数理解析研究所講究録
第 333 巻 1978 年 168-177

極大2部マトロイドについて
On the Maximal Bipartite Matroids

東北大学 工学部　浅野 孝夫
西関 隆夫
斎藤 伸自

1. まえがき

与えられたマトロイドから変形して得られるより小さなマトロイドとして，変形のしかたによって，部分マトロイド(reduction)，縮約マトロイド(contraction)及び縮約部分マトロイド(minor)の3種類がある。本文では，2部グラフ及びEulerグラフを抽象化した「2部マトロイド」なるものを定義し，与えられたバイナリマトロイドの極大な2部部分マトロイド，2部縮約マトロイド及び2部縮約部分マトロイドの3つの間の関係を明らかにする。特に，与えられたバイナリマトロイドから，その極大な2部部分マトロイド，2部縮約マトロイドあるいは2部縮約部分マトロイドを求めることは，ある意味で等価であることを示す。更に，この結果をk部グラフの場合にまで一般化する。

2. 準 備

［定義1］[1] マトロイド$\mathbb{M}=(\mathcal{M}, E)$は有限集合Eと，閉路と呼ばれるEの非空な部分集合の族$\mathcal{M}$からなり，次の2つの公理を満足するものである。

(1) $C_1 \subsetneq C_2$なる$C_1, C_2 \in \mathcal{M}$は存在しない

(2) もし$C_1, C_2 \in \mathcal{M}$で$e_1 \in C_1 \cap C_2$且つ$e_2 \in (C_1 - C_2)$であるとき，$e_2 \in C_3$，$e_1 \notin C_3$且つ$C_3 \subset (C_1 \cup C_2)$なる$C_3 \in \mathcal{M}$が存在する。（定義終）

［定義2］　どの$|C|$（$C \in \mathcal{M}$）も偶数であるとき，マトロイド$\mathbb{M}$は2部であるという。（定義終）

［定義3］[1]　どの$C_1, C_2, \cdots, C_n$に対しても，$C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$が空でないとき，それが

$$C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n = \sum_{C_i \in \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}} C_i$$

と表せるとき，マトロイド$\mathbb{M}$はバイナリであるという。

（定義終）

記法として，$\mathbb{M}_i=(\mathcal{M}_i, E_i)$を用いることにする。

［定義4］　$E_0, E_s \subset E$とする。

(a) マトロイド$\mathbb{M}$から（E_0を除去して）得られる部分マトロイド$\mathbb{M}_1=\mathbb{M}[E_0, \phi]$とは，

$E_1 = E - E_0$

$\mathcal{M}_1 = \{C_1 \mid C_1 \in \mathcal{M}$ 且つ $C_1 \cap E_0 = \phi\}$

であるマトロイドである。

(b) マトロイド $\mathbb{M}$ から（E_s を除去して）得られる縮約マトロイド $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}[\phi, E_s]$ とは，$\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = \{C - E_s \mid C \in \mathcal{M},\ C - E_s \neq \phi\}$$

としたとき，

$$E_1 = E - E_s$$

$$\mathcal{M}_1 = \{C_1 \mid C_1 \in \mathcal{L} \text{ 且つそのような極小な } C_1 \subset E_1\}$$

で与えられるマトロイドである。

(c) $E_o \cap E_s = \phi$ であるとき，（E_o 及び E_s を除去して得られる）縮約部分マトロイド $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}[E_o, E_s]$ とは，$\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}[E_o, \phi]$ としたとき，$\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2[\phi, E_s]$ なるマトロイドである。

（定義終）

便宜上，一個の元からなる集合 $E_d = \{e\}$ を $E_d = e$ と書くことにする。

次に，次章以下で必要な既知の補題を示しておく。

［補題1］(1) $\mathbb{M}$ がバイナリならば，$\mathbb{M}$ のどの縮約部分マトロイドもバイナリである。（補題終）

［補題2］(1) $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}[E_{o1}, E_{s1}]$ 且つ $\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}_1[E_{o2}, E_{s2}]$ ならば，$\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}[E_{o1} + E_{o2}, E_{s1} + E_{s2}]$ である。（補題終）

