数理解析研究所講究録
第333巻 1978年 97-145

マトロイド間の射について

専修大 経営 佐藤 創
大阪大 基礎工 小林欣吾
電総研 数理基礎 星 守

ま え が き

マトロイドの圏(category)を構成するにあたり，マトロイド間の射(morphism)として何を指定すれば有効であるかという点に関しては まだ決定的な結論が得られていないように思われる。マトロイドを定義づける集合族にはいろいろなものが考えられるが，マトロイド間の射はそれらの集合族のいずれかを“保存”することが望ましい。われわれはまず，各種の集合族の間の関係を整理し，それぞれの集合族を保存する対応または写像を射とするマトロイドの圏を考え，それらの相違点などについて考察した。

〔1〕 準備

1.1 圏の定義

簡単に圏を定義しておく[1],[2]。

対象（object）と呼ばれるものの集まり（クラス）$\mathcal{O}$が定められていて，その中の任意の2つの対象AとBに対してAからBへの射（morphism）と呼ばれるものの集合$\mathcal{M}[A, B]$が指定されているとする。ただし，$(A, B) \neq (A', B')$ならば$\mathcal{M}[A,B] \cap \mathcal{M}[A', B'] = \phi$であるものとする。

射$\alpha \in \mathcal{M}[A, B]$を$\alpha : A \to B$または$A \xrightarrow{\alpha} B$で表わす。

任意の射$\alpha : A \to B$，$\beta : B \to C$に対して射の合成$\beta\alpha : A \to C$が定義されていて，次の条件を満たすとき，$(\mathcal{O}, \mathcal{M})$を圏（category）と呼ぶ。

1) $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$, $\gamma : C \to D$に対して

$$(\gamma\beta)\alpha = \gamma(\beta\alpha)$$

2) すべての対象Aに対して恒等射$1_A : A \to A$が存在し任意の射$\alpha : A \to B$, $\beta : C \to A$に対して

$$\alpha 1_A = \alpha, \quad 1_A \beta = \beta$$

圏における諸概念は以下必要に応じて定義する。

1.2 マトロイドの定義

マトロイドの定義には互いに等価な公理系がいくつも考えられているが，独立集合族によるものを掲げておく[3]。

Eを有限集合，$\mathcal{I}$をEの部分集合の族とする。$\mathcal{I}$が次の条件を満たすとき，$M=(E,\mathcal{I})$をE上のマトロイド(matroid)と呼び，$\mathcal{I}$の要素をMの独立集合と呼ぶ。

1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

2) $I \in \mathcal{I},\ J \subset I$ ならば $J \in \mathcal{I}$

3) $I, J \in \mathcal{I}$ かつ $|I| > |J|$ ならば

$$\exists x \in I - J \quad J \cup \{x\} \in \mathcal{I}$$

〔記号 $|I|$ は集合Iの要素の個数を表わす〕

このときEをMの台集合と呼ぶ。一般に，マトロイドMの台集合をE_Mで表わす。

MをE上のマトロイド，$\mathcal{I}_M$をMの独立集合の族とするとき，Mに関する階数関数$\rho_M : 2^E \to M$，閉包作用子$\sigma_M : 2^E \to 2^E$を次のように定義する。すなわち，Eの任意の部分集合Xに対して，

$$\rho_M X = \max\{|I| ;\ I \subset X \text{ かつ } I \in \mathcal{I}_M\}$$

をXの階数と呼び，

$$\sigma_M X = \{y ;\ \rho_M(X \cup \{y\}) = \rho_M X\}$$

をXの閉包と呼ぶ。特に，$\rho_M E$をマトロイドMの階数と呼び，$\rho(M)$で表わす。

$\mathcal{I}_M, \rho_M, \sigma_M$を用いてさらに次のようなEの部分集合族(

――マトロイドMに関する――）が定義される。

$\mathcal{D}_M$ ：従属集合（独立集合でない集合）の族

$\mathcal{C}_M$ ：サーキット（極小の従属集合）の族

$\mathcal{B}_M$ ：基（極大の独立集合）の族

$\mathcal{S}_M$ ：スパン集合（基を含む集合）の族

$\mathcal{F}_M$ ：フラット（$\sigma_M F = F$ なる集合F）の族

$\mathcal{H}_M$ ：超平面（$H \in \mathcal{F}_M$ かつ $\rho_M H = \rho(M) - 1$ なるH）の族

$\mathcal{T}_M$ ：T-フラット（サーキットの和集合）の族

［W. T. Tutte[4]によるフラットの定義は上記の$\mathcal{F}_M$とは異なるので，それをT-フラットと呼ぶことにした］

マトロイド理論で用いられている集合族にはこれ以外に，コサーキット族，補基族などがある。

以上に定義した集合族は，そのいずれのものが与えられても他の集合族をそれぞれ一意的に決定する。したがって各集合族に関するマトロイドの公理系をつくることができる[5]。

1.3　マトロイドの例

任意の有限集合E（$|E| = m$）に対して，k個の要素をもつすべての部分集合の族$\binom{E}{k} = \{X ; X \subset E, |X| = k\}$は独立集合の条件を満たし，$(E, \binom{E}{k})$はマトロイドとなる。このような構造をもつマトロイドをk-一様マトロイドと総称し，$U_{k,m}$で表わす。特に，$U_{0,0}$は空集合ϕの上の唯一のマトロ

イドでこれを零マトロイドと呼び，Oで表わすことにする。

グラフGの辺集合をEとし，Gのすべての初等閉路の集合をCとすれば，Cはマトロイドのサーキット族となる（閉路を含まない集合が独立集合である）。このようにして定義されるマトロイドをグラフGの閉路マトロイドと呼ぶ。以下で具体的なマトロイドを例示するときにはこのグラフによる表現を多く用いる（すべてのマトロイドがグラフの閉路マトロイドとして表現できるわけではない。簡単な例は$U_{2,4}$）。

マトロイドMに対して

$$\mathcal{B}_M^* = \{ E-B \,;\, B \in \mathcal{B}_M \}$$

とすれば，$\mathcal{B}_M^*$はあるマトロイドM^*の基族$\mathcal{B}_{M^*}$となることが知られていて，M^*はMの双対マトロイドと呼ばれる。

〔2〕 マトロイド集合族

2.1 集合族作用子

マトロイドに関連する集合族をいくつか1.2で示したが，これらの相互関係については従来必ずしも均斉のとれた形式で表現されていたとは言えない。われわれは位相空間論からの類推をもとにこれらの集合族の相互関係を体系的に整理することを試みた。まず，一般に有限集合Eの部分集合族$\mathcal{E}$に関して次の作用子（$2^E \longrightarrow 2^E$）を導入しておく。

定義

$$sub\,\mathfrak{X} = \{ Y ;\ {}^{\exists}X \in \mathfrak{X} \quad Y \subset X \}$$

$$quot\,\mathfrak{X} = \{ Y ;\ {}^{\exists}X \in \mathfrak{X} \quad X \subset Y \}$$

$$meet\,\mathfrak{X} = \{ \cap \mathfrak{X}' ;\ \mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X} \} \qquad (\text{特に } \cap \phi = E)$$

$$join\,\mathfrak{X} = \{ \cup \mathfrak{X}' ;\ \mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X} \} \qquad (\text{特に } \cup \phi = \phi)$$

$$max\,\mathfrak{X} = \{ Y ;\ Y \in \mathfrak{X},\ {}^{\forall}X \in \mathfrak{X} \quad Y \subset X \text{ ならば } X = Y \}$$

$$min\,\mathfrak{X} = \{ Y ;\ Y \in \mathfrak{X},\ {}^{\forall}X \in \mathfrak{X} \quad X \subset Y \text{ ならば } X = Y \}$$

$$maxi\,\mathfrak{X} = max\,(\mathfrak{X} - \{E\})$$

$$mini\,\mathfrak{X} = min\,(\mathfrak{X} - \{\phi\})$$

$$\mathfrak{X}^c = \{ Y ;\ Y \notin \mathfrak{X} \} \qquad (\mathfrak{X}\text{の“補”集合族})$$

$$\mathfrak{X}^r = \{ E - X ;\ X \in \mathfrak{X} \} \quad (\mathfrak{X}\text{の“反転”集合族})$$

〔quot は subset に対する quotient set の略，max $\mathfrak{X}$ は $\mathfrak{X}$ の極大集合族，min $\mathfrak{X}$ は $\mathfrak{X}$ の極小集合族である〕

各作用子の定義から直ちに次の性質が導かれる。

命題 1

(1.1) $sub\,\mathfrak{X} \supset \mathfrak{X}$ (1.2) $quot\,\mathfrak{X} \supset \mathfrak{X}$

(1.3) $meet\,\mathfrak{X} \supset \mathfrak{X}$ (1.4) $join\,\mathfrak{X} \supset \mathfrak{X}$

(1.5) $max\,\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}$ (1.6) $min\,\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}$

(1.7) $maxi\,\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}$ (1.8) $mini\,\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}$

(2.1) $sub \cdot sub\,\mathfrak{X} = sub\,\mathfrak{X}$ (2.2) $quot \cdot quot\,\mathfrak{X} = quot\,\mathfrak{X}$

(2.3) $\mathrm{meet}\cdot\mathrm{meet}\,\mathfrak{X} = \mathrm{meet}\,\mathfrak{X}$ (2.4) $\mathrm{join}\cdot\mathrm{join}\,\mathfrak{X} = \mathrm{join}\,\mathfrak{X}$

(2.5) $\max\cdot\max\mathfrak{X} = \max\mathfrak{X}$ (2.6) $\min\cdot\min\mathfrak{X} = \min\mathfrak{X}$

(2.7) $\mathrm{maxi}\cdot\mathrm{maxi}\,\mathfrak{X} = \mathrm{maxi}\,\mathfrak{X}$ (2.8) $\mathrm{mini}\cdot\mathrm{mini}\,\mathfrak{X} = \mathrm{mini}\,\mathfrak{X}$

(3) $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ ならば

(3.1) $\mathrm{sub}\,\mathfrak{X} \subset \mathrm{sub}\,\mathfrak{Y}$ (3.2) $\mathrm{quot}\,\mathfrak{X} \subset \mathrm{quot}\,\mathfrak{Y}$

(3.3) $\mathrm{meet}\,\mathfrak{X} \subset \mathrm{meet}\,\mathfrak{Y}$ (3.4) $\mathrm{join}\,\mathfrak{X} \subset \mathrm{join}\,\mathfrak{Y}$

(3.5) $\mathfrak{X}^c \supset \mathfrak{Y}^c$ (3.6) $\mathfrak{X}^r \subset \mathfrak{Y}^r$

(4.1) $\mathrm{sub}\cdot\max\mathfrak{X} = \mathrm{sub}\,\mathfrak{X}$ (4.2) $\mathrm{quot}\cdot\min\mathfrak{X} = \mathrm{quot}\,\mathfrak{X}$

(4.3) $\max\cdot\mathrm{sub}\,\mathfrak{X} = \max\mathfrak{X}$ (4.4) $\min\cdot\mathrm{quot}\,\mathfrak{X} = \min\mathfrak{X}$

(4.5) $\mathrm{meet}\cdot\mathrm{maxi}\,\mathfrak{X} \subset \mathrm{meet}\,\mathfrak{X}$ (4.6) $\mathrm{join}\cdot\mathrm{mini}\,\mathfrak{X} \subset \mathrm{join}\,\mathfrak{X}$

(4.7) $\mathrm{maxi}\cdot\mathrm{meet}\,\mathfrak{X} = \mathrm{maxi}\,\mathfrak{X}$ (4.8) $\mathrm{mini}\cdot\mathrm{join}\,\mathfrak{X} = \mathrm{mini}\,\mathfrak{X}$

(5.1) $\mathfrak{X}^{cc} = \mathfrak{X}$ (5.2) $\mathfrak{X}^{rr} = \mathfrak{X}$ (5.3) $\mathfrak{X}^{rc} = \mathfrak{X}^{cr}$

(6.1) $\mathrm{sub}\,\mathfrak{X}^r = (\mathrm{quot}\,\mathfrak{X})^r$ (6.2) $\mathrm{quot}\,\mathfrak{X}^r = (\mathrm{sub}\,\mathfrak{X})^r$

(6.3) $\mathrm{meet}\,\mathfrak{X}^r = (\mathrm{join}\,\mathfrak{X})^r$ (6.4) $\mathrm{join}\,\mathfrak{X}^r = (\mathrm{meet}\,\mathfrak{X})^r$

(6.5) $\max\mathfrak{X}^r = (\min\mathfrak{X})^r$ (6.6) $\min\mathfrak{X}^r = (\max\mathfrak{X})^r$

(6.7) $\mathrm{maxi}\,\mathfrak{X}^r = (\mathrm{mini}\,\mathfrak{X})^r$ (6.8) $\mathrm{mini}\,\mathfrak{X}^r = (\mathrm{maxi}\,\mathfrak{X})^r$

証明　一部のみ示す。他も同様.

