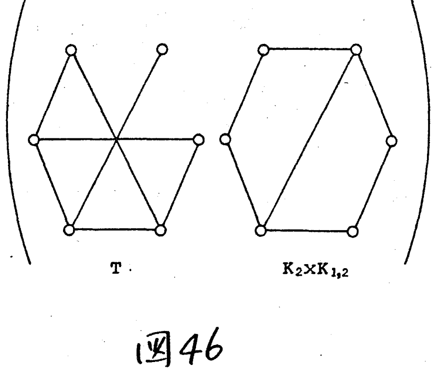
㉑ 

図46

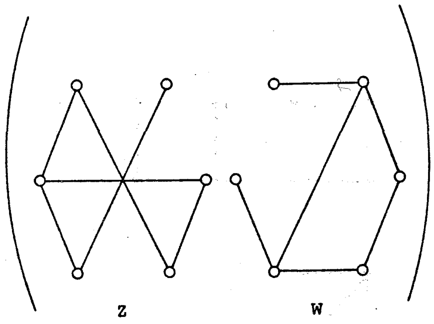
㉒ 

図47

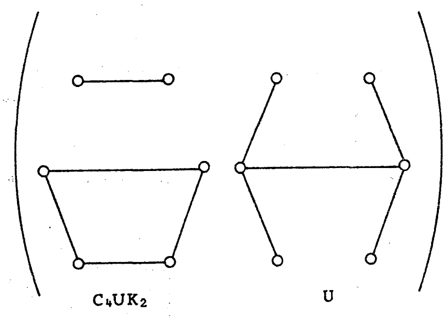
㉓ 

図48

(IV)　$\Delta = 2$。Hが連結であるからHはサイクルまたは通路であるが、$L(H) \not\supset \overline{F_2}$ をみたすべきであるから、$H = C_n$ ($3 \leqq n \leqq 6$) または $H = P_n$ ($4 \leqq n \leqq 6$) である。この場合、唯一つの新しい解 $\boxed{6}$ を得る。(図22)　□

(II)-3　$F = \varphi(G) = \psi(H)$

この方程式をみたすグラフFを求める。

<u>1°　$F = L(G) = L(H)$</u>

このグラフ方程式をみたすFはBeineke[12]によって示された。次の定理は、定理25と独立に、発表されたが、定理25の $\overline{L(G)} = L(H)$ の解(G, H)と実際に対応している。

定理26　$F = L(G) = L(H)$、(即ち、$\exists G, H$, s.t. $F = L(G) = L(H)$) なるFは、完全グラフ、ヌルグラフ、または図49に示される37個のグラフのどれかであることが必要十分条件であ