3. 極大な2部部分マトロイド，2部縮約マトロイド及び2部縮約部分マトロイドの関係

本章では，バイナリマトロイドの2部部分マトロイド，2部縮約マトロイド及び2部縮約部分マトロイドの間の関係を明らかにする。まず，次の2つの補題がいえる。

〔補題3〕 2部マトロイドのどの部分マトロイドも2部である。 （補題終）

〔補題4〕 バイナリマトロイド$\mathbb{M}$の縮約マトロイド$\mathbb{M}_1=\mathbb{M}[\phi, e]$（$e\in E$）が2部であるならば，$\mathbb{M}$の部分マトロイド$\mathbb{M}_2=\mathbb{M}[e, \phi]$も2部である。

（証明） $\mathcal{M}_2=\{C_2 \mid C_2\in\mathcal{M}$ 且つ $C_2\not\ni e\}$ であるので，$\mathbb{M}_2$が2部であることを示すには，$C\not\ni e$ なる$C\in\mathcal{M}$は，$|C|$が偶数であることを示せばよい。ここではより強い「$C\in\mathcal{M}$のとき，$C\not\ni e$ であるための必要十分条件は$|C|$が偶数である」ことを示す。

十分性：$|C|$が偶数であり且つ$C\ni e$とすると，$C-e\in\mathcal{M}_1$である。仮定により$\mathbb{M}_1$は2部であるので，$|C-e|$は偶数である。従って，$|C|$は奇数となり矛盾。

必要性：ある$C\in\mathcal{M}$に対し，$C\not\ni e$ であるにもかかわらず，$|C|$ が奇数であるとする。このとき，$C\notin\mathcal{M}_1$であるので，$C'\ni e$，$C_1'=C'-e\subsetneq C$且つ$C_1'\in\mathcal{M}_1$なる$C'\in\mathcal{M}$が存在する。$\mathbb{M}_1$が2部であるので，$|C_1'|$は偶数であり，$|C'|$は奇数である。$\mathbb{M}$はバイナリであるので，定義3により，$C\oplus C'$は

$$C \oplus C' = \sum_{C_i \in \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}} C_i$$

とかける。ここで，$C \oplus C' \ni e$ であるので，$e \in C_i \neq e$ なる $C_i \in \mathcal{M}$ が存在する。十分性の部分から，$|C_i|$ は奇数である。$|C|$ 及び $|C'|$ が共に奇数であるので，$|C \oplus C'|$ は偶数である。従って，$e \notin C_j$ なる $C_j \in \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ が存在する。いま，$C_j \subsetneq C$ であるので，定義1に反する。（証明終）

補題4を用いれば，次の定理がいえる。

［定理1］ バイナリマトロイド $\mathbb{M}$ の縮約マトロイド $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}[\phi, E_d]$ が2部であるとき，$E_o + E_s = E_d$ なる任意の E_o 及び E_s に対し，$\mathbb{M}$ の縮約部分マトロイド $\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}[E_o, E_s]$ も2部である。

（証明） $|E_o|$ に関する帰納法で証明する。$|E_o| = 0$ のとき，$\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}_1$ であるので明らかに成立する。次に $|E_o| < n$ $(n \geq 1)$ のとき成立すると仮定する。いま，$|E_o| = n$ とする。任意の $e \in E_o$ に関し，$\mathbb{M}_3 = \mathbb{M}[\phi, E_d - e]$ とすると，補題1により $\mathbb{M}_3$ はバイナリであり，補題2により $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_3[\phi, e]$ である。$\mathbb{M}_1' = \mathbb{M}_3[e, \phi]$ とすると，補題4により，$\mathbb{M}_1'$ は2部である。$\mathbb{M}' = \mathbb{M}[e, \phi]$ とすると補題1により，$\mathbb{M}'$ もバイナリである。しかも $\mathbb{M}_1' = \mathbb{M}'[\phi, E_d - e]$ 且つ $\mathbb{M}_2 = \mathbb{M}'[E_o - e, E_s]$ であるので，帰納法の仮定により，$\mathbb{M}_2$ は2部である。（証明終）

定理1の逆はいえないが次の補題を用いて定理2がいえる。

[補題5]　2部でないバイナリマトロイド$\mathbb{M}$の部分マトロイド$\mathbb{M}_1=\mathbb{M}[e,\phi]$ $(e\in E)$が2部であるならば，$\mathbb{M}$の縮約マトロイド$\mathbb{M}_2=\mathbb{M}[\phi, e]$　も2部である。