(4.1) $X \in \mathfrak{X}$ とすれば, $\max\mathfrak{X}$ の定義と E の有限性により $\exists X_1 \in \max\mathfrak{X}$ $X \subset X_1$, ゆえに $X \in \mathrm{sub}\cdot\max\mathfrak{X}$, すなわち $\mathfrak{X} \subset \mathrm{sub}\cdot\max\mathfrak{X}$。さらに (3.1) と (2.1) により $\mathrm{sub}\,\mathfrak{X} \subset \mathrm{sub}\cdot\max\mathfrak{X}$ である。一方, (1.5) と (3.1) より $\mathrm{sub}\cdot\max\mathfrak{X} \subset$

$sub\,\mathfrak{X}$ が得られる。

(4.7) $\mathfrak{X}=\{E\}$ のときは $meet\,\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$ で両辺 ϕ となる。
$X\in maxi\cdot meet\,\mathfrak{X}$ とすれば，$X\in meet\,\mathfrak{X}-\{E\}$ であるから
$^{\exists}X_1\in\mathfrak{X}-\{E\}$ $X\subset X_1$，さらに $^{\exists}X_2\in maxi\,\mathfrak{X}$ $X_1\subset X_2$。
(1.7) と (1.3) により $X_2\in meet\,\mathfrak{X}-\{E\}$ であるから $X=X_2$，
ゆえに $X\in maxi\,\mathfrak{X}$，すなわち $maxi\cdot meet\,\mathfrak{X}\subset maxi\,\mathfrak{X}$。一方，
$X\in maxi\,\mathfrak{X}$ とすれば，$X\in meet\,\mathfrak{X}-\{E\}$ であり，任意の X'
$\in meet\,\mathfrak{X}-\{E\}$ に対して もし $X\subset X'$ ならば，$X'=\cap\mathfrak{X}'$，
$\mathfrak{X}'=\{X_\lambda;\ X_\lambda\in\mathfrak{X}-\{E\},\ \lambda\in\Lambda\}$ とおくと 各 λ について
$X\subset X_\lambda$ となるが，$X\in maxi\,\mathfrak{X}$ であったから $X=X_\lambda$，
すなわち $X=X'$ である。ゆえに $X\in maxi\cdot meet\,\mathfrak{X}$，すなわ
ち $maxi\,\mathfrak{X}\subset maxi\cdot meet\,\mathfrak{X}$ が得られる。

(6.1) $X\in sub\,\mathfrak{X}^r \Leftrightarrow {}^{\exists}Y\in\mathfrak{X}^r\ X\subset Y \Leftrightarrow {}^{\exists}E-Y\in\mathfrak{X}\ E-Y$
$\subset E-X \Leftrightarrow E-X\in quot\,\mathfrak{X} \Leftrightarrow X\in(quot\,\mathfrak{X})^r$

（証明終）

Eの部分集合の族に関して次の概念を定義する。

<u>定義</u> $\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z},\mathfrak{U},\mathfrak{V}$ をEの部分集合族とする。

$\mathfrak{X}$ が<u>下に閉</u> とは $sub\,\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$

$\mathfrak{Z}$ が<u>上に閉</u> とは $quot\,\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}$

$\mathfrak{V}$ が<u>交完備</u> とは $meet\,\mathfrak{V}=\mathfrak{V}$

$\mathfrak{U}$ が<u>結完備</u> とは $join\,\mathfrak{U}=\mathfrak{U}$

下に閉な$\mathcal{X}$に対して, $\mathcal{Y}$が$\mathcal{X}$の上基　とは　$\mathcal{X} = sub\ \mathcal{Y}$

上に閉な$\mathcal{Z}$に対して, $\mathcal{Y}$が$\mathcal{Z}$の下基　とは　$\mathcal{Z} = quot\ \mathcal{Y}$

交完備な$\mathcal{V}$に対して, $\mathcal{Y}$が$\mathcal{V}$の閉基　とは　$\mathcal{V} = meet\ \mathcal{Y}$

結完備な$\mathcal{U}$に対して, $\mathcal{Y}$が$\mathcal{U}$の閉基　とは　$\mathcal{U} = join\ \mathcal{Y}$

命題1 (2.1)～(2.4) により, 任意の集合族$\mathcal{Y}$に対して,

$$\mathcal{X} = sub\ \mathcal{Y},\quad \mathcal{Z} = quot\ \mathcal{Y},\quad \mathcal{V} = meet\ \mathcal{Y},\quad \mathcal{U} = join\ \mathcal{Y}$$

はそれぞれ, 下に閉, 上に閉, 交完備, 結完備な集合族となる。空なる族ϕは下に閉, かつ上に閉であり, $meet\ \phi = \{E\}$, $join\ \phi = \{\phi\}$ であるから,

$\mathcal{X}$が下に閉, 空でない　ならば　$\mathcal{X} \ni \phi$ (最小元),

$\mathcal{Z}$が上に閉, 空でない　ならば　$\mathcal{Z} \ni E$ (最大元),

$\mathcal{V}$が交完備　ならば　$\mathcal{V} \ni E$ (最大元), $\cap\mathcal{V}$ (最小元),

$\mathcal{U}$が結完備　ならば　$\mathcal{U} \ni \phi$ (最小元), $\cup\mathcal{U}$ (最大元)

である。

一般に, 交完備な集合族, 結完備な集合族は集合の包含関係を順序として束をなす。たとえば, $\mathcal{V}\ (\neq \phi)$ を交完備な集合族, $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ とすれば,

$$inf\{V_1, V_2\} = V_1 \cap V_2,$$

$$sup\{V_1, V_2\} = \cap\{V ; V \in \mathcal{V}\quad V \supset V_1 \cup V_2\}$$

と定義される。

命題2

(1) $\mathscr{X}$が下に閉ならば, $\max \mathscr{X}$ は $\mathscr{X}$ の最小の上基である:

$$\mathrm{sub}\cdot\max \mathscr{X} = \mathscr{X} \ ; \ \mathrm{sub}\,\mathscr{Y} = \mathscr{X} \quad \text{ならば} \quad \max \mathscr{X} \subset \mathscr{Y}$$

(2) $\mathscr{Z}$が上に閉ならば, $\min \mathscr{Z}$ は $\mathscr{Z}$ の最小の下基である:

$$\mathrm{quot}\cdot\min \mathscr{Z} = \mathscr{Z} \ ; \ \mathrm{quot}\,\mathscr{Y} = \mathscr{Z} \quad \text{ならば} \quad \min \mathscr{Z} \subset \mathscr{Y}$$

証明 (1)の前半は命題1 (4.1), 後半は同(4.3)と(1.5)による。

(2)については(1)と双対的。 (証明終)

(注意) $\mathscr{V}$が交完備であっても, $\mathrm{maxi}\,\mathscr{V}$が$\mathscr{V}$の閉基であるとは限らない($\mathrm{meet}\cdot\mathrm{maxi}\,\mathscr{V} \subset \mathscr{V}$)が, もしそうならば最小の閉基となる(命題5)。結完備についても同様($\mathrm{join}\cdot\mathrm{mini}\,\mathscr{U} \subset \mathscr{U}$)。

命題3 任意の集合族 $\mathscr{Y}$ $(\subset 2^E)$ に対して次の条件は互いに同値である。

(1) $Y_1, Y_2 \in \mathscr{Y} \Rightarrow Y_1 \subsetneqq Y_2$ ではない

(2) $\max \mathscr{Y} = \mathscr{Y}$

(3) $\min \mathscr{Y} = \mathscr{Y}$

$\mathscr{Y} \neq \{E\}$ のときには, 次の条件とも同値である。

(4) $\mathrm{maxi}\,\mathscr{Y} = \mathscr{Y}$

$\mathscr{Y} \neq \{\phi\}$ のときには, 次の条件とも同値である。

(5) $\mathrm{mini}\,\mathscr{Y} = \mathscr{Y}$

証明 (1)$\Leftrightarrow$(2) を示す。(1)$\Leftrightarrow$(3) も同様。

(2) でないとすれば $\max \mathcal{Y} \subsetneqq \mathcal{Y}$ であるから $\exists Y_1 \in \mathcal{Y} - \max \mathcal{Y}$, $\exists Y_2 \in \max \mathcal{Y}$ $Y_1 \subsetneqq Y_2$ となり，(1) でない。逆に，(1) でないとすれば，$\exists Y_1, Y_2 \in \mathcal{Y}$ $Y_1 \subsetneqq Y_2$ であるから $Y_1 \notin \max \mathcal{Y}$ となり $\max \mathcal{Y} \subsetneqq \mathcal{Y}$，すなわち (2) でない。

$\mathcal{Y} \not\ni \{E\}$ ならば，$\mathrm{maxi}\, \mathcal{Y} = \max \mathcal{Y}$。ゆえに，(2) $\Leftrightarrow$ (4)。

$\mathcal{Y} \not\ni \{\phi\}$ ならば同様にして (3) $\Leftrightarrow$ (5)。 (証明終)

<u>定義</u> 命題3で述べられている互いに同値な条件のいずれかを満たす集合族は<u>全非連結</u>であるという。特に，$\{E\}$ と $\{\phi\}$ を<u>自明な</u>全非連結集合族と呼ぶ（空なる族 ϕ も全非連結ではあるが自明とは呼ばないことにする）。

<u>命題4</u> $\mathcal{Y}$ を全非連結な集合族とするとき，

(1) $\mathcal{Y}$ は下に閉な集合族 $\mathcal{Z} = \mathrm{sub}\, \mathcal{Y}$ の最小の上基である：

$$\max \cdot \mathrm{sub}\, \mathcal{Y} = \mathcal{Y}$$

(2) $\mathcal{Y}$ は上に閉な集合族 $\mathcal{Z} = \mathrm{quot}\, \mathcal{Y}$ の最小の下基である：

$$\min \cdot \mathrm{quot}\, \mathcal{Y} = \mathcal{Y}$$

(3) さらに，$\mathcal{Y} \neq \{E\}$ ならば，$\mathcal{Y}$ は交完備な集合族 $\mathcal{V} = \mathrm{meet}\, \mathcal{Y}$ の最小の閉基である： $\mathrm{maxi} \cdot \mathrm{meet}\, \mathcal{Y} = \mathcal{Y}$

(4) さらに，$\mathcal{Y} \neq \{\phi\}$ ならば，$\mathcal{Y}$ は結完備な集合族 $\mathcal{U} = \mathrm{join}\, \mathcal{Y}$ の最小の開基である： $\mathrm{mini} \cdot \mathrm{join}\, \mathcal{Y} = \mathcal{Y}$

(5) $\mathcal{Y} = \operatorname{sub} \mathcal{Y} \cap \operatorname{quot} \mathcal{Y}$

(6) さらに，$\mathcal{Y}$が非自明ならば

$$\mathcal{Y} = \operatorname{meet} \mathcal{Y} \cap \operatorname{join} \mathcal{Y} - \{E, \phi\}$$

証明 (1) 命題1 (4.3) および命題3 により明らか。(2)も同様。

(3) 閉基であることは命題1 (4.7) と命題3 による。最小性は命題1 (4.7), (1.7) による。(4)も同様。

(5) $\mathcal{Y} \subset \operatorname{sub} \mathcal{Y} \cap \operatorname{quot} \mathcal{Y}$ は明らか。$Y \in \operatorname{sub} \mathcal{Y} \cap \operatorname{quot} \mathcal{Y}$ とすれば $\exists Y_1, Y_2 \in \mathcal{Y}$　$Y_2 \subset Y \subset Y_1$ であるが，$\mathcal{Y}$ の全非連結性により $Y_2 = Y = Y_1$，ゆえに $Y \in \mathcal{Y}$。

(6) $\mathcal{Y} \subset \operatorname{meet} \mathcal{Y} \cap \operatorname{join} \mathcal{Y} - \{E, \phi\}$ は明らか。$Y \in \operatorname{meet} \mathcal{Y} \cap \operatorname{join} \mathcal{Y} - \{E, \phi\}$ とすれば，$\exists \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y} - \{E, \phi\}$　$Y = \cap \mathcal{Y}_1 = \cup \mathcal{Y}_2$ であるから $Y_1 \in \mathcal{Y}_1$, $Y_2 \in \mathcal{Y}_2$ に対して $Y_2 \subset Y \subset Y_1$ となる。(5)と同様にして $Y \in \mathcal{Y}$ を得る。　(証明終)

(注意) $\operatorname{meet}\{E\}$ の最小の閉基，$\operatorname{join}\{\phi\}$ の最小の閉基はいずれも空なる族ϕである。

<u>定義</u>　交完備であって全非連結な閉基をもつ集合族を<u>b-交完備</u>と呼び，双対的に，結完備であって全非連結な閉基をもつ集合族を<u>b-結完備</u>と呼ぶことにする。

[b-交完備，b-結完備の b は base の略である]

命題5

(1) $\mathcal{V}$ が b-交完備 とは $\mathrm{meet}\cdot\mathrm{maxi}\,\mathcal{V}=\mathcal{V}$ であることで，
$\mathcal{V}\neq\{E\}$ ならば $\mathrm{maxi}\,\mathcal{V}$ は $\mathcal{V}$ の最小の開基である。

(2) $\mathcal{U}$ が b-結完備 とは $\mathrm{join}\cdot\mathrm{mini}\,\mathcal{U}=\mathcal{U}$ であることで，
$\mathcal{U}\neq\{\phi\}$ ならば $\mathrm{mini}\,\mathcal{U}$ は $\mathcal{U}$ の最小の開基である。

証明　定義および命題4(3),(4)より明らか。　（証明終）

命題2,4,5の意味で，全非連結な集合族は“特異な場合”を除いて，下に閉，上に閉，b-交完備，b-結完備な集合族とそれぞれ1対1に対応し，

sub と max，quot と min，

meet と maxi，join と mini

はそれぞれ逆の作用子である。

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{V} \arrow[d, shift left, "\mathrm{mini}"] & \\
\mathcal{X} \arrow[r, shift right, "\mathrm{max}"'] & \mathcal{Y} \arrow[l, shift right, "\mathrm{sub}"'] \arrow[u, shift left, "\mathrm{join}"] \arrow[r, shift left, "\mathrm{quot}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{meet}"'] & \mathcal{Z} \arrow[l, shift left, "\mathrm{min}"] \\
 & \mathcal{U} \arrow[u, shift right, "\mathrm{maxi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

“特異な場合”とは

$\mathrm{maxi}\cdot\mathrm{meet}\{E\}=\phi$，$\mathrm{mini}\cdot\mathrm{join}\{\phi\}=\phi$

であることを指す。（$\{E\}$ と $\{\phi\}$ は自明な全非連結集合族）

命題6

(1) $\mathcal{X}$ が下に閉ならば，$\mathcal{X}^c$，$\mathcal{X}^r$ は上に閉

(2) $\mathcal{Z}$ が上に閉ならば，$\mathcal{Z}^c$，$\mathcal{Z}^r$ は下に閉

(3) $\mathcal{V}$ が (b-)交完備ならば，$\mathcal{V}^r$ は (b-)結完備

(4) $\mathcal{U}$が(b-)結完備ならば，$\mathcal{U}^r$ は(b-)交完備

(5) $\mathcal{Y}$が全非連結ならば，$\mathcal{Y}^r$ も全非連結

証明　命題1 (3.5), (3.6), (5), (6) より明らか。　(証明終)

