数理解析研究所講究録
第335巻 1978年 14-32

ゆるやかに断面の変化する みぞの中の粘性流体の流れ

慶大物理　松信八十男

§1 序　断面が一様である直管内の定常流は，Poiseuille 流に代表されるように，きわめて単純であり完全に理解されていると見てよい。これに反して，断面が一様でない管の中の流れを解析的に調べることは非常に困難であり，慣性の効果を正しく評価することは事実上不可能に近い。

本報告では，壁面が中心軸に関して対称であり，しかも空間的にゆるやかに変化するが，その形状が任意に与えられた場合のみぞの中の2次元定常流を解析することを試みる。方法として注目すべき点は，流れの諸量を適当な超球多項式（または Gegenbauer の多項式）を用いて展開することにある。2次元定常流の場合，この展開により，対称条件，境界条件，および流量が場所によらず一定であるという条件をはじめにすべて満足させることができる。以下，断面変化が十分ゆるやかであるが，Reynolds 数が有限である管内流れを，この方

法によって決定する。

§2. 解析の方法

みぞの断面は，たとえば図1に示すようにx軸に関して対称であって，$y=\pm Hh(kx)$ で与えられるものとする。ここで H は流路の半幅の代表値，k は断面が非一様である領域の特性的長さの逆数である。また $h(kx)$ は x について任意回微分できる関数である。以下の解析では無次元パラメータ

$$\kappa = kH \tag{2.1}$$

を微小量と考える。$\kappa\to 0$ の極限では流れは平面Poiseuille流に帰すものとする。

さて，変換 $\xi = kx$，$\eta = y/Hh(kx)$ (2.2)

によって，空間座標 (x,y) を無次元化しよう。そうすれば，流れの領域は $-1\leq\eta\leq 1$ に写像される。これから

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\kappa}{H}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{h'}{h}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{Hh}\frac{\partial}{\partial\eta}\end{aligned}\right\}\ (2.3)$$

となることを用いて，流体のNavier-Stokes方程式を書きかえる（$'$ はξ微分を表わす）：

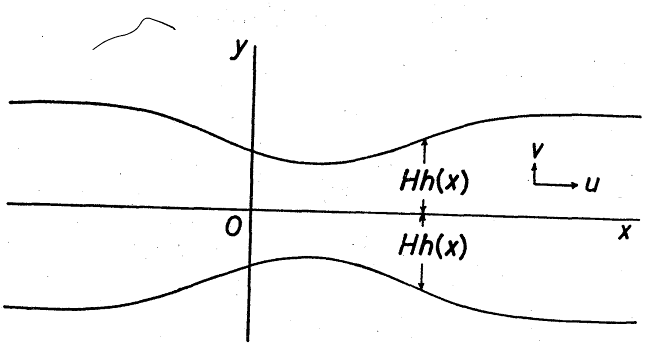

図1．定義図。みぞの形は1例を示す。

$$\frac{\kappa}{h}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)=\frac{\nu}{h^2}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+\kappa^2h^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{h'}{h}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\omega\right] \tag{2.4}$$

$$\omega=-\frac{1}{H^2h^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\kappa^2h^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{h'}{h}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\psi\right] \tag{2.5}$$

ただし，ψは流れの関数，ωは渦度である。境界条件として粘着および流量一定の条件

$$\eta=\pm 1 \quad で \quad \psi=\pm Q\ ,\ \ \partial\psi/\partial\eta=0 \tag{2.6}$$

および対称の条件 $\qquad \psi(\xi,-\eta)=-\psi(\xi,\eta) \qquad (2.7)$

を満たさなければならない。Qは流量の半分である。

これらの条件は，ψをつぎのように超球多項式$C_n^q(\eta)$で展開することにより，すべて都合よく満たされる：

$$\psi=-\frac{1}{3}HU\sum_{n=1}^{\infty}h(\xi)A_{2n}(\xi)C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \tag{2.8}$$

