数理解析研究所講究録
第 334 巻 1978 年 1-6

Diophantus 近似における問題

Colorado 大　W.M. Schmidt

(1)　Littlewood 予想について。

$$\liminf q\|\alpha q\|\cdot\|\beta q\| = 0 \quad \text{for } {}^\forall\alpha, \beta$$

ただし $\|\alpha\|$ は α から最も近い整数までの距離

㊟ $q\|\alpha q\|\cdot\|\beta q\| < 1$ は簡単である。何故なら Dirichlet により $|\alpha - \frac{p}{q}|$, $|\beta - \frac{p'}{q}| < \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}$ なる p, p', q が存在するから $\|\alpha q\|, \|\beta q\| < q^{-\frac{1}{2}}$

なお、Davenport (1960) が次を証明している

$$^\exists\alpha, \beta \quad \liminf \max(q^{\frac{1}{2}}\|\alpha q\|, q^{\frac{1}{2}}\|\beta q\|) > 0$$

$$^\exists\alpha, \beta \quad \text{〃} \quad (q^{\mu}\|\alpha q\|, q^{1-\mu}\|\beta q\|) > 0$$

ただし $0 \leq \mu \leq 1$

<u>問題(1 a)</u>　次の両方を同時に成立させる α, β は存在?

$$\liminf \max(q^{\frac{1}{3}}\|\alpha q\|, q^{\frac{2}{3}}\|\beta q\|) > 0$$

$$\text{〃} \quad (q^{\frac{2}{3}}\|\alpha q\|, q^{\frac{1}{3}}\|\beta q\|) > 0$$

(2)　α を degree d の代数的数とする。

周知の通り Roth が $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ は有限個の解しか持たぬことを証明した。

<u>問題(2a)</u> この不等式を改良して

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2(\log q)^k}$$ にせよ。

さてRothにより $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c(\alpha, \varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}$ となる定数 $c(\alpha,\varepsilon)$ が存在するが、この $c(\alpha,\varepsilon)$ は non-effective である。一方 Liouville による $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c(\alpha)}{q^d}$ では、$c(\alpha)$ は effective な定数である。もちろん Roth の定理を effective にすることが究極目標であるが、それは難し過ぎる。そこで Feldman (1971) は次を示した。

$d \geq 3$ の時 $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c(\alpha)}{q^{d-\delta(\alpha)}}$ ここで定数 $c(\alpha)$ および $\delta(\alpha)$ は effective である。もちろんこれは、Liouville 定理の小さなそして大きな改良であるが、願わくば、

<u>問題(2b)</u> 上の $\delta(\alpha)$ を $d = \deg\alpha$ だけに depend するようにせよ。

さて Siegel (1921) は二変数多項式 $f(x,y)=0$ で定義される代数曲線が、有限個しか整数点を持たないことを示した。それには $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{\sqrt{d}}}$ なる不等式が有限個の解しか持たぬことを用いた。ただし、彼の結果は effective で

はなかった。その曲線のgenusをgとする時、Baker と Coates が解の大きさに対するeffectiveな上界を与えた。($g=1$ の時)。

問題2C　$g>1$ ならどうか。

β を algebraic な数とし、そのHeightを$H(\beta)$とする。$H(\beta)$はβの定義方程式の係数の絶対値の最大のもの，Leveque が次を証明した。　αを代数的数とし、Kを代数体とする時

$|\alpha-\beta|<\frac{1}{H(\beta)^{2+\varepsilon}}$ を満たす $\beta\in K$ は有限個しかない。

一方 Schanuel は $K\ni\alpha,\beta$ で $\alpha\neq\beta$ とする時

$$|\alpha-\beta|>\frac{1}{(H(\alpha)H(\beta))^{2+\varepsilon}}\quad \text{if } |\log H(\alpha)-\log H(\beta)|\geq c(K,\varepsilon)$$

を証明した。これに関係して、

問題2d　$|\alpha-\beta|>\frac{c(K,\varepsilon)}{(H(\alpha)H(\beta))^{2+\varepsilon}}$ を証明セヨ。

(3)　Roth は次を証明した。

α を $\deg\alpha=d$ なる代数的数とする。すると、$\deg\beta\leq d$ なる代数的数βで $|\alpha-\beta|<\frac{1}{H(\beta)^{2d+\varepsilon}}$ を満すものは有限個しか存在しない。Wirsing はこれを改良して、$2d+\varepsilon$ を $d+1+\varepsilon$ で置き代えることが出来ることを証明した。

問題3a　$|\alpha-\beta|<\frac{c(\alpha)}{H(\beta)^{d+1}}$ を満す β ($\deg\beta\leq d$) は無限個あることを言え。($d+1-\varepsilon$ なら provable かも知れない)

この予想について、Wirsing は $|\alpha-\beta| < \frac{c(\alpha)}{H(\beta)^{\frac{d+3}{2}}}$ の時には成立することを示した。