全非連結な集合族$\mathcal{Y}_i$から定義される集合族

$$\mathcal{Y}_{i+1} = \max(\mathrm{quot}\,\mathcal{Y}_i)^c, \quad \mathcal{Y}_{i-1} = \min(\mathrm{sub}\,\mathcal{Y}_i)^c$$

は再び全非連結な集合族となる。Eが有限集合であるから，全非連結な集合族の列$\mathcal{Y}_i$, $\mathcal{Y}_i^r$ $(i=0,\pm 1,\cdots)$は周期列をなす（図1）。$E=\{1,2,3,4\}$ のときの1つの周期列の例を図2

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U}_{-1} & & & \mathcal{U}_0 & & & \mathcal{U}_1 & \\
\mathcal{X}_{-1} & \mathcal{Y}_{-1} \arrow[l, "\mathrm{sub}"'] \arrow[r, "\mathrm{quot}"] \arrow[u, "\mathrm{join}"'] \arrow[d, "\mathrm{meet}"] & \mathcal{Z}_{-1} \arrow[r, dash, dashed, "c"] & \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \arrow[l, "\mathrm{sub}"'] \arrow[r, "\mathrm{quot}"] \arrow[u, "\mathrm{join}"'] \arrow[d, "\mathrm{meet}"] & \mathcal{Z}_0 \arrow[r, dash, dashed, "c"] & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \arrow[l, "\mathrm{sub}"'] \arrow[r, "\mathrm{quot}"] \arrow[u, "\mathrm{join}"'] \arrow[d, "\mathrm{meet}"] & \mathcal{Z}_1 \\
 & \mathcal{V}_{-1} & & & \mathcal{V}_0 & & & \mathcal{V}_1 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{V}^r_{-1} & & & \mathcal{V}^r_0 & & & \mathcal{V}^r_1 & \\
\mathcal{X}^r_{-1} & \mathcal{Y}^r_{-1} \arrow[l, "\mathrm{quot}"'] \arrow[r, "\mathrm{sub}"] \arrow[u, "\mathrm{meet}"'] \arrow[d, "\mathrm{join}"] & \mathcal{Z}^r_{-1} \arrow[r, dash, dashed, "c"] & \mathcal{X}^r_0 & \mathcal{Y}^r_0 \arrow[l, "\mathrm{quot}"'] \arrow[r, "\mathrm{sub}"] \arrow[u, "\mathrm{meet}"'] \arrow[d, "\mathrm{join}"] & \mathcal{Z}^r_0 \arrow[r, dash, dashed, "c"] & \mathcal{X}^r_1 & \mathcal{Y}^r_1 \arrow[l, "\mathrm{quot}"'] \arrow[r, "\mathrm{sub}"] \arrow[u, "\mathrm{meet}"'] \arrow[d, "\mathrm{join}"] & \mathcal{Z}^r_1 \\
 & \mathcal{U}^r_{-1} & & & \mathcal{U}^r_0 & & & \mathcal{U}^r_1 &
\end{tikzcd}$$

図 1

に示す（図中，123 は部分集合 $\{1,2,3\}$ を，$\binom{E}{2}$ はすべての2元集合の集まりを表わす。四角で囲ってある全非連結な集合族はマトロイドの基族をなすもので，対応する閉路マトロイドをその下にグラフで表わしてある）。

2.2 マトロイド集合族の間の関係

前節の結果を利用してマトロイドに関連する集合族の間の関係を体系的に述べることができるが，その際に

$\mathcal{W}_M$：非スパン集合（基を含まない集合）の族

を考察の対象に加えておくのがよいことがわかる（この集合族は従来ほとんど注目されなかったものである）。

マトロイドMに関連する次の18種類の集合族

$$\mathcal{T}_M \quad \mathcal{C}_M \quad \mathcal{D}_M \quad \mathcal{I}_M \quad \mathcal{B}_M \quad \mathcal{S}_M \quad \mathcal{W}_M \quad \mathcal{H}_M \quad \mathcal{F}_M$$
$$\mathcal{T}_M^r \quad \mathcal{C}_M^r \quad \mathcal{D}_M^r \quad \mathcal{I}_M^r \quad \mathcal{B}_M^r \quad \mathcal{S}_M^r \quad \mathcal{W}_M^r \quad \mathcal{H}_M^r \quad \mathcal{F}_M^r$$

［記号については 1.2 参照のこと］

をマトロイド集合族と総称する。後半の9種類を特に“反転集合族”と呼ぶことにする。$\mathcal{B}_M^r$ はMの補基族，$\mathcal{H}_M^r$ はMのコサーキット（初等切断集合）族に相当するが，それ以外の反転集合族はMに関連するものとしてはあまり積極的に利用されていない。マトロイド集合族を上記の18種類に限定すべき必然的な理由は何もないが，当面そのようにしておく。

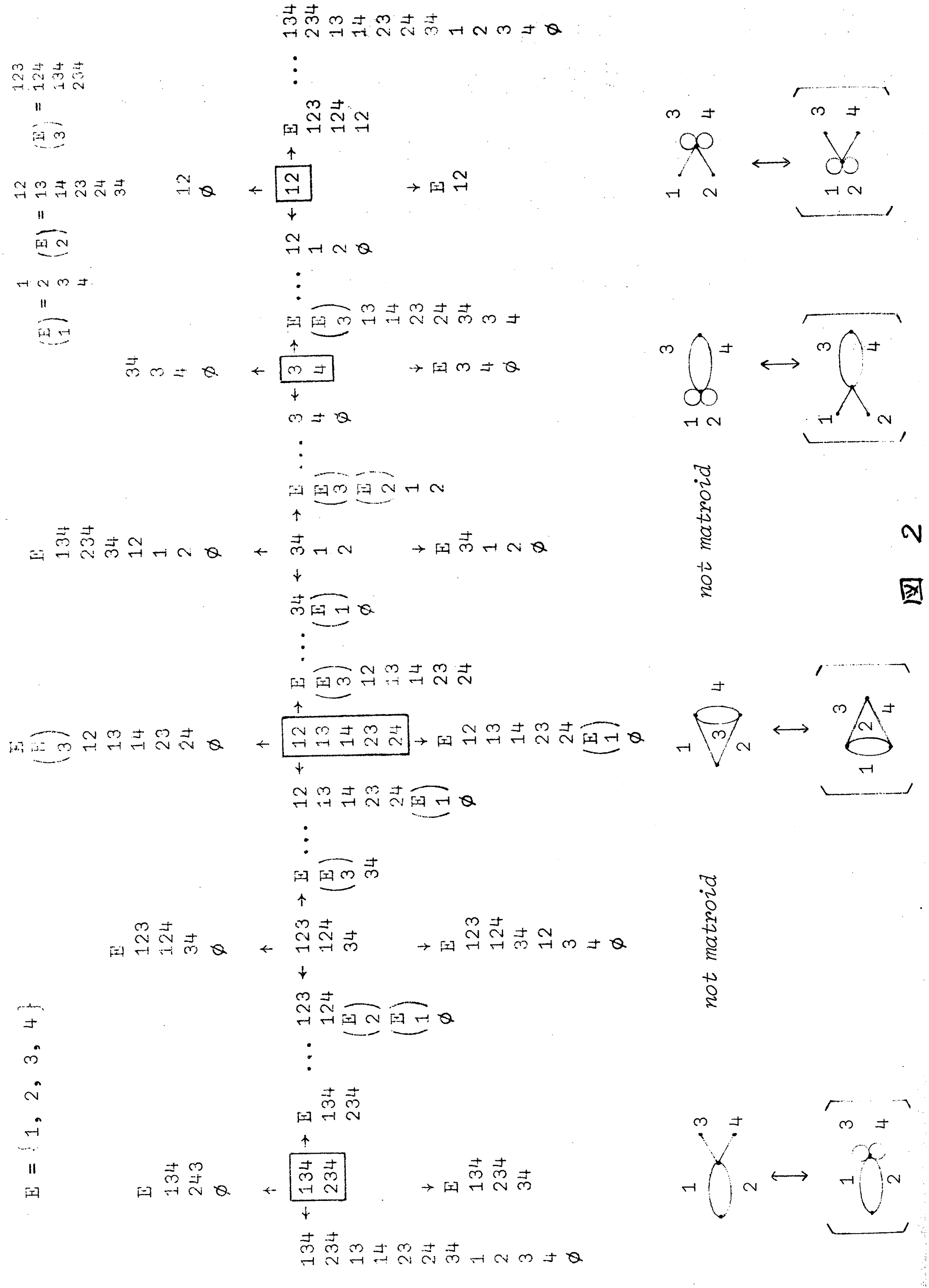


図 2

マトロイド集合族に関して次の2つの作用子（$2^E \to 2^E$）を導入しておく（$\mathcal{X}$を任意のマトロイド集合族とする）。

$$\mathcal{X}^*_M = \mathcal{X}_{M^*} \quad (M^*\text{における集合族}\mathcal{X})$$

$$\mathcal{X}^\#_M = \mathcal{X}^r_{M^*} \quad (M^*\text{における集合族}\mathcal{X}^r)$$

［M^* は M の双対マトロイドである（1.3）］

定義より，明らかに　$\mathcal{X}^{**}_M = \mathcal{X}_M$，$\mathcal{X}^{\#\#}_M = \mathcal{X}_M$，$\mathcal{X}^\#_M = \mathcal{X}^{r*}_M = \mathcal{X}^{*r}_M$ である。また，$\mathcal{B}^\# = \mathcal{B}$，$\mathcal{I}^\# = \mathcal{S}$，$\mathcal{D}^\# = \mathcal{W}$，$\mathcal{C}^\# = \mathcal{H}$，$\mathcal{T}^\# = \mathcal{F}$ である。

<u>命題 7</u>　$\mathcal{X}$を任意のマトロイド集合族とする。

（1）$\mathcal{X}^r$ の公理系は $\mathcal{X}^\#$ の公理系と全く同一である。

たとえば，$\mathcal{I}^r$ の公理系は $\mathcal{S}$ の公理系に等しい。

（2）$\mathcal{X}^\#$ の公理系は $\mathcal{X}$ の公理系と集合論的に双対をなす。

たとえば，$\mathcal{S}$ の公理系と $\mathcal{I}$ の公理系は互いに双対的。

証明　（1）定義 $\mathcal{X}^\#_M = \mathcal{X}^r_{M^*}$ により明らか。

（2）$X \in \mathcal{X}^\#_M \Leftrightarrow E - X \in \mathcal{X}^{\#r}_M = \mathcal{X}^*_M = \mathcal{X}_{M^*}$ であるから，$\mathcal{X}^\#$ の公理系は $\mathcal{X}$ の公理系における ϕ（E），$X \cup Y$（$X \cap Y$），$X \subset Y$（$X \supset Y$）をそれぞれ E（ϕ），$X \cap Y$（$X \cup Y$），$X \supset Y$（$X \subset Y$）で置き換えたものと等しい。*inf*，*sup*；直前，直後も置き換わる。　（証明終）

（注意）したがって，$\mathcal{B}$ の公理系は自己双対的である。

命題7 (1) の理由により以下では“反転集合族”に関する記述を省略することが多い。

<u>命題8</u>　各マトロイド集合族は次の性質をもつ。

(1)　$\mathcal{C}_M$, $\mathcal{B}_M$, $\mathcal{H}_M$ は全非連結

(2)　$\mathcal{I}_M$, $\mathcal{W}_M$ は下に閉, $\mathcal{D}_M$, $\mathcal{S}_M$ は上に閉

(3)　$\mathcal{T}_M$ は b-結完備, $\mathcal{F}_M$ は b-交完備

証明　これらは各集合族によるマトロイドの公理の一部を前節で導入した用語で記述したにすぎない。(証明終)

(注意) b-結完備, b-交完備であるための条件の記述は後述のマトロイド条件とからみあう。

命題8に述べられた条件を各マトロイド集合族に関する「<u>第1条件</u>」と呼ぶことにする。

<u>命題9</u>　各マトロイド集合族の間には次のような関係がある。

(1) $\mathcal{B}_M$ は $\mathcal{I}_M$ の最小の上基, $\mathcal{S}_M$ の最小の下基

$$\mathcal{I}_M = \mathrm{sub}\,\mathcal{B}_M, \quad \mathcal{S}_M = \mathrm{quot}\,\mathcal{B}_M$$

$$\mathcal{B}_M = \max \mathcal{I}_M = \min \mathcal{S}_M, \quad \mathcal{B}_M = \mathcal{I}_M \cap \mathcal{S}_M$$

(2) $\mathcal{C}_M$ は $\mathcal{D}_M$ の最小の下基, $\mathcal{T}_M$ の最小の閉基

$$\mathcal{D}_M = \mathrm{quot}\, C_M \ , \quad \mathcal{T}_M = \mathrm{join}\, C_M$$

$$C_M = \min \mathcal{D}_M = \mathrm{mini}\, \mathcal{T}_M \ , \quad C_M \subset \mathcal{D}_M \cap \mathcal{T}_M$$

(2)# $\mathcal{H}_M$ は $\mathcal{W}_M$ の最小の上基，$\mathcal{F}_M$ の最小の閉基

$$\mathcal{W}_M = \mathrm{sub}\, \mathcal{H}_M \ , \quad \mathcal{F}_M = \mathrm{meet}\, \mathcal{H}_M$$

$$\mathcal{H}_M = \max \mathcal{W}_M = \mathrm{maxi}\, \mathcal{F}_M \ , \quad \mathcal{H}_M \subset \mathcal{W}_M \cap \mathcal{F}_M$$

(3) $\mathcal{I}_M$ と $\mathcal{D}_M$ は互いに補集合族である。

$$\mathcal{I}_M = \mathcal{D}_M^c \ , \quad \mathcal{D}_M = \mathcal{I}_M^c \ , \quad \mathcal{I}_M \cup \mathcal{D}_M = 2^{E_M}$$