る。

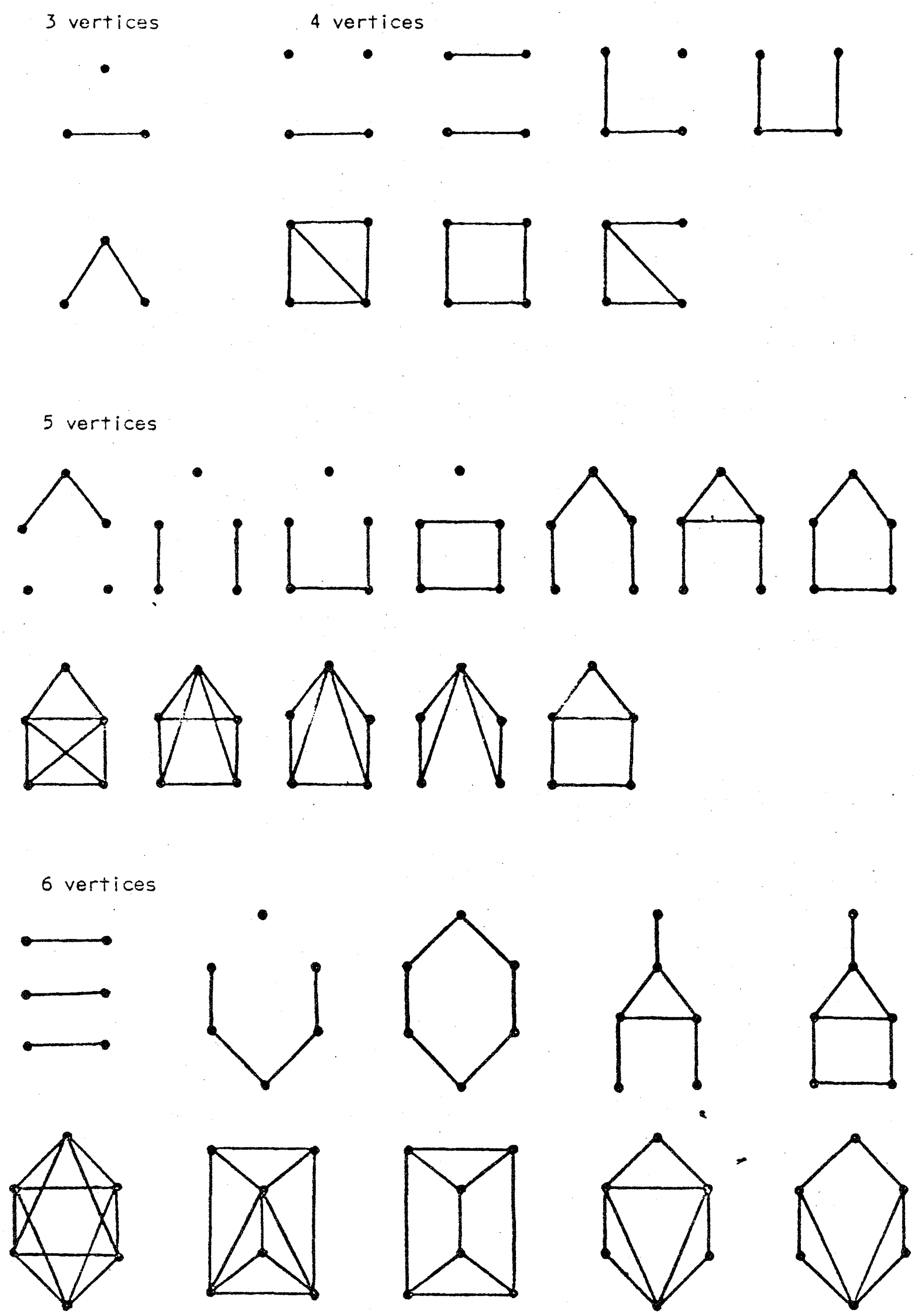


図49 (a)

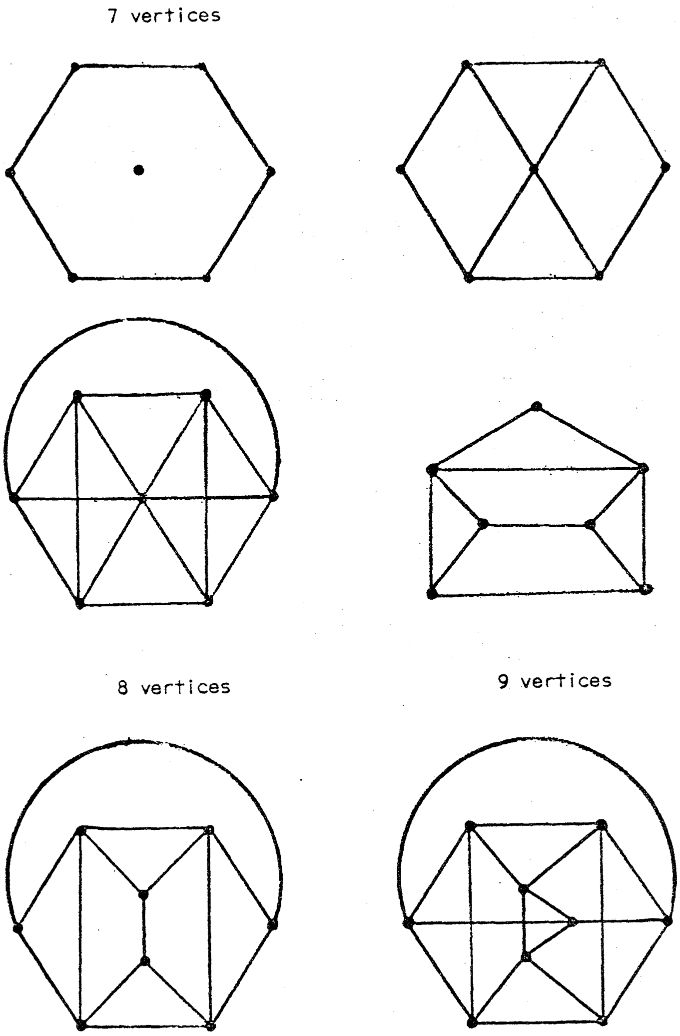


図49 (b)

2° $F = \overline{T(G)} = T(H)$

$\boxed{\text{定理27}}$ (Escalante , Simões - Pereira[17]) $F = \overline{T(G)} = T(H)$ なるトリビアル以外のFは、K_3と$\overline{K_3}(=3K_1)$であり、それ以外にない。

3° $\mathcal{F} = \overline{M(G)} = M(H)$

$\boxed{\text{系25}}$ $\mathcal{F} = \overline{M(G)} = M(H)$ なるトリビアル以外の$\mathcal{F}$は、図50に示されるただ1つであり、それ以外にはない。

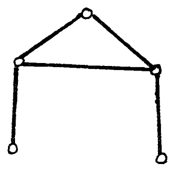


図50.