(証明)　$C_2\in\mathcal{M}_2$のとき，$C_2=C-e$　なる$C\in\mathcal{M}$が存在するので，$\mathbb{M}_2$が2部であることを証明するには「$C\in\mathcal{M}$のとき，$C\not\ni e$　であるための必要十分条件は$|C|$が偶数である」ことを示せばよい。必要性は明らかであるので十分性のみを示す。

十分性：$\mathbb{M}$が2部でないので，$|C'|$が奇数であるような$C'\in\mathcal{M}$が存在する。$C'\ni e$である。いま，$|C|$が偶数で且つ$C\ni e$なる$C\in\mathcal{M}$が存在したとする。定義3より$C\oplus C'$は

$$C\oplus C'=\sum_{C_i\in\mathcal{M}'\subset\mathcal{M}} C_i$$

とかける。$C\oplus C'\not\ni e$　且つ$|C\oplus C'|$は奇数であるから，$|C_i|$が奇数で，$C_i\not\ni e$なる$C_i\in\mathcal{M}$が存在する。$C_i\in\mathcal{M}_1$となり，$\mathbb{M}_1$が2部であることに反する。　(証明終)

[定理2]　バイナリマトロイド$\mathbb{M}$の部分マトロイド$\mathbb{M}_1=\mathbb{M}[E_d,\phi]$が2部であるような$E$の極小な部分集合を$E_d$とすると，$\mathbb{M}$の縮約マトロイド$\mathbb{M}_2=\mathbb{M}[\phi, E_d]$も2部である。

(証明)　$|E_d|$に関する帰納法で証明する。$|E_d|=0$　のとき明らかに成立する。$|E_d|<n$　のとき成立すると仮定する。いま$|E_d|=n\geq 1$とする。任意の$e\in E_d$に関し，$\mathbb{M}_3=\mathbb{M}[E_d-e,\phi]$とすると，$\mathbb{M}_3$は2部でないバイナリマトロイドであり，

補題2より，$\mathbb{M}_1=\mathbb{M}_3[e,\phi]$である。従って補題5により，$\mathbb{M}_1'=\mathbb{M}_3[\phi,e]$は2部である。$\mathbb{M}'=\mathbb{M}[\phi,e]=(\mathcal{M}',E-e)$とすると$\mathbb{M}'$はバイナリであり，しかも，$E_d-e$は$\mathbb{M}'$の部分マトロイド$\mathbb{M}_1'=\mathbb{M}'[E_d-e,\phi]$が2部であるような$E-e$の極小な部分集合である。なぜならば，もし$E_d'\subsetneq E_d-e$に関し$\mathbb{M}_4=\mathbb{M}'[E_d',\phi]$が2部であるとし，$\mathbb{M}_5=\mathbb{M}[E_d',\phi]$及び$\mathbb{M}_6=\mathbb{M}_5[e,\phi]=\mathbb{M}[E_d'+e,\phi]$とすると，$\mathbb{M}_4=\mathbb{M}_5[\phi,e]$が2部であるので，補題4により，$\mathbb{M}_6$は2部である。$E_d'+e\subsetneq E_d$であるので矛盾する。帰納法の仮定より，$\mathbb{M}_2=\mathbb{M}'[\phi,E_d-e]$は2部である。　（証明終）

定理1及び2から容易に次の定理が得られる。

［定理3］　$\mathbb{M}$がバイナリマトロイドのとき，次の(a)，(b)及び(c)は等価である。

(a)　E_dは$\mathbb{M}$の部分マトロイド$\mathbb{M}[E_d,\phi]$が2部であるような，Eの極小な部分集合である。

(b)　E_dは$\mathbb{M}$の縮約マトロイド$\mathbb{M}[\phi,E_d]$が2部であるような，Eの極小な部分集合である。

(c)　$E_d=E_o+E_s$は，$\mathbb{M}$の縮約部分マトロイド$\mathbb{M}[E_o,E_s]$が2部であるような，Eの極小な部分集合である。（定理終）