(3)# $\mathcal{S}_M$ と $\mathcal{W}_M$ は互いに補集合族である。

$$\mathcal{S}_M = \mathcal{W}_M^c \ , \quad \mathcal{W}_M = \mathcal{S}_M^c \ , \quad \mathcal{S}_M \cup \mathcal{W}_M = 2^{E_M}$$

証明　これらは各集合族の相互定義の関係を前節で導入した用語で記述したにすぎない。　　　　（証明終）

命題9に述べられた相互関係により各マトロイド集合族を図1の周期列上に次のように配置させることができる（図3 —— $\mathcal{B}_M$ を $\mathcal{Y}_0$ の位置に，$\mathcal{I}_M$ を $\mathcal{X}_0$，$\mathcal{S}_M$ を $\mathcal{Z}_0$ の位置に，---- $\mathcal{T}_M$ は $\mathcal{U}_{-1}$ の位置，$\mathcal{F}_M$ は $\mathcal{V}_1$ の位置に置く）。

$$\begin{tikzcd}
T_M & & & & & & \\
C_M \arrow[u, "\mathrm{join}"] \arrow[r, "\mathrm{quot}"] & D_M \arrow[r, dashed, dash, "c"] & I_M & B_M \arrow[l, "\mathrm{sub}"'] \arrow[r, "\mathrm{quot}"] & S_M \arrow[r, dashed, dash, "c"] & W_M & H_M \arrow[l, "\mathrm{sub}"'] \arrow[d, "\mathrm{meet}"] \\
& & & & & & F_M
\end{tikzcd}$$

図　3

命題9の関係で（あるいは図3のごとき配置で）9(18)種類の集合族が相互に関連している状態を「<u>マトロイド連繋</u>」と呼ぶことにする。

図3の中の任意の集合族から他のすべての集合族が一意に決定されるためには，前節で述べた「特異な場合」を除外する必要がある。このために各集合族に要求される条件をマトロイド集合族に関する「<u>第2条件</u>（または非特異条件）」と呼ぶことにする。

<u>命題10</u>　各マトロイド集合族に関する第2条件は次の通り

(1) $\mathcal{B}_M \neq \emptyset$

(2) $\mathcal{I}_M \neq \emptyset$ $(\Leftrightarrow \mathcal{I}_M \ni \emptyset)$　(2)# $\mathcal{S}_M \neq \emptyset$ $(\Leftrightarrow \mathcal{S}_M \ni E)$

(3) $\mathcal{D}_M \neq 2^E$ $(\Leftrightarrow \mathcal{D}_M \not\ni \emptyset)$　(3)# $\mathcal{W}_M \neq 2^E$ $(\Leftrightarrow \mathcal{W}_M \not\ni E)$

(4) $\mathcal{C}_M \neq \{\emptyset\}$ $(\Leftrightarrow \mathcal{C}_M \not\ni \emptyset)$　(4)# $\mathcal{H}_M \neq \{E\}$ $(\Leftrightarrow \mathcal{H}_M \not\ni E)$

(5) $\mathcal{T}_M$ に関してはなし　(5)# $\mathcal{F}_M$ に関してはなし

「第1条件」を満たす集合族の組が「マトロイド連繋」されているとき，これらの第2条件は互いに同値である。

証明　$\mathcal{Y}_1 = \max(\mathrm{quot}\,\mathcal{Y}_0)^c = \max(\mathrm{quot}(\max(\mathrm{quot}\,\mathcal{Y}_{-1})^c))^c$

の関係から，$\mathcal{Y}_1 \neq \{E\}$ と $\mathcal{Y}_{-1} \neq \{\emptyset\}$ は同値である。

$\mathcal{U}_{-1} = \{\emptyset\}$ に対しては $\mathcal{Y}_{-1} = \mathrm{mini}\{\emptyset\} = \emptyset$ であるから第2条件は自然に満たされている（$\mathcal{V}_1 = \{E\}$ についても同

様）。　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

すなわち，第2条件は次のような“特異な配置”を除外するためだけの条件である。

$$
\begin{tikzcd}
\{\phi\} & & & \{\phi\} \arrow[d, dashed, "mini"] & & & \\
\{\phi\} \arrow[u] \arrow[r] & 2^E \arrow[r, dotted, no head] & \overset{(空)}{\phi} & \overset{(空)}{\phi} \arrow[l] \arrow[r] & \overset{(空)}{\phi} \arrow[r, dotted, no head] & 2^E & \{E\} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & & & \{E\} \arrow[u, dashed, "maxi"] & & & \{E\}
\end{tikzcd}
$$

ある集合族が「第1条件」と「第2条件」を満たすことはマトロイド集合族であるための必要条件であるが，もちろん十分条件ではない。そのためにさらに要求される条件こそ，マトロイド理論の本質的な部分である。この条件を「第3条件またはマトロイド条件」と総称することにする。

命題11　各マトロイド集合族に関するマトロイド条件は次の通りである。

(1) $\mathcal{B}_M$[6]: $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_M \quad B_1 \neq B_2$

$$\Rightarrow \exists b_1 \in B_1 - B_2 \quad \exists b_2 \in B_2 - B_1$$

$$B_1 \cup \{b_2\} - \{b_1\} \in \mathcal{B}_M,\ B_2 \cup \{b_1\} - \{b_2\} \in \mathcal{B}_M$$

(2) $\mathcal{I}_M$: $\forall I_1, I_2 \in \mathcal{I}_M \quad |I_1| < |I_2|$

$$\Rightarrow \exists x \in I_2 - I_1 \quad I_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}_M$$

$(2)^{\#}$ $\mathcal{S}_M$: $^\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}_M \quad |S_1| < |S_2|$

$\Rightarrow \ ^\exists x \in S_2 - S_1 \quad S_2 - \{x\} \in \mathcal{S}_M$

(3) $\mathcal{D}_M$: $^\forall D_1, D_2 \in \mathcal{D}_M \quad ^\forall x \in D_1 \cup D_2 \quad D_1 \cap D_2 \notin \mathcal{D}_M$

$\Rightarrow \ D_1 \cup D_2 - \{x\} \in \mathcal{D}_M$

$(3)^{\#}$ $\mathcal{W}_M$: $^\forall W_1, W_2 \in \mathcal{W}_M \quad ^\forall x \notin W_1 \cap W_2 \quad W_1 \cup W_2 \notin \mathcal{W}_M$

$\Rightarrow \ (W_1 \cap W_2) \cup \{x\} \in \mathcal{W}_M$

(4) $\mathcal{C}_M$: $^\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}_M \quad ^\forall x \in C_1 \cap C_2 \quad C_1 \neq C_2$

$\Rightarrow \ ^\exists C_3 \in \mathcal{C}_M \quad C_3 \subset C_1 \cup C_2 - \{x\}$

$(4)^{\#}$ $\mathcal{H}_M$: $^\forall H_1, H_2 \in \mathcal{H}_M \quad ^\forall x \notin H_1 \cup H_2 \quad H_1 \neq H_2$

$\Rightarrow \ ^\exists H_3 \in \mathcal{H}_M \quad H_3 \supset (H_1 \cap H_2) \cup \{x\}$

(5) $\mathcal{T}_M$: (i) $^\forall T_1, X, T_2 \in \mathcal{T}_M \quad T_1 \subset X \subset T_2$

$\Rightarrow \ ^\exists Y \in \mathcal{T}_M \quad T_1 = \inf\{X, Y\}, \ T_2 = X \cup Y$

(ii) $^\forall x \in E_M \quad T(x) =$ '$E_M - \{x\}$に含まれる極大T-フラット'

$\Rightarrow \ T(x) = \cup \mathcal{T}_M$ または $T(x) \lessdot \cup \mathcal{T}_M$

(iii) $^\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_M \quad T_1, T_2 \lessdot T_1 \cup T_2$

$\Rightarrow \ \inf\{T_1, T_2\} \lessdot T_1, T_2$

$(5)^{\#}$ $\mathcal{F}_M$: (i) $^\forall F_1, X, F_2 \in \mathcal{F}_M \quad F_1 \subset X \subset F_2$

$\Rightarrow \ ^\exists Y \in \mathcal{F}_M \quad F_1 = X \cap Y, \ F_2 = \sup\{X, Y\}$

(ii) $^\forall x \in E_M \quad F(x) =$ '$\{x\}$を含む極小フラット'

$\Rightarrow \ F(x) = \cap \mathcal{F}_M$ または $F(x) \gtrdot \cap \mathcal{F}_M$

(iii) $^\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}_M \quad F_1 \cap F_2 \lessdot F_1, F_2$

$$\Rightarrow F_1, F_2 \lessdot \sup\{F_1, F_2\}$$

[(5), (5)# における記号 inf, sup, $\lessdot$, $\gtrdot$ は束に関するもので，$X \lessdot Y$ は'YはXの直後の元である'ことを表わす]

才1条件，才2条件を満たしている一組の集合族がマトロイド連継されているとき，以上のマトロイド条件は互いに同値である。

証明　これらはいずれもマトロイド理論の基本的な定理である。適当な文献を参照されたい。[3],[5]　（証明終）

(注意) フラット族に関するマトロイド条件の (i) は $\mathcal{F}$ が交完備であるときさらに b-交完備であることを保証するための十分条件である。ただし，b-交完備な集合族は必らずしも条件(i)を満たさないから，(i)はマトロイド条件の一部を構成している。T-フラット族 $\mathcal{T}$ についても同様。

以下で述べる諸命題はほとんどマトロイド条件を考慮せずに証明される。これらの命題がマトロイド理論のものとなり得るのは，この命題11による。

なお，各マトロイド集合族によってマトロイドを定義する公理系は以上に述べた「才1条件，才2条件，才3条件（マトロイド条件）」で構成される。(あとがきの後に対照表あり)

[3] マトロイドの圏

3.1 対応と写像

集合 E_1, E_2 の直積集合 $E_1 \times E_2$ の部分集合 α を始域 E_1 から終域 E_2 への対応と呼び，$\alpha : E_1 \to E_2$ と表わす。このとき，

$$\forall x \in E_1 \quad \alpha x = \{ y \,;\, (x, y) \in \alpha \} \subset E_2$$

$$\forall X \subset E_1 \quad \alpha X = \bigcup_{x \in X} \alpha x \subset E_2 \quad (\text{特に } \alpha\phi = \phi)$$

$$\forall \mathscr{X} \subset 2^{E_1} \quad \alpha \mathscr{X} = \{ \alpha X \,;\, X \in \mathscr{X} \} \subset 2^{E_2}$$

と定義し，それぞれ α による $x, X, \mathscr{X}$ の像と呼ぶ。

明らかに次の事実が成り立つ（$X, Y \subset E_1$; $\mathscr{X}, \mathscr{Y} \subset 2^{E_1}$）:

1) $\alpha(X \cup Y) = \alpha X \cup \alpha Y$

2) $\alpha(X \cap Y) \subset \alpha X \cap \alpha Y$

3) $X \subset Y$ ならば $\alpha X \subset \alpha Y$

4) $\mathscr{X} \subset \mathscr{Y}$ ならば $\alpha \mathscr{X} \subset \alpha \mathscr{Y}$

対応 α に対して，$\alpha^{-1} = \{ (y, x) \,;\, (x, y) \in \alpha \}$ を α の逆対応と呼ぶ。$\alpha^{-1} : E_2 \to E_1$ であり，$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ である。

α の終域と β の始域が一致するとき，α と β の合成

$$\beta\alpha = \{ (x, z) \,;\, \exists y \quad (x, y) \in \alpha \text{ かつ } (y, z) \in \beta \}$$

が定義され，結合法則 $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ が成り立つ。

$$1_E = \{ (x, x) \,;\, x \in E \} : E \to E \quad (\text{対角集合})$$

を E 上の恒等対応（または恒等写像）と呼ぶ。（前後関係から E を明示する必要のないときは 1_E を単に 1 と記す）

$$\alpha 1 = \alpha, \quad 1\beta = \beta, \quad 1^{-1} = 1$$

である。一般には，$\alpha^{-1}\alpha \neq 1$ である。

$$\theta_{E_1, E_2} = \phi \subset E_1 \times E_2 \ : E_1 \to E_2$$

を E_1 から E_2 への空対応と呼ぶ（E_1, E_2 を明示する必要のないときは単に θ と記す）。$\alpha\theta = \theta$, $\theta\alpha = \theta$, $\theta^{-1} = \theta$ である。

対応 $\alpha : E_1 \to E_2$ に関して，

$D_\alpha = \{x \,;\, |\alpha x| \geqq 1\} = \alpha^{-1}E_2$ を α の定義域，

$R_\alpha = \{y \,;\, |\alpha^{-1}y| \geqq 1\} = \alpha E_1$ を α の値域

と呼ぶ。 $D_\alpha = R_{\alpha^{-1}}$, $R_\alpha = D_{\alpha^{-1}}$ である。

対応の特別なものを次のように呼ぶことにする：

$\forall x \in E_1 \quad |\alpha x| \leqq 1$ のとき α を半写像

$\forall x \in E_1 \quad |\alpha x| \geqq 1 \ (D_\alpha = E_1)$ のとき α を準写像

$\forall y \in E_2 \quad |\alpha^{-1} y| \leqq 1$ のとき α を単対応

$\forall y \in E_2 \quad |\alpha^{-1} y| \geqq 1 \ (R_\alpha = E_2)$ のとき α を全対応

半写像かつ準写像である対応 α ($\forall x \in E_1 \quad |\alpha x| = 1$) が写像である。

α: 半写像 $\Leftrightarrow$ α^{-1}: 単対応，α: 準写像 $\Leftrightarrow$ α^{-1}: 全対応

である。

上記の定義から直ちに次の命題が導かれる。

命題12　$\alpha : E_1 \to E_2$,　$X \subset E_1$, $Y \subset E_2$ とする。

(1) αが半写像ならば,　$\alpha\alpha^{-1}Y \subset Y$, $(\alpha^{-1}Y)^c \supset \alpha^{-1}Y^c$

(2) αが準写像ならば,　$\alpha^{-1}\alpha X \supset X$,　$(\alpha^{-1}Y)^c \subset \alpha^{-1}Y^c$