注 power series においては $d=2$ さえ分っていない。

(4) $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を real algebraic number とする。

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

なる q, $p_1, \cdots, p_n$ が無限に存在することは、Dirichlet により証明されていた。また、$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| > \frac{c^*}{q^{1+\frac{1}{n}+\varepsilon}}$ なる定数 $c^* = c^*(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ が存在することは近年 Schmidt により証明された。さて C を $f(x,y)=0$ で与えられる代数曲線とする。f は整係数で $\deg f = d$ とする。有理点 $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right)$ が曲線 C 上にない時、この点から C への距離 $\geq \frac{c}{q^d}$ となることは Liouville の方法に従って簡単に証明することが出来る。

問題 4a　この不等式を $\frac{c}{q^{3+\varepsilon}}$ と出来ないか。

問題 4b　C 上の点 (α, β) に対し、$\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right)$ はどの位近くに来ることが出来るか。

(5) Non-linear な問題

Heilbronn (1948) は次を証明した。

もし $N > N(\varepsilon)$ ならば、$\forall \alpha \ \exists q \leq N \ \ \|\alpha q^2\| < N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$

注 Dirichlet の定理はもちろん $\|\alpha q\| < N^{-1}$ である。

問題5a　$N > N(\varepsilon)$, $\forall\alpha$　$\exists q \leq N$ with $\|\alpha q^2\| < N^{-1+\varepsilon}$

㊟これは extremely difficult であろう。

$\liminf q^{\frac{1}{2}}\|\alpha q^2\| = 0$ は少し易しいだろう。

問題5(a) $\Longrightarrow$ mod p の最小平方非剰余 $\ll p^{\varepsilon}$

となることが分っている。Burgess が $\ll \frac{1}{p^{4\sqrt{e}}}$ なる

ことは証明している。

問題5b　$N > N(\varepsilon)$　$\forall\alpha$　$\exists q \leq N$ with $\|\alpha q^3\| < N^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}$

㊟これは上よりは易しいかも知れない。

$\|\alpha q^3 + \beta q^2\| < N^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}$　とか　$\|\alpha q^3 + \beta q\| < N^{-\frac{1}{5}+\varepsilon}$

は証明出来る。

さて Davenport は $Q(X_1, \cdots, X_n)$ を indefinite な二次形式で $n \geq 16$ なる時、$|Q(x)| < \varepsilon$ なる整数 $x \neq 0$ が存在することを証明した。

$Q \underset{real}{\sim} X_1^2 + \cdots X_r^2 - X_{r+1}^2 - \cdots - X_{r+s}^2$　となっている時、十分に大きな $C_1(\varepsilon)$ と $N_1(\varepsilon)$ が存在して、$r, s \geq C_1(\varepsilon)$ かつ　$N \geq N_1(\varepsilon)$　なる時、

$$|x| \leq N \quad かつ \quad |Q(x)| < N^{-2+\varepsilon}$$

なる x が存在すると思われる。

問題5c　上を証明せよ。

㊟もし上が成立すれば best possible である。何故なら

$$|x_1^2 + \cdots + x_r^2 - \alpha(\overbrace{x_{r+1}^2 + \cdots + x_{r+s}^2}^{y})| > \frac{1}{y} > \frac{C}{N^2} \text{ だから。}$$

さて $C(x_1, \cdots, x_n)$ を cubic form とする時、Pitman が、$n \geq n^*$ ならば、$|C(x)| < \varepsilon$ が整数解を持つことを証明した。ここで n^* は 5000 位の定数である。これを $|C(x)| < N^{-3+\varepsilon}$ くらいには出来ないだろうか。

<u>問題 5d</u>　$F(x_1, \cdots, x_n)$ を degree d の form とする。
$n \geq n_0(d)$ ならば $^\forall \varepsilon$ に対して、$|F(x)| < \varepsilon$ が整数解をもつことを証明せよ。

(注)上は $d=5$ でも分っていない。

問題をもう少し特殊化して、d を奇数とし、

$a_1 x_1^d + \cdots + a_n x_n^d = 0$　なる方程式を考える。

$n \geq N(d)$ の時、これが non-trivial な解を持つことは分っているが、Birch は、$n > N(d, \varepsilon)$ ならば $|x| \leq \max(|a_j|)^{\frac{1}{d}+\varepsilon}$ なる解の存在することを証明した。

<u>問題 5e</u>　: 上で $\frac{1}{d}+\varepsilon$ を単に ε とせよ。

以上が Schmidt 教授の講演のあらましである。実は、もう少し問題を出されたのであるが、意味不明のため省略した部分もある。また、上に出された問題のいくつかは、conjecture として出されたものであり、必ずしも正しい命題であるとは限らないことを付記しておく。要を得ない所があるとすれば全て筆記者の至らぬところと思われたい。（藤原正彦 記）