ここでUは代表的な速度である。このような展開は超球多項式の直交性のためつねに可能である。$\eta=1$では

$$\psi(\xi,1)=\frac{1}{3}HUh(\xi)A_2(\xi)=Q \tag{2.9}$$

となり， $\qquad A_2(\xi)=\dfrac{3Q}{HU}\dfrac{1}{h(\xi)}$

となって，(2.8)の展開第1項はただちに決定できる。とくにUとして，流量$2Q$，幅$2H$の2次元 Poiseuille 流の中心速度をとれば，$Q=2HU/3$となるので上式は簡単に

$$A_2(\xi)=2/h(\xi) \tag{2.10}$$

と書くことができる。

式 (2.8) を η について微分すれば,

$$(d/d\eta)\ C_n^{q}(\eta) = 2q\,C_{n-1}^{q+1}(\eta)$$

の関係が成立するので*

$$\partial\psi/\partial\eta = HU\sum_{n=1}^{\infty} h(\xi)A_{2n}(\xi)\,C_{2n}^{-1/2}(\eta)$$

が得られる。$C_{2n}^{-1/2}(\eta)$ は η の偶関数であり, $n \geq 2$ に対して, つねに $C_{2n}^{-1/2}(\pm 1) = 0$ となるので, (2.6) の後の条件も自動的に満たされる。そればかりでなく,

$$u = \partial\psi/\partial y = U\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}(\xi)\,C_{2n}^{-1/2}(\eta) \qquad (2.11)$$

における展開第1項は, $C_2^{-1/2}(\eta) = \frac{1}{2}(1-\eta^2)$ となること, すなわち2次元 Poiseuille の速度分布であることを考慮すると, 第2項以下はそれに対する補正となっていることがわかる。

速度の y 成分 v, および渦度 ω なども, 超球多項式の諸公式を用いることによって以下のように求めることができる。結果をまとめて示すと,

$$v = \kappa U\sum_{n=1}^{\infty} B_{2n+1}(\xi)\,C_{2n+1}^{-1/2}(\eta) \qquad (2.12)$$

$$\omega = \frac{U}{H}\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi)\,C_{2n-1}^{1/2}(\eta) \qquad (2.13)$$

$$\nabla^2\omega = \frac{3U}{H^3}\sum_{n=1}^{\infty} N_{2n-1}(\xi)\,C_{2n-1}^{5/2}(\eta) \qquad (2.14)$$

ただし,

$$B_{2n+1}(\xi) = \frac{2nh'A_{2n} - hA_{2n}'}{4n-1} + \frac{(2n+1)h'A_{2n+2} + hA_{2n+2}'}{4n+3} \qquad (2.15)$$

---

*超球多項式に関する諸公式は, たとえば文献 1), 2) を参照。

$$\Omega_{2n}(\xi) = \frac{1}{h}\left(A_{2n} + \kappa^2 D_{2n}\right) \tag{2.16}$$

$$D_{2n}(\xi) = \frac{(2n-1)h' B_{2n-1} - hB'_{2n-1}}{4n-3} + \frac{2nh' B_{2n+1} + hB'_{2n+1}}{4n+1} \tag{2.17}$$

$$N_{2n-1}(\xi) = \frac{1}{h^2}\Omega_{2n+2}(\xi) + \kappa^2 Z_{2n+2}(\xi) \tag{2.18}$$

$$Z_{2n+2}(\xi) = \frac{h\Phi'_{2n+1} - (2n-1)h'\Phi_{2n+1}}{(4n+1)h} \quad \frac{h\Phi'_{2n+3} + (2n+4)h'\Phi_{2n+3}}{(4n+5)h} \tag{2.19}$$

$$\Phi_{2n+1}(\xi) = \frac{h\Omega'_{2n} - (2n-1)h'\Omega_{2n}}{(4n-1)h} - \frac{h\Omega'_{2n+2} + (2n+2)h'\Omega_{2n+2}}{(4n+3)h} \tag{2.20}$$