(3) αが単対応ならば,　$\alpha^{-1}\alpha X \subset X$,　$(\alpha X)^c \supset \alpha X^c$

(4) αが全対応ならば,　$\alpha\alpha^{-1}Y \supset Y$,　$(\alpha X)^c \subset \alpha X^c$

対応の性質と集合族の性質を組み合わせて次の命題を得る。

命題13　$\alpha : E_1 \to E_2$,　$\mathfrak{X} \subset 2^{E_1}$, $\mathfrak{Y} \subset 2^{E_2}$ とする。

(1) αが半写像, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$が上に閉ならば

$\alpha\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y} \Rightarrow \alpha^{-1}\mathfrak{Y}^c \subset \mathfrak{X}^c$;　$\alpha^{-1}\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X} \Rightarrow \alpha^{-1}\mathfrak{Y}^r \subset \mathfrak{X}^r$

(2) αが準写像, $\mathfrak{X}$が下に閉（$\mathfrak{Y}$は任意）ならば

$\alpha^{-1}\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X} \Rightarrow \alpha\mathfrak{X}^c \subset \mathfrak{Y}^c$;　$\alpha^{-1}\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X} \Rightarrow \alpha^{-1}\mathfrak{Y}^r \subset \mathfrak{X}^r$

(3) αが単対応, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$が上に閉ならば

$\alpha^{-1}\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X} \Rightarrow \alpha\mathfrak{X}^c \subset \mathfrak{Y}^c$;　$\alpha\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y} \Rightarrow \alpha\mathfrak{X}^r \subset \mathfrak{Y}^r$

(4) αが全対応, $\mathfrak{Y}$が下に閉（$\mathfrak{X}$は任意）ならば

$\alpha\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y} \Rightarrow \alpha^{-1}\mathfrak{Y}^c \subset \mathfrak{X}^c$;　$\alpha\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y} \Rightarrow \alpha\mathfrak{X}^r \subset \mathfrak{Y}^r$

証明　(1) 前半。$\exists Y \in \mathfrak{Y}^c$　$\alpha^{-1}Y \notin \mathfrak{X}^c$ とする。$X = \alpha^{-1}Y$ とおけば $X \in \mathfrak{X}$, かつ $\alpha X = \alpha\alpha^{-1}Y \subset Y \in \mathfrak{Y}^c$。$\mathfrak{Y}^c$は下に閉であるから $\alpha X \in \mathfrak{Y}^c$, すなわち $\alpha X \notin \mathfrak{Y}$.

(2) 後半。$\exists Y \in \mathfrak{Y}$　$\alpha^{-1}Y^c \notin \mathfrak{X}^r$ とする。$\alpha^{-1}Y^c \subset (\alpha^{-1}Y)^c$,

$\mathscr{X}^r$ は下に閉であるから $(\alpha^{-1}Y)^c \notin \mathscr{X}^r$, すなわち $\alpha^{-1}Y \notin \mathscr{X}$。他の証明も同様。（証明終）

3.2 マトロイドの圏の定義

$\mathscr{X}$ を一般にマトロイド集合族とするとき，この集合族に属する集合を <u>$\mathscr{X}$-集合</u> と呼ぶ。たとえば，$\mathscr{I}$-集合とは独立集合のことである。マトロイド M に関する $\mathscr{X}$-集合全体からなる集合族を $\mathscr{X}_M$ と記す（1.2 の $\mathscr{I}_M$ など）。

2つのマトロイド M, N に関して，台集合 E_M, E_N の間の対応 $\alpha: E_M \longrightarrow E_N$ が次の性質

$$\forall X \in \mathscr{X}_M \quad \alpha X \in \mathscr{X}_N,\ \text{すなわち},\ \alpha\mathscr{X}_M \subset \mathscr{X}_N$$

を満たすとき，α は $\mathscr{X}$-集合を <u>順保存</u> するという。同様に，

$$\forall Y \in \mathscr{X}_N \quad \alpha^{-1}Y \in \mathscr{X}_M,\ \text{すなわち},\ \alpha^{-1}\mathscr{X}_N \subset \mathscr{X}_M$$

であるとき，α は $\mathscr{X}$-集合を <u>逆保存</u> するという。順保存と逆保存を総称して単に<u>保存</u>という。

（1） $\mathcal{M}at(\overrightarrow{\mathscr{X}})$ と $\mathcal{M}at(\overleftarrow{\mathscr{X}})$

対象のクラスをすべてのマトロイドの集まり $\mathfrak{M}$ とし，射を $\mathscr{X}$-集合を保存するマトロイド間の対応とし，射の合成は対応の合成，恒等射は恒等対応とすれば，圏の公理（1.1）が満たされる。対応による $\mathscr{X}$-集合の保存が順保存か逆保存かに従ってこの圏をそれぞれ $\mathcal{M}at(\overrightarrow{\mathscr{X}})$, $\mathcal{M}at(\overleftarrow{\mathscr{X}})$ で表わす。たとえば，$\mathcal{M}at(\overrightarrow{\mathscr{I}})$ はマトロイド間で独立集合を順保存する対

応を射とする圏である。

$\mathrm{Mat}(\overrightarrow{\mathfrak{X}})$ と $\mathrm{Mat}(\overleftarrow{\mathfrak{X}})$ とに共通に成り立つ性質を述べたり，文脈上，保存の方向の順逆が前後で対応することを意味するとき，しばしば $\mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$ という記号を用いる。

$\mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$ において，M から N への射の全体からなる集合を $\overleftrightarrow{\mathfrak{X}}[M,N]$ で表わす。たとえば，$\overrightarrow{\mathfrak{I}}[M,N]$ はマトロイド M から N への対応で独立集合を順保存するもの全体の集合である。

$$\overrightarrow{\mathfrak{I}}[M,N]=\{\alpha\ ;\ \alpha:E_M\to E_N\ ,\ \alpha\mathcal{I}_M\subset\mathcal{I}_N\}$$

(2) $\mathrm{mat}(\overrightarrow{\mathfrak{X}})$ と $\mathrm{mat}(\overleftarrow{\mathfrak{X}})$

同様にして，すべてのマトロイドの集まり $\mathfrak{M}$ を対象とし，$\mathfrak{X}$-集合を保存する写像を射としても圏が定義される。これを $\mathrm{mat}(\overrightarrow{\mathfrak{X}})$, $\mathrm{mat}(\overleftarrow{\mathfrak{X}})$ で表わす。矢印の意味は (1) と同じ。

$\mathrm{mat}(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$ において，M から N への射の全体からなる集合を $\overleftrightarrow{\mathfrak{X}}\langle M,N\rangle$ で表わす。たとえば，$\overrightarrow{\mathfrak{I}}\langle M,N\rangle$ はマトロイド M から N への写像で独立集合を順保存するもの全体の集合である。明らかに，$\overleftrightarrow{\mathfrak{X}}[M,N]$ から写像だけを集めたものが $\overleftrightarrow{\mathfrak{X}}\langle M,N\rangle$ であり，$\forall M,N\in\mathfrak{M}$ $\overleftrightarrow{\mathfrak{X}}\langle M,N\rangle\subset\overleftrightarrow{\mathfrak{X}}[M,N]$ である。

3.3 圏の相等，同型，部分圏，双対圏

一般に，2つの圏 $\mathcal{C}_1=(\mathcal{O}_1,\mathcal{M}_1)$, $\mathcal{C}_2=(\mathcal{O}_2,\mathcal{M}_2)$ が<u>相等しい</u> $(\mathcal{C}_1=\mathcal{C}_2)$ とは，$\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2$ かつ $\forall(A,B)\in\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_1$ に対して

$\mathcal{M}_1[A,B]=\mathcal{M}_2[A,B]$ であることをいう。

C_1 と C_2 が<u>同型</u>である（$C_1\simeq C_2$）とは，1対1対応 $\varphi:\mathcal{O}_1\to\mathcal{O}_2$，$\varphi:\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$ が存在し，$\forall\alpha\in\mathcal{M}_1[A,B]$ に対して $\varphi(\alpha)\in\mathcal{M}_2[\varphi(A),\varphi(B)]$ であり，$\varphi(\beta\alpha)=\varphi(\beta)\varphi(\alpha)$ が成り立つことをいう。

C_1 が C_2 の<u>部分圏</u>（$C_1\subset C_2$）であるとは，$\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$ かつ，$\forall(A,B)\in\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_1$ に対して $\mathcal{M}_1[A,B]\subset\mathcal{M}_2[A,B]$ であることをいう。

圏 $C=(\mathcal{O},\mathcal{M})$ に関して，$\forall(A,B)\in\mathcal{O}\times\mathcal{O}$ に対して $\mathcal{M}^*[A,B]=\mathcal{M}[B,A]$ とすれば，$(\mathcal{O},\mathcal{M}^*)$ は圏となる。これを C の<u>双対圏</u>といい，C^* で表わす。明らかに $(C^*)^*=C$ である。

<u>命題14</u>　$\mathfrak{X}$ を任意のマトロイド集合族とする．

(1)　$mat(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})\subset Mat(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$

(2)　$Mat(\overrightarrow{\mathfrak{X}})^*\simeq Mat(\overleftarrow{\mathfrak{X}})$，$Mat(\overleftarrow{\mathfrak{X}})^*\simeq Mat(\overrightarrow{\mathfrak{X}})$

(3)　$Mat(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})\simeq Mat(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}}^{\#r})$，$mat(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})\simeq mat(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}}^{\#r})$

証明 (1)　$\overleftrightarrow{\mathfrak{X}}\langle M,N\rangle\subset\overleftrightarrow{\mathfrak{X}}[M,N]$ のこと。

(2)　$\alpha\in\overrightarrow{\mathfrak{X}}[M,N]$ に対して $\alpha\mathfrak{X}_M=(\alpha^{-1})^{-1}\mathfrak{X}_M\subset\mathfrak{X}_N$

ゆえに $\alpha^{-1}\in\overleftarrow{\mathfrak{X}}[N,M]$

(3)　$\mathfrak{X}_M=\mathfrak{X}^{\#r}_{M^*}$ であるから。たとえば，$\mathcal{I}_M=\mathcal{S}^{r}_{M^*}$。

［この関係により反転集合族についての記述を省略することは前にも述べた（命題7(1)）］　（証明終）

命題15

(1) $\mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{C}) \subset \mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{D}})$, $\mathrm{mat}(\overleftrightarrow{C}) \subset \mathrm{mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{D}})$

$\mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{C}) \subset \mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{T}})$, $\mathrm{mat}(\overleftrightarrow{C}) \subset \mathrm{mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{T}})$

要するに，サーキットを保存する対応（写像）は従属集合およびT-フラットを保存すること。

(2) $\mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{B}) \subset \mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{S}})$, $\mathrm{mat}(\overleftrightarrow{B}) \subset \mathrm{mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{S}})$

$\mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{B}) \subset \mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{I}})$, $\mathrm{mat}(\overleftrightarrow{B}) \subset \mathrm{mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{I}})$

(3) $\mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{H}}) \subset \mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{W}})$, $\mathrm{mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{H}}) \subset \mathrm{mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{W}})$

証明　$\mathcal{X} = \mathrm{sub}\,\mathcal{Y}$（$\mathcal{Y} = \mathcal{B}, \mathcal{H}$ に対して $\mathcal{X} = \mathcal{I}, \mathcal{W}$）のときに $\mathrm{Mat}(\overrightarrow{\mathcal{Y}}) \subset \mathrm{Mat}(\overrightarrow{\mathcal{X}})$，$\mathrm{mat}(\overrightarrow{\mathcal{Y}}) \subset \mathrm{mat}(\overrightarrow{\mathcal{X}})$ を示す。

$\alpha \in \overrightarrow{\mathcal{Y}}[M,N]$, $f \in \overrightarrow{\mathcal{Y}}\langle M,N\rangle$ とする。$X \in \mathcal{X}_M = \mathrm{sub}\,\mathcal{Y}_M$ とすれば $\exists Y \in \mathcal{Y}_M$　$X \subset Y$ であるから，$\alpha X \subset \alpha Y \in \mathcal{Y}_N$, $fX \subset fY \in \mathcal{Y}_N$ となる。ゆえに，$\alpha X, fX \in \mathrm{sub}\,\mathcal{Y}_N = \mathcal{X}_N$。したがって，$\alpha \in \overrightarrow{\mathcal{X}}[M,N]$, $f \in \overrightarrow{\mathcal{X}}\langle M,N\rangle$ である。

同様にして，$\mathcal{Z} = \mathrm{quot}\,\mathcal{Y}$, $\mathcal{U} = \mathrm{join}\,\mathcal{Y}$ の条件を用いて他の関係を導くことができる。逆保存も同様。（証明終）

（注意）一般には，$\mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{H}}) \subset \mathrm{Mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{F}})$, $\mathrm{mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{H}}) \subset \mathrm{mat}(\overleftrightarrow{\mathcal{F}})$ は成り立たない（$\mathcal{F} = \mathrm{meet}\,\mathcal{H}$, $\alpha(\cap \mathcal{Y}) \subset \cap \alpha\mathcal{Y}$ である）。

<u>命題16</u>

(1) $mat(\overleftarrow{\mathcal{I}}) = mat(\overrightarrow{\mathcal{D}})$

すなわち，写像が独立集合を逆保存することと従属集合を順保存することは同値である。(以下同様)

$mat(\overleftarrow{\mathcal{W}}) = mat(\overrightarrow{\mathcal{S}})$

(2) $mat(\overleftarrow{\mathcal{I}}) = mat(\overleftarrow{\mathcal{I}^r})$, $mat(\overleftarrow{\mathcal{D}}) = mat(\overleftarrow{\mathcal{D}^r})$

$mat(\overleftarrow{\mathcal{W}}) = mat(\overleftarrow{\mathcal{W}^r})$, $mat(\overleftarrow{\mathcal{S}}) = mat(\overleftarrow{\mathcal{S}^r})$

証明　命題13 (1),(2)による。すなわち，写像 $f: M \to N$ の半写像性より下に閉な集合族 $\mathfrak{X}$ ($\mathcal{I}, \mathcal{W}, \mathcal{D}^r, \mathcal{S}^r$) に対して，