（証明）

定理25の解の組の中で、$G^{\circ}K_1$の形をしているものは、(9)の解だけであることより明らか。 □

REFERENCES

[1] M.Aigner, Graphs Whose Complement and Line Graph are Isomorphic, J. Comb. Theory 7 (1969), 273-275.

[2] J.Akiyama, Forbidden Subgraphs with Planar Middle Graphs and Planar Total Graphs, Discrete Math. (submitted).

[3] J.Akiyama, Forbidden Subgraphs for Graphs with Planar Repeated Line Graphs, Indian J. Math. (submitted).

[4] J.Akiyama, T.Hamada and I.Yoshimura, A Solution of Graph Equation for Line Graphs, TRU Math. 12 No.2 (1976), 35-43.

[5] J.Akiyama, T.Hamada and I.Yoshimura, Graph Equations for Line Graphs, Total Graphs and Middle Graphs, TRU Math.12 No.2, (1976) 31-34.

[6] J.Akiyama, T.Hamada and I.Yoshimura, Miscellaneous Properties of Middle Graphs, TRU Math.10 (1974), 41-53.

[7] J.Akiyama, T.Hamada and I.Yoshimura, On Characterization of the Middle Graphs, TRU Math.11 (1975), 35-39.

[8] J.Akiyama, K.Kaneko and S.K.Simić, Graph Equations for Line Graphs and N-th Power Graphs I, Publ. Inst. Math. Beograd, (to appear).

[9] J.Akiyama, K.Kaneko and S.K.Simić, Graph Equations for Line Graphs and N-th Power Graphs II, (to appear).

[10] M.Behzad, A Criterion for the Planarity of Total Graph, Proc. Cambridge Philos. Soc. 63 (1976), 129-135.

[11] L.W.Beineke, Characterization of Derived Graphs, J. Comb. Theory 9 (1970), 129-135.

[12] L.W.Beineke, Derived Graph with Derived Complements, Recent Trends in Graph Theory, Berlin (1971), 15-24.

[13] G.Chatrand, D.Geller and S.Hedetniemi, Graphs with Forbidden Subgraphs, J. Comb. Theory 10 (1971), 12-41.

[14] D.M.Cvetković and S.K.Simić, Graph Equations for Line Graphs and Total Graphs, Discrete Math. 13 (1975), 315-320.

[15] D.M.Cvetković, I.B.Lacković and S.K.Simić, Graph Equations, Graph Inequalities and a Fixed Point Theorem, Publ. Inst. Math. Beograd 20(34) (1976), 59-66.

[16] D.M.Cvetković and S.K.Simić, Some Remarks on the Complement of a Line Graph, Publ. Inst. Math. Beograd 17(31) (1974), 37-44.

[17] F.Escalante and J.M.S.Simões-Pereira, Just Two Total Graphs are Complementary, Monatshefte für Math. 81 (1976), 5-13.

[18] D.L.Greenwell and R.L.Heminger, Forbidden Subgraphs for Graphs with Planar Line Graphs, Discrete Math. 2 No.1 (1972), 31-34.

[19] F.Harary, Graph Theory, Reading (1969).

[20] F.Harary, R.M.Karp and W.T.Tutte, A Criterion for Planarity of the Square of a Graph, J. Comb. Theory 2 (1967), 395-405.

[21] J.Krausz, Démonstration nouvelle d'un théoreme de Whitney sur les réseaux, Mat. Fiz. Lapok 50 (1943), 75-89.

[22] V.R.Kulli and E.Sampathkumar, On the Interchanging Graph of a Finite Planar Graph, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 37 (1973), 339-341 (1974).

[23] K.Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fund. Math. 15 (1930), 271-283.

[24] V.V.Menon, On Repeated Interchanging Graphs, Amer. Math. Monthly 13 (1966), 986-989.

[25] V.V.Menon, The Isomorphism between Graphs and their Adjoint Graphs, Canad. Math. Bull. 8 (1965), 7-15.

[26] G.Ringel, Selbstkomplementäre Graphen, Arch. Math. Basel 24 (1963), 354-358.

[27] A. van Rooij and H.Wilf, The Interchange Graphs of a Finite Graph, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 16 (1965), 263-269.

[28] J.Sedláček, Some Properties of Interchange Graphs, Theory of Graphs and its Applications, Academic Press, New York (1962), 145-150.

[29] S.K.Simić, Graph Equation $L^n(G)=\overline{G}$, Univ. Beograd Publ. Electrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No.498-No.541 (1975), 41-44.

[30] H.Whitney, Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs, Amer. J. Math. 54 (1932), 150-168.