数理解析研究所講究録
第334巻 1978年 71-73

On linear relations between roots of unity

お茶の水女子大 藤原正彦
M. FUJIWARA

次の二定理は良く知られている。(Chowla, 岩沢 等)

<u>定理A</u> 素数 $p>2$ に対して $\cot\frac{2\pi a}{p}$ $(a=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2})$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である。

<u>定理B</u> 素数 $p>2$ に対して $\tan\frac{2\pi a}{p}$ $(a=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2})$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である。

さて、ここで χ を character mod p とする。すなわち χ は $\mathbb{Z}/(p)$ の乗法群から単位円周上への準同型。この時

$$\text{Th A} \iff \text{Th B} \iff \sum_{a=1}^{p-1} a\chi(a) \neq 0 \quad \text{for } {}^{\forall}\chi \ \text{ s.t. } \chi(-1)=-1$$

$$\iff L(1,\chi)\neq 0 \quad \text{for } {}^{\forall}\chi \ \text{ s.t. } \chi(-1)=-1$$

なる同値関係が、やはり Chowla, 岩沢などによって知られている。また、簡単な計算により、$\chi(-1)=-1$ なる χ に対し

$$(*) \qquad \sum_{a=1}^{p-1}(-1)^a\chi(a)\neq 0 \iff \sum_{a=1}^{p-1} a\chi(a)\neq 0$$

の成立することが分る。

整数論的に重要な意味を持つ $L(1,\chi)\neq 0$ の証明は、通常、複素解析を用いて、あるいは類体論より導かれる。そこで、この $L(1,\chi)\neq 0$ の初等的証明が大変好ましいのであるが、今のところまだ完成されていない。その目的のためには (*) を示せば良いのだが、ここでは、(*) の左辺を、p に制限をつけた上で、全く初等的に示す。

ζ を1の原始 n 乗根とする。$\zeta^n=1$。これを fix する。$a_0,\cdots,a_{n-1}\in\mathbb{Z}$ に対し、$\sum_{i=0}^{n-1}a_i\zeta^i=0$ なる関係を polygon と名付ける。それを $\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\rangle$ と表わす。　　　　これを、単位円周上の正 n 角形の頂点に重さ $a_0,\cdots,a_{n-1}$ を付けたものと解釈する。原点の回りで釣り合っていると考えてよい。a_i のうち丁度 m 個 $(m|n)$ だけが0と異なるとき、regular m-gon と呼ぶ。また、primitive p-gon とは regular p-gon（p は素数）であり各 a_i が全て1又は全て -1 なるものとする。

Shoenberg と Mann は次を証明した。

(Th.) 任意の polygon は primitive p-gon 達の整係数一次結合である。

さて、以下で、n は偶数とし、その素因子分解を、

$n = 2^a p_1^{b_1} \cdots p_s^{b_s}$ とする。もう一つだけ定義を。

polygon $\langle a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \rangle$ が

skew symmetric とは、$a_i = -a_{i+\frac{n}{2}}$ for $i = 0, \cdots, \frac{n}{2}-1$

unitary とは、$a_i = \pm 1$ for $i = 0, \cdots, n-1$

すなわち、skew-symmetric とは、原点を通る対角線上で異なる符号（絶対値は同じ）を持つということ。この時次が成立する。ただし証明を与えたのは $s = 1$ および 2 だけ。

(Th.) skew symmetric, unitary n-gon は、primitive p_i-gon 達の disjoint sum で書ける。

証明は円分体の理論を少し用いる他は全く初等的である。
また、次の Th. を $s = 1$ の時だけに示した。

(Th.)

$$\sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a \chi(a) = 0 \qquad (\text{ただし } \chi \text{ は } 1:1 \text{ で } \chi(-1) = -1)$$

（もちろんこれは、skew symm, unitary $p-1$ gon である）
は primitive p_i-gon 達の disjoint sum として書き表わすことが出来ない。

(Cor) $\sum_{a=1}^{p-1} (-1)^a \chi(a) \neq 0$ if χ is 1:1, $\chi(-1) = -1$