$\overleftarrow{\mathfrak{X}}\langle M,N\rangle \supset \overrightarrow{\mathfrak{X}^c}\langle M,N\rangle$, かつ $\overleftarrow{\mathfrak{X}}\langle M,N\rangle \supset \overleftarrow{\mathfrak{X}^r}\langle M,N\rangle$

であり，fの準写像性より逆の包含関係が導かれる。

(証明終)

以上に述べた圏の間の関係のほかに，次のものが得られているが，個別特殊的であるので結果を示すにとどめておく。

$mat(\overrightarrow{\mathcal{F}}) \subset mat(\overleftarrow{\mathcal{F}})$

3.4　同型射

一般に，射 $\alpha: A \to B$ に対して $\xi\alpha = 1_A$ なる ξ (αの<u>左逆射</u>) が存在するとき αは<u>左可逆</u>，$\alpha\eta = 1_B$ なる η (αの<u>右逆射</u>) が存在するとき αは<u>右可逆</u>であるという。左可逆かつ右可逆な射αを<u>同型射</u>という。このときαの左逆射と右逆射は一致

し，これを α の逆射と呼び α^{-1} で表わす。

命題17　任意のマトロイドの圏 $Mat(\overleftrightarrow{\mathcal{X}})$, $mat(\overleftrightarrow{\mathcal{X}})$ において，射 $\alpha: M \to N$ が同型射であるための必要十分条件は

(i)　$\alpha: E_M \to E_N$ は1対1対応である。

(ii)　$\alpha \mathcal{X}_M = \mathcal{X}_N$　$(\Leftrightarrow \alpha^{-1}\mathcal{X}_N = \mathcal{X}_M)$

証明　$Mat(\overrightarrow{\mathcal{X}})$ において考える（他も同様）。十分条件は明らか。必要条件であることを示す。α が1対1対応でないとすれば，$\forall \beta: E_N \to E_M$　$\beta\alpha \neq 1_A$ または $\alpha\beta \neq 1_B$。したがって (i) は必要条件。(ii) は $\alpha \mathcal{X}_M \subset \mathcal{X}_N$ かつ $\alpha^{-1}\mathcal{X}_N \subset \mathcal{X}_M$ から得られる。（証明終）

命題18　あるマトロイド集合族 $\mathcal{X}$ に関して，$\alpha \in \overleftrightarrow{\mathcal{X}}[M,N]$, $f \in \overleftrightarrow{\mathcal{X}}\langle M,N \rangle$ が同型射ならば，他のすべてのマトロイド集合族に関しても α, f はそれぞれ同型射である。

証明　"マトロイド連繋"により他のマトロイドが一意に決定されることから明らか。（証明終）

ある1つの（したがって，すべての）マトロイド集合族に関して同型射 $\alpha: M \to N$ が存在するとき，2つのマトロイド M, N は（α に関して）同型であるといい，$M \simeq N$ で表わす。

3.5 単射と全射

一般に，射αに関して $\forall \beta_1, \beta_2 \quad \alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$ であるとき，αを<u>単射</u>と呼ぶ。双対的に，$\forall \beta_1, \beta_2 \quad \beta_1\alpha = \beta_2\alpha \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$ であるとき，αを<u>全射</u>と呼ぶ。

<u>命題19</u> 任意のマトロイド集合族$\mathcal{X}$に対して，圏$\mathbb{M}at(\overleftrightarrow{\mathcal{X}})$における射$\alpha \in \overleftrightarrow{\mathcal{X}}[M,N]$に関する次の3つの条件は同値である。

(1) αは単射

(2) $\forall A, B \subset E_M \quad A \neq B \Rightarrow \alpha A \neq \alpha B$

(3) $\forall x \in E_M \quad \alpha\{x\} - \alpha(E_M - \{x\}) \neq \phi$

証明 (1)$\Rightarrow$(2)を示すのが中心。他はマトロイド理論と独立に成り立つ。背理法により，$\exists A, B \subset E_M \quad A \neq B,\ \alpha A = \alpha B$を仮定して，マトロイドLと射$\beta_1, \beta_2 \in \overleftrightarrow{\mathcal{X}}[L,M]$で$\beta_1 \neq \beta_2$ $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$となるものを構成すればよい。次の表に，マトロイドLを示す。

$\mathcal{X}$	$\mathcal{T}$	C	$\mathcal{D}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{F}$
$\overrightarrow{\mathcal{X}}$	$U_{1,1}$	$U_{1,1}$	$U_{1,1}$	$U_{0,1}$	$M+U_{0,1}$	$U_{2,2}$	$U_{0,1}$	$U_{0,1}$	$U_{0,2}$
$\overleftarrow{\mathcal{X}}$	$U_{0,1}$	$U_{0,2}$	$U_{0,2}$	$U_{1,1}$	(a)	$U_{0,1}$	$U_{3,3}$	(b)	$U_{1,1}$

$U_{k,m}$はk-一様マトロイド(1.3)，$M+U_{0,1}$はMに自己閉路を1つ添加してできるマトロイドを表わす。

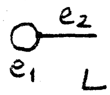
(a) Mat($\overleftarrow{\mathcal{B}}$) における L と $\beta_1, \beta_2 \in \overleftarrow{\mathcal{B}}[L,M]$

1) $^\exists a \in A \triangle B$ $\{a\} \notin \mathcal{B}_M$ のとき, $L = U_{0,1}$, $E_L = \{e\}$ として, $\beta_1 e = E_M$, $\beta_2 e = E_M - \{a\}$ とすればよい。

2) $^\forall a \in A \triangle B$ $\{a\} \in \mathcal{B}_M$ のとき, $\rho(M) = 1$ であるから, $L = U_{2,4}$, $E_L = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ として, $\beta_1 e_1 = \beta_2 e_2 = A$, $\beta_1 e_2 = \beta_2 e_1 = B$, $\beta_1 e_3 = \beta_2 e_3 = E_M - A$, $\beta_1 e_4 = \beta_2 e_4 = E_M - B$ とすればよい。

(b) Mat($\overleftarrow{\mathcal{H}}$) における L と $\beta_1, \beta_2 \in \overleftarrow{\mathcal{H}}[L,M]$

1) $^\exists a \in A \triangle B$ $\{a\} \notin \mathcal{H}_M$ のとき, $E_L = \{e_1, e_2\}$, $\mathcal{H}_L = \{\{e_1\}\}$ として, $\beta_1 e_1 = E_M$, $\beta_2 e_1 = E_M - \{a\}$, $\beta_1 e_2 = \beta_2 e_2 = \emptyset$ とすればよい。



2) $^\forall a \in A \triangle B$ $\{a\} \in \mathcal{H}_M$ のとき, $\rho(M) = 1$ または 2

(i) $\rho(M) = 1$ のとき, $A \triangle B = \{\ell\}$ (ℓは自己閉路), $\mathcal{H}_M = \{\{\ell\}\}$ であり, $E_M - \{\ell\}$ の要素はすべて平行であるから, $L = U_{1,1}$, $E_L = \{e\}$, $\beta_1 e = \emptyset$, $\beta_2 e = E_M - \{\ell\}$ とすればよい。

(ii) $\rho(M) = 2$ のとき, $M = U_{2,m}$ であるから, $L = U_{3,4}$, $E_L = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ として, β_1, β_2の定義は (a) の 2) の場合と同じにしておけばよい。

(2)⇒(1) も背理法。$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$ とすると, $^\exists p$ $\beta_1 p \neq \beta_2 p$. $A = \beta_1 p$, $B = \beta_2 p$ とおけば $A \neq B$, かつ

$\alpha A = \alpha B$ となる。(2)$\Leftrightarrow$(3) も容易である。(証明終)

命題20　任意のマトロイド集合族$\mathfrak{X}$に対して，圏 $Mat(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$ における射 $\alpha \in \overleftrightarrow{\mathfrak{X}}[M,N]$ に関する次の3つの条件は同値である。

(1)　αは全射

(2)　$\forall C, D \in E_N \quad C \neq D \Rightarrow \alpha^{-1}C \neq \alpha^{-1}D$

(3)　$\forall y \in E_N \quad \alpha^{-1}\{y\} - \alpha^{-1}(E_N - \{y\}) \neq \phi$

証明　命題19との双対性により明らか。(証明終)

命題21　$mat(\overleftarrow{\mathcal{C}})$, $mat(\overleftarrow{\mathcal{H}})$, $mat(\overleftarrow{\mathcal{B}})$ を除く写像を射とする任意のマトロイドの圏 $mat(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$ において，射 $f \in \overleftrightarrow{\mathfrak{X}}\langle M,N \rangle$ が単射であるための必要十分条件は

$$\forall x_1, x_2 \in E_M \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

である。

証明　命題19と同様にマトロイドLの表を掲げておく。

$\mathfrak{X}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{F}$
$\overrightarrow{\mathfrak{X}}$	$U_{1,1}$	$U_{1,1}$	$U_{1,1}$	$U_{0,1}$	$M+U_{0,1}$	$M+U_{0,1}$	$U_{0,1}$	$U_{0,1}$	$U_{0,m+1}$
$\overleftarrow{\mathfrak{X}}$	$U_{0,1}$		$M+U_{0,1}$	$U_{1,1}$		$U_{0,1}$	$U_{2,2}$		$U_{1,1}$

$m = |E_M|$ とする。(証明終)

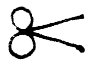
<u>命題22</u>　$mat(\overrightarrow{\mathcal{H}})$ を除く写像を射とする任意のマトロイドの圏 $mat(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$ において，射 $f \in \overleftrightarrow{\mathfrak{X}}\langle M, N \rangle$ が全射であるための必要十分条件は

$$fE_M = E_N \quad （すなわち，\ R_f = E_N）$$

である。

証明　必要条件であることを示すには，背理法で $g_1, g_2 \in \overleftrightarrow{\mathfrak{X}}\langle N, L \rangle$ $g_1 \neq g_2$ かつ $g_1 f = g_2 f$ となるものを構成すればよい。次の表にマトロイド L を示す。

$\mathfrak{X}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{F}$
$\overrightarrow{\mathfrak{X}}$	$U_{0,2}$	$N+\{p\}$	$U_{0,2}$	$U_{2,2}$	$N+\{p\}$	$U_{0,2}$	$U_{3,3}$		$U_{0,2}$
$\overleftarrow{\mathfrak{X}}$	$U_{2,2}$	$U_{2,2}$	$U_{2,2}$	$U_{0,2}$	$U_{0,2}+U_{2,2}$	$U_{2,2}$	$U_{0,2}$	$U_{0,2}$	$U_{0,2}$

$N+\{p\}$ は N に $E_N - fE_M$ の任意の要素 p をもとの p と平行になるように添加してできるマトロイドを表わす。$U_{0,2}+U_{2,2}$ は閉路マトロイドで示すと  となる。

十分条件であることは明らかであろう。　　（証明終）

3.6　マトロイドの簡約と縮約，部分マトロイド

マトロイド M の台集合 E_M の任意の部分集合を T とする。$\mathcal{I}_M|T = \{ I \cap T \,;\, I \in \mathcal{I}_M \}$ とすれば $\mathcal{I}_M|T$ は独立集合族の公理を満たす。これを独立集合族とするような T 上のマトロイドを M|T で表わし，M の T への<u>簡約</u>と呼ぶ。

双対的に，$\mathcal{S}_M|T = \{S\cap T ; S\in\mathcal{S}_M\}$ とすれば $\mathcal{S}_M|T$ はスパン集合族の公理を満たす。これをスパン集合とするような T上のマトロイドを M.T で表わし，M の T への<u>縮約</u>と呼ぶ。

マトロイド M より簡約と縮約を何度か施して得られるマトロイドを M の<u>マイナー</u>と呼ぶ。

次の事実はよく知られている。（$S\subset T\subset E_M$ とする。）

(1) $M|T = (M^*.T)^*$　　(1)* $M.T = (M^*|T)^*$

(2) $(M|T)|S = M|S$　　(2)* $(M.T).S = M.S$

(3) $(M|T).S = (M.(E_M-(T-S)))|S$

(3)* $(M.T)|S = (M|(E_M-(T-S))).S$

集合族に関する次の作用素（$2^E \to 2^T$，$T\subset E$）を定義しておく。

$$\mathcal{X}|T = \{X\cap T ; X\in\mathcal{X}\}$$

$$\mathcal{X}\circ T = \{X ; X\in\mathcal{X} \text{ かつ } X\subset T\}$$

$$\mathcal{X}*T = \{X ; X\subset T \text{ かつ } X\cup T^c\in\mathcal{X}\}$$

<u>命題23</u>

(1) $\mathcal{T}_{M|T} = \mathcal{T}_M\circ T$，$\mathcal{C}_{M|T} = \mathcal{C}_M\circ T$，$\mathcal{D}_{M|T} = \mathcal{D}_M\circ T$，

$\mathcal{I}_{M|T} = \mathcal{I}_M\circ T$，$\mathcal{F}_{M|T} = \mathcal{F}_M|T$，

$\mathcal{W}_{M|T} \subset \mathcal{W}_M\circ T$，$\mathcal{H}_{M|T} = \mathcal{H}_M|T - \{T\}$

(2) $\mathcal{F}_{M.T} = \mathcal{F}_M*T$，$\mathcal{H}_{M.T} = \mathcal{H}_M*T$，$\mathcal{W}_{M.T} = \mathcal{W}_M*T$，

$$\mathcal{S}_{M.T} = \mathcal{S}_M \# T,\quad \mathcal{T}_{M.T} = \mathcal{T}_M | T,$$

$$\mathcal{I}_{M.T} \subset \mathcal{I}_M \circ T,\quad C_{M.T} = C_M | T - \{\phi\}$$ （証明略）

一般に，２つの対象A，Bに対して，AからBへの単射αが存在するとき，AはBの（αに関する）部分対象という。マトロイドの圏においては部分対象を部分マトロイドと呼ぶ。