定理3より，与えられたバイナリマトロイドからその極大な2部部分マトロイド，2部縮約マトロイド及び2部縮約部

分マトロイドを求めることは等価であることがわかる。

定理1，2及び3はいずれも，バイナリでないときには，一般には成立しない。

枝集合EをもつグラフをGとしたとき，$E_0, E_s \subset E$に関し，E_0 (E_s)の枝を開放除去（短絡除去）して得られるグラフをGの部分グラフ（縮約グラフ）といい，$G[E_0, \phi]$ ($G[\phi, E_s]$)で表す。$G_1 = G[E_0, \phi]$，$G_2 = G_1[\phi, E_s]$であるとき，G_2はGの縮約部分グラフであるといい，$G_2 = G[E_0, E_s]$と書く。すべてのカットセットの元数が偶数であるグラフをEulerグラフということにすると，定理3から，次の系がいえる。

（系1）　グラフGは枝集合Eをもつとき，次の(a)，(b)及び(c)は等価である。但し，$E_d = E_0 + E_s$とおく。

(a)　E_dは，$G[E_d, \phi]$ ($G[\phi, E_d]$)が2部（Euler）グラフであるような，Eの極小な部分集合である。

(b)　E_dは，$G[\phi, E_d]$ ($G[E_d, \phi]$)が2部（Euler）グラフであるような，Eの極小な部分集合である。

(c)　E_dは，$G[E_0, E_s]$ ($G[E_s, E_0]$)が2部（Euler）グラフであるような，Eの極小な部分集合である。　（系終）

4．極大k部部分グラフ，k部縮約グラフ及びk部縮約部分グラフの間の関係

本章では，2部グラフに関する系1の結果が，k部グラフ

の場合にまで一般化できることを示す。

グラフ$G=(V, E)$の隣接する節点の色が相異なるようにk色で彩色可能であるとき，Gをk部グラフであるという。前章とほぼ同様にして以下の結果が得られる。

［補題6］　グラフGの縮約グラフ$G_1=G[\phi, e]$ $(e \in E)$がk部ならば，Gの部分グラフ$G_2=G[e, \phi]$もk部である。

（補題終）

［定理4］　グラフGの縮約グラフ$G_1=G[\phi, E_d]$がk部であるとき，$E_0+E_s=E_d$なる任意のE_0及びE_sに関し，Gの縮約部分グラフ$G_2=G[E_0, E_s]$もk部である。　（定理終）

［補題7］　k部でないグラフGの部分グラフ$G_1=G[e, \phi]$がk部ならば，Gの縮約グラフ$G_2=G[\phi, e]$もk部である。

（補題終）

［定理5］　グラフGの部分グラフ$G_1=G[E_d, \phi]$がk部であるようなEの極小な部分集合をE_dとすると，Gの縮約グラフ$G_2=G[\phi, E_d]$もk部である。　（定理終）

［定理6］　グラフGにおいて，次の(a), (b)及び(c)は等価である。

(a)　E_dは，Gの部分グラフ$G[E_d, \phi]$がk部であるような，Eの極小な部分集合である。

(b)　E_dは，Gの縮約グラフ$G[\phi, E_d]$がk部であるような，

Eの極小な部分集合である。

(c) $E_d = E_0 + E_s$は，Gの縮約部分グラフ$G[E_0, E_s]$がk部であるような，Eの極小な部分集合である。 （定理終）

5．むすび

与えられたバイナリマトロイドから，その極大な2部部分マトロイド，2部縮約マトロイド及び2部縮約部分マトロイドを求めることは，定理3の意味で等価であることを示した。更に，与えられたグラフから，その極大なk部(Euler)部分グラフ，k部(Euler)縮約グラフ及びk部(Euler)縮約部分グラフを求めることが等価であることを示した。グラフの最大なEuler部分グラフを求める問題は多項式オーダの手数で解けるが，それに双対な，グラフの最大な2部(k部)縮約グラフを求める問題はNP－完全である。

なお，本報告の一部は既に文献(2)に発表している。

謝辞　本研究は文部省科研費総合研究(035012)から一部援助を受けた。

文献

(1). W. T. Tutte: "Introduction to the Theory of Matroids", American Elsevier, New York (1971).

(2). 西関，浅野，斎藤："極大偶マトロイドについて"，信学論(A)，60-A，2，P.192（昭和52-02）.