簡約$M|T$，縮約$M.T$に関して，恒等射$1_M: E_M \to E_M$のTへの制限をこの節では1_Tで表わすことにする。

命題24　(1)　$M|T$は次の圏において（1_Tに関する）Mの部分マトロイドである：$\mathcal{M}at(\cdot)$, $\mathfrak{mat}(\cdot)$

$\cdot = \vec{\mathcal{I}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{C}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{W}}, \overleftarrow{\mathcal{F}}$

(2)　$M.T$は次の圏において（1_Tに関する）Mの部分マトロイドである：$\mathcal{M}at(\cdot)$, $\mathfrak{mat}(\cdot)$

$\cdot = \vec{\mathcal{I}}, \vec{\mathcal{W}}, \overleftarrow{\mathcal{T}}, \overleftarrow{\mathcal{S}}$

(3)　したがって，Mのマイナーが Mの部分マトロイドとなるのは次の圏に限られる：

$\mathcal{M}at(\vec{\mathcal{I}})$, $\mathcal{M}at(\vec{\mathcal{W}})$; $\mathfrak{mat}(\vec{\mathcal{I}})$, $\mathfrak{mat}(\vec{\mathcal{W}})$

証明　T上のマトロイドM'が$\vec{\mathcal{X}}$, $\overleftarrow{\mathcal{X}}$の意味で部分マトロイドであるとは，それぞれ，$\mathcal{X}_{M'} \subset \mathcal{X}_M \circ T$, $\mathcal{X}_{M'} \supset \mathcal{X}_M | T$であることにほかならない。命題23，および$\mathcal{W}_{M.T} \subset \mathcal{W}_M \circ T$に

よって結果を得ることができる。　　　　（証明終）

3.7　E 上のマトロイドのなす順序集合

E 上のマトロイド全体の集合を $\mathfrak{M}(E)$ とする。$\mathfrak{M}(E)$ の２つのマトロイド M_1, M_2 に対して，圏 $\mathbb{M}at(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$ [$mat(\overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$] において M_1 が M_2 の部分マトロイド（恒等写像 1_E に関する）であるとき，すなわち $1_E \in \overleftrightarrow{\mathfrak{X}}[M_1, M_2]$ [$1_E \in \overleftrightarrow{\mathfrak{X}}\langle M_1, M_2\rangle$] であるとき，$M_1 \prec M_2$ と定義すると，$\mathfrak{M}(E)$ は順序集合となる。この順序集合を $\mathbb{M}(E, \overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$ で表わす。

$\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{X}})$, $\mathbb{M}(E, \overleftarrow{\mathfrak{X}})$ において $M_1 \prec M_2$ であることは，それぞれ，$\mathfrak{X}_{M_1} \subset \mathfrak{X}_{M_2}$, $\mathfrak{X}_{M_1} \supset \mathfrak{X}_{M_2}$ であることにほかならない。したがって，$\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{X}})$ と $\mathbb{M}(E, \overleftarrow{\mathfrak{X}})$ は順序集合として双対的である。以下では $\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{X}})$ だけについて述べる。

<u>命題25</u>　(1)　$\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{X}})$ と $\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{X}^c})$ は双対

(2)　$\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{X}})$ と $\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{X}^r})$ は同型（同一）

(3)　$\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{X}})$ と $\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{X}^\#})$ は同型

たとえば，$\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{J}})$ と $\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{D}})$ は双対，$\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{J}})$ と $\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{J}^r})$ および $\mathbb{M}(E, \overrightarrow{\mathfrak{S}})$ は同型。

証明　(1)　$\mathfrak{X}_{M_1} \subset \mathfrak{X}_{M_2} \Leftrightarrow \mathfrak{X}^c_{M_1} \supset \mathfrak{X}^c_{M_2}$　(2)　$\mathfrak{X}_{M_1} \subset \mathfrak{X}_{M_2} \Leftrightarrow \mathfrak{X}^r_{M_1} \subset \mathfrak{X}^r_{M_2}$　(3)　$\mathfrak{X}^\#_M = \mathfrak{X}^r_{M^*}$，同型対応 $M \leftrightarrow M^*$ を考え

ればよい。 (証明終)

<u>命題26</u>　順序集合 $\mathbb{M}(E,\vec{\mathfrak{X}})$ は同型，双対を除いて次の4種類に分類される。ただし，$|E| \geqq 2$ とする．

(i) $\mathbb{M}(E,\vec{\mathfrak{J}})$ (ii) $\mathbb{M}(E,\vec{\mathfrak{S}})$ (iii) $\mathbb{M}(E,\vec{\mathfrak{N}})$ (iv) $\mathbb{M}(E,\vec{\mathfrak{B}})$

証明　(i), (ii) には最大元 $(U_{m,m})$，最小元 $(U_{0,m})$ が存在する。

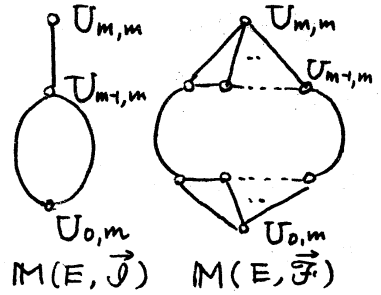
(iii) には最小元 $(U_{0,m})$ はあるが最大元は存在しない。

(iv) において $U_{0,m}$，$U_{m,m}$ は孤立元となる。

(i) では $\forall M \neq U_{m,m}$　$M \prec U_{m-1,m}$

(ii) では $\rho(M) = m-1$ のマトロイドは互いに比較可能ではない。

$[m = |E|$ とした。$]$ (証明終)

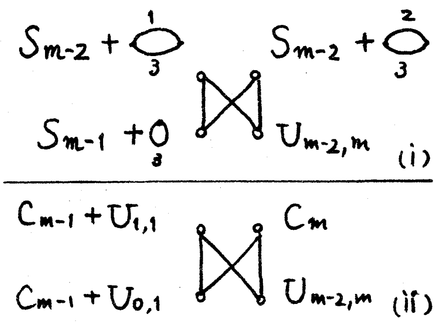


$E = \{1,2,3\}$ のときの4種類の順序集合を図4に示す。

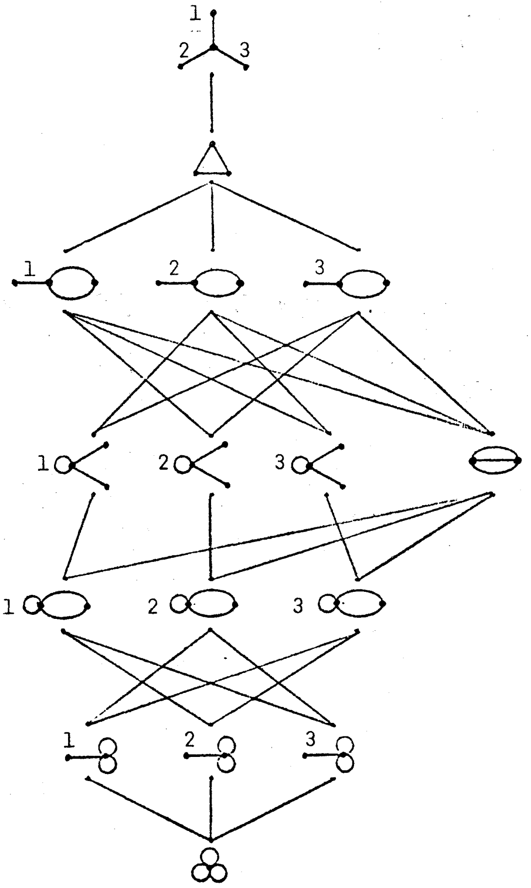
<u>命題27</u>　$|E| \geqq 3$ のとき $\mathbb{M}(E,\vec{\mathfrak{X}})$ は束をなさない。

証明　命題26により (iii) と (iv) の型の順序集合は束ではない。

(i), (ii) については Hasse 図に右のような部分があることにより束ではない。$[\, C_m = U_{m-1,m}$，$S_m = U_{m,m}$ とおく$]$ (証明終)



(i) $\mathbb{M}(E, \vec{J})$



(ii) $\mathbb{M}(E, \vec{\mathcal{F}})$

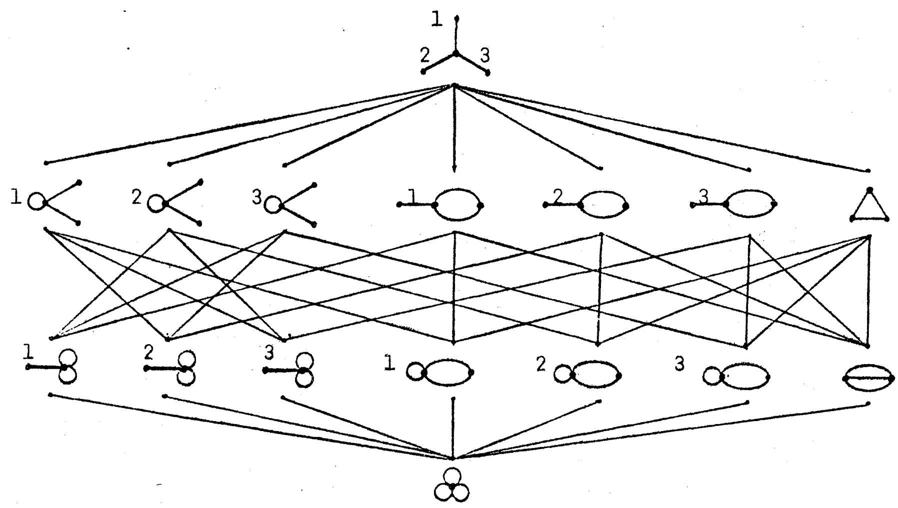
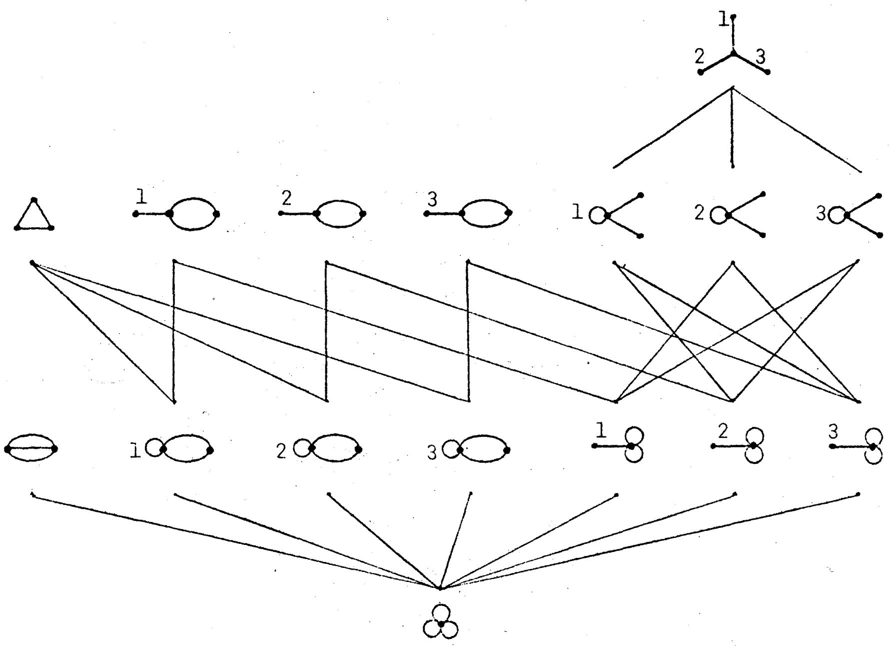


図 4-1

(iii) $\mathbb{M}(E, \vec{\mathcal{H}})$



(iv) $\mathbb{M}(E, \vec{\mathcal{B}})$

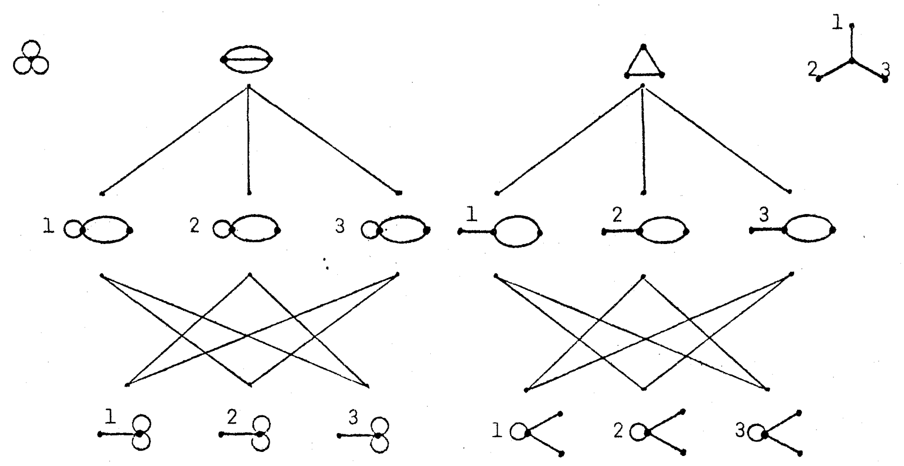


図 4-2

3.8 マトロイドの結と交

一般に，$\mathcal{A}=\{\alpha_i : A_i \to A\ ;\ i\in I\}$ をAの部分対象の族とするとき，Aの部分対象 $\alpha : A' \to A$ が族 $\mathcal{A}$ の結であるとは次の条件が成り立つことをいう。

(i) $\forall i \in I \quad \exists \delta_i : A_i \to A' \quad \alpha_i = \alpha\delta_i$

(ii) 任意の対象 B，任意の射 $\xi : A \to B$，
任意のBの部分対象 $\beta : B' \to B$ に対して，

$$\forall i\in I \quad \exists \eta_i : A_i \to B' \quad \beta\eta_i = \xi\alpha_i$$
$$\Rightarrow \exists \eta : A' \to B' \quad \beta\eta = \xi\alpha$$

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "\eta_i"] \arrow[dr, "\delta_i"] \arrow[dd, "\alpha_i"'] & & B' \arrow[dd, dash] \\
& A' \arrow[ur, "\eta"'] \arrow[dl, "\alpha"] & \\
A \arrow[rr, "\xi"'] & & B
\end{tikzcd}$$

結 A' を $\bigcup_{i\in I} A_i$ で表わす。特に $I=\{1,2\}$ のとき，$A_1 \cup A_2$ で表わす。一般には部分対象の族の結は常に存在するとは限らない。

マトロイドの圏において，マトロイドMの部分マトロイドの族 $\{M_\lambda\ ;\ \lambda\in\Lambda\}$ に対して，この族の結が存在するときそれをこの族の結マトロイドと呼ぶ。

M, M_1, M_2 をE上のマトロイドとし，$\mathbb{M}(E, \overleftrightarrow{\mathcal{X}})$ における順序に関して $M_1 \prec M$, $M_2 \prec M$ とする。Mの部分マトロイドとして M_1 と M_2 の結マトロイド $M_1 \cup M_2$ が存在すれば，

(1) $M_1, M_2 \prec M_1 \cup M_2$

(2) $\forall M' \in \mathbb{M}(E, \overleftrightarrow{\mathcal{X}}) \quad M_1, M_2 \prec M' \Rightarrow M_1\cup M_2 \prec M'$

であることが導かれる（上の定義で $\xi = 1_M$ とすればよい）。

命題27によってマトロイドの圏においては結マトロイドは常には存在しないことがわかる。

一方，2つのマトロイド $M_1=(E_1,\mathcal{I}_1)$, $M_2=(E_2,\mathcal{I}_2)$ に対して，$\mathcal{I}_1\vee\mathcal{I}_2=\{I_1\cup I_2 ; I_1\in\mathcal{I}_1, I_2\in\mathcal{I}_2\}$ は $E_1\cup E_2$ 上の独立集合族となることが知られていて，マトロイド$M_1\vee M_2=(E_1\cup E_2, \mathcal{I}_1\vee\mathcal{I}_2)$は$M_1, M_2$の合併マトロイドと呼ばれる。

明らかに，どのマトロイドの圏を考えても合併マトロイドは結マトロイドとは異なる。たとえば，任意のマトロイドMに対して，$M\cup M=M$ は常に成り立つが，$M=U_{m,2m}$ としたとき，$M\vee M=U_{2m,2m}$ となる。

一般に，Aの部分対象の族$\mathcal{A}=\{\alpha_i: A_i\to A ; i\in I\}$に対して，Aの部分対象$\alpha: A'\to A$が族$\mathcal{A}$の交であるとは次の条件が成り立つことをいう。

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, bend right, "\beta_i'"'] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dd, bend left, "\alpha'"] \\ A_i \arrow[dr, "\alpha_i"'] & A' \arrow[l, "\beta_i"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ & A \end{tikzcd}$$

(i) $\forall i\in I \quad \exists \beta_i: A'\to A_i \quad \alpha=\alpha_i\beta_i$

(ii) 任意の対象B，任意の射$\alpha': B\to A$に対して，

$$\forall i\in I \quad \exists \beta_i': B\to A_i \quad \alpha'=\alpha_i\beta_i'$$

$\Rightarrow$ 一意に $\gamma: B\to A'$ が存在して $\alpha'=\alpha\gamma$

このとき交A'を$\bigcap_{i\in I}A_i$で表わす。特に$I=\{1,2\}$のときは，$A_1\cap A_2$で表わす。一般には部分対象の族の交は常に存在す

るとは限らない。

マトロイドの圏において，マトロイドMの部分マトロイドの族$\{M_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$に対して，この族の交が存在するときそれをこの族の<u>交マトロイド</u>と呼ぶ。

M, M_1, M_2 をE上のマトロイドとし，$\mathbb{M}(E, \overleftrightarrow{\mathfrak{X}})$における順序に関して $M_1 \prec M, M_2 \prec M$ とする。Mの部分マトロイドとしてM_1とM_2の交マトロイド$M_1 \cap M_2$が存在すれば，

(1) $M_1 \cap M_2 \prec M_1, M_2$

(2) $\forall M' \in \mathbb{M}(E, \overleftrightarrow{\mathfrak{X}}) \quad M' \prec M_1, M_2 \Rightarrow M' \prec M_1 \cap M_2$

であることが導かれる。

命題27によりマトロイドの圏における交マトロイドは常には存在しないことがわかる。

なお，圏論において結と交とは双対的な概念で**は**な**い**ことに注意すべきである。

E上の2つのマトロイド$M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$に対して，$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ は一般にはマトロイドの独立集合族とはならないが，$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$が独立集合族となるとき，$(E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$を$M_1$と$M_2$の<u>共通マトロイド</u>と呼んでいる。

<u>命題28</u>　共通マトロイドは$\mathrm{Mat}(\vec{\mathcal{I}})$および$\mathrm{mat}(\vec{\mathcal{I}})$における交マトロイドである。

証明　$|E| = m$ とする。E上のマトロイド $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ はいずれも $M = (E, \binom{E}{m}) \simeq U_{m,m}$ の部分マトロイドである。このとき単射 $\alpha_i : M_i \to M$ としてはE上の恒等対応 1_E を考えておく。M_1 と M_2 の共通マトロイド $(E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$ を M' とおき，$M' = M_1 \cap M_2$ であることを示す。$\alpha : M' \to M$ はやはりE上の恒等対応による射とする。

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, "\beta_2'"] \arrow[ddr, "\beta_1'"'] & & \\ & M' \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & M_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & M_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & M \end{tikzcd}$$

(i) $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_i$ であるから β_i を 1_E による射とすれば $\alpha = \alpha_i \beta_i$。

(ii) $N = (E', \mathcal{I}')$, $\alpha' : N \to M$, $\alpha' = \alpha_i \beta_i'$ と仮定する。α_i は 1_E であったから α', β_i' は E' から E への対応としては同じものである。この対応を k とおく。$\beta_i' \in \vec{\mathcal{J}}[N, M_i]$ であるから

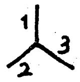
$k\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}_i$ $(i=1,2)$，ゆえに $k\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$。したがって対応 k による射 $\gamma : N \to M'$ が存在して $\alpha' = \alpha\gamma$ となる。さらに，$\gamma' : N \to M'$　$\alpha' = \alpha\gamma'$ とすれば γ' は対応として k と一致するから $\gamma' = \gamma$ である。

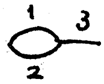
以上は $\mathrm{Mat}(\vec{\mathcal{J}})$ において考えた。$\mathrm{mat}(\vec{\mathcal{J}})$ も同様である。

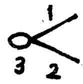
(証明終)

したがって，M_1 と M_2 の共通マトロイドは $M_1 \cap M_2$ と表わすことにする。

なお，合併マトロイドと同様に，任意の2つのマトロイド M_1, M_2 に対してマトロイド $M_1 \wedge M_2 = (M_1^* \vee M_2^*)^*$ を考えることができるが，もちろんこれはどの圏においても交マトロイドとは異なるものである。たとえば，$E=\{1,2,3\}$ 上のマトロイド

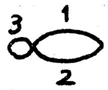
M : 

M_1 : 

M_2 : 

に対して，

$M_1 \wedge M_2$: 

$M_1 \cap M_2$: 

(共通マトロイド)

である。

あとがき

われわれの目標はアルゴリズムと関連してマトロイドを考察することであったが，合併マトロイドや共通マトロイドなどの性質を明らかにするために圏論的接近を試みた。まだ目的を十分果たしているとはいえないがその作業の最初の報告が本稿である。マトロイドの諸公理系の体系的な整理に関してはある程度成果があったといえよう。

なお，マトロイド間の射としてはフラット族子のなす束に関連して"strong map"などが比較的よく研究されている[4],[7]。

マトロイド公理系対照表

1) $\mathcal{B} \neq \phi$ 2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow$ '$B_1 \subsetneqq B_2$ でない' [3)より導出可能] 3) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \neq B_2 \Rightarrow {}^{\exists}b_1 \in B_1 - B_2 \; {}^{\exists}b_2 \in B_2 - B_1 \quad B_1 \cup \{b_2\} - \{b_1\} \in \mathcal{B}$, $B_2 \cup \{b_1\} - \{b_2\} \in \mathcal{B}$	
1) $\phi \in \mathcal{I}$ 2) $I \in \mathcal{I}, J \subset I \Rightarrow J \in \mathcal{I}$ 3) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$, $\lvert I_1 \rvert < \lvert I_2 \rvert \Rightarrow {}^{\exists}x \in I_2 - I_1 \quad I_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$	1) $E \in \mathcal{S}$ 2) $S \in \mathcal{S}$, $T \supset S \Rightarrow T \in \mathcal{S}$ 3) $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, $\lvert S_2 \rvert > \lvert S_1 \rvert \Rightarrow {}^{\exists}x \in S_2 - S_1 \quad S_2 - \{x\} \in \mathcal{S}$
1) $\phi \notin \mathcal{D}$ 2) $D \in \mathcal{D}$, $C \supset D \Rightarrow C \in \mathcal{D}$ 3) $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, $x \in D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 \notin \mathcal{D} \Rightarrow D_1 \cup D_2 - \{x\} \in \mathcal{D}$	1) $E \notin \mathcal{W}$ 2) $W \in \mathcal{W}$, $V \subset W \Rightarrow V \in \mathcal{W}$ 3) $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$, $x \notin W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2 \notin \mathcal{W} \Rightarrow (W_1 \cap W_2) \cup \{x\} \in \mathcal{W}$
1) $\phi \notin \mathcal{C}$ 2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow$ '$C_1 \subsetneqq C_2$ でない' 3) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $x \in C_1 \cap C_2$, $C_1 \neq C_2 \Rightarrow {}^{\exists}C_3 \in \mathcal{C} \quad C_3 \subset C_1 \cup C_2 - \{x\}$	1) $E \notin \mathcal{H}$ 2) $H_1, H_2 \in \mathcal{H} \Rightarrow$ '$H_1 \subsetneqq H_2$ でない' 3) $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, $x \notin H_1 \cup H_2$, $H_1 \neq H_2 \Rightarrow {}^{\exists}H_3 \in \mathcal{H} \quad H_3 \supset (H_1 \cap H_2) \cup \{x\}$
1) $\phi \in \mathcal{T}$ 2) $T_1, T_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow T_1 \cup T_2 \in \mathcal{T}$ 3) $T_1, X, T_2 \in \mathcal{T}$, $T_1 \subset X \subset T_2$ $\Rightarrow {}^{\exists}Y \in \mathcal{T} \quad T_1 = \inf\{X, Y\}$, $T_2 = X \cup Y$ 4) ${}^{\forall}x \in E \quad T(x) = \cup\mathcal{T}$ または $T(x) \lessdot \cup\mathcal{T}$ 5) $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, $T_1, T_2 \lessdot T_1 \cup T_2$ $\Rightarrow \inf\{T_1, T_2\} \lessdot T_1, T_2$	1) $E \in \mathcal{F}$ 2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ 3) $F_1, X, F_2 \in \mathcal{F} \quad F_1 \supset X \supset F_2$ $\Rightarrow {}^{\exists}Y \in \mathcal{F} \quad F_1 = \sup\{X, Y\}$, $F_2 = X \cap Y$ 4) ${}^{\forall}x \in E \quad F(x) = \cap\mathcal{F}$ または $F(x) \gtrdot \cap\mathcal{F}$ 5) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \quad F_1, F_2 \gtrdot F_1 \cap F_2$ $\Rightarrow \sup\{F_1, F_2\} \gtrdot F_1, F_2$

$T(x): \begin{cases} \text{(i)} & x \notin T(x) \\ \text{(ii)} & {}^{\forall}T \in \mathcal{T}, x \notin T \Rightarrow T(x) \supset T \end{cases}$

$X \lessdot Y: \begin{cases} \text{(i)} & X \subsetneqq Y \\ \text{(ii)} & X \subset Z \subset Y \Rightarrow \\ & Z = X \text{ または } Z = Y \end{cases}$

$\mathcal{B} = \max \mathcal{I}$	$\mathcal{B} = \min \mathcal{S}$
$\mathcal{I} = \begin{cases} \mathrm{sub}\,\mathcal{B} \\ \mathcal{D}^c \end{cases}$	$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathrm{quot}\,\mathcal{B} \\ \mathcal{W}^c \end{cases}$
$\mathcal{D} = \begin{cases} \mathcal{I}^c \\ \mathrm{quot}\,\mathcal{C} \end{cases}$	$\mathcal{W} = \begin{cases} \mathcal{S}^c \\ \mathrm{sub}\,\mathcal{H} \end{cases}$
$\mathcal{C} = \begin{cases} \min \mathcal{D} \\ \mathrm{mini}\,\mathcal{T} \end{cases}$	$\mathcal{H} = \begin{cases} \max \mathcal{W} \\ \mathrm{maxi}\,\mathcal{F} \end{cases}$
$\mathcal{T} = \mathrm{join}\,\mathcal{C}$	$\mathcal{F} = \mathrm{meet}\,\mathcal{H}$

$F(x): \begin{cases} \text{(i)} & x \in F(x) \\ \text{(ii)} & {}^{\forall}F \in \mathcal{F}, x \in F \Rightarrow F(x) \subset F \end{cases}$

$X \gtrdot Y: \begin{cases} \text{(i)} & X \supsetneqq Y \\ \text{(ii)} & X \supset Z \supset Y \Rightarrow \\ & Z = X \text{ または } Z = Y \end{cases}$

参考文献

[1] B. Mitchell : Theory of Categories, Academic Press, 1965.

[2] S. Mac Lane : Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, 1971.

[3] D.J.A. Welsh : Matroid Theory, Academic Press, 1976.

[4] W.T. Tutte : Introduction to the Theory of Matroids, American Elsevier, 1970.

[5] 富沢信明, 伊理正夫 : マトロイドについて, 計測と制御, Vol. 16, pp. 455－468, 1977.

[6] 富沢信明 : マトロイドの自己双対的な基公理について, 電子通信学会技術研究報告, Vol. 77, No. 197, pp. 71～72, 1977.

[7] H.H. Crapo, G.C. Rota : On the Foundations of Combinatorial Theory, Combinatorial Geometries, M.I.T. Press, 1970.