これらの関係を式(2.4)に代入する。このときReynolds数Rを

$$R = \frac{HU}{\nu} = \frac{3}{2}\frac{Q}{\nu} \tag{2.21}$$

によって定義すると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_{2n-1} C_{2n-1}^{5/2}(\eta) = \frac{1}{3}\kappa R \left[\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega'_{2n} C_{2n-1}^{1/2}(\eta) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} C_{2n}^{-1/2}(\eta) \right\} + \frac{1}{3h} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (hA_{2n})' C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n} C_{2n-2}^{3/2}(\eta) \right\} \right] \tag{2.22}$$

が得られる。ただし，右辺第2項で(2.10)が考慮されている。(2.22)の左辺は粘性項を，右辺は慣性項を表わす。注目すべきことは，Rは断面変化のゆるやかさを表わすパラメーターκとの積の形で現われている点である。このことから，Rが十分大きくても，κが適当に小さければ，κRについての摂動近似が可能であることを意味する。

そこで，h以外のξの関数をすべて

$$F(\xi) = F^{(0)}(\xi) + \kappa R F^{(1)}(\xi) + (\kappa R)^2 F^{(2)}(\xi) + \cdots\cdots \tag{2.23}$$

のように展開できるものと仮定しよう。そして，次数nが増すにつれて展開係数 A_{2n}, Ω_{2n} は十分速かに小さくなることを期待する。そうすれば，(2.22)の右辺にある各級数を適当に打切り，$C_{2n-1}^{5/2}(\eta)$ を使って展開しなすことにより，係数間の関係式を導くことが可能となる。

§3 第0近似（Stokesの解）

まず，$R=0$ のときの解，すなわちStokes流を求めておこう。解くべき方程式は

$$N_{2n-1}^{(0)} = \frac{1}{h^2}\Omega_{2n+2}^{(0)} + \kappa^2 Z_{2n+2}^{(0)} = 0 \quad (n \geq 1) \qquad (3.1)$$

および(2.15)～(2.20)の対応する方程式である。κが小さいとして

$$\left.\begin{aligned} A_2^{(0)} &= a_0^{(2,0)} \\ A_4^{(0)} &= \kappa^2 a_2^{(4,0)} + \kappa^4 a_4^{(4,0)} + \cdots \\ A_6^{(0)} &= \kappa^4 a_4^{(6,0)} + \cdots \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

$$\left.\begin{aligned} \Omega_2^{(0)} &= \omega_0^{(2,0)} + \kappa^2\omega_2^{(2,0)} + \kappa^4\omega_4^{(2,0)} + \cdots \\ \Omega_4^{(0)} &= \kappa^2\omega_2^{(4,0)} + \kappa^4\omega_4^{(4,0)} + \cdots \\ \Omega_6^{(0)} &= \kappa^4\omega_4^{(6,0)} + \cdots \\ &\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

のように展開する（他の係数 B_{2n+1}, D_{2n}, … なども同様）。

そうすれば κ^2 について低次の項から順次決定される。結果を以下に示す：

$$
\left.
\begin{aligned}
&a_0^{(2,0)} = \frac{2}{h}, \qquad a_2^{(4,0)} = \frac{4}{5}\left(h'' - 4\frac{h'^2}{h}\right), \\
&a_4^{(4,0)} = \frac{2}{75}\left(h^2 h^{iv} - 12hh'h''' - 15hh''^2 + 6h'^2h'' + 72h'^4/h\right) \\
&a_4^{(6,0)} = -\frac{2}{105}\left(h^2 h^{iv} - 16hh'h''' - 12hh''^2 + 120h'^2h'' - 120h'^4/h\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (3.4)
$$

....

$$
\left.
\begin{aligned}
&\omega_0^{(2,0)} = \frac{2}{h^2}, \quad \omega_2^{(2,0)} = \frac{2}{5}\left(\frac{h''}{h} + \frac{h'^2}{h^2}\right), \quad \omega_2^{(4,0)} = \frac{2}{5}\left(\frac{h''}{h} - \frac{4h'^2}{h^2}\right) \\
&\omega_4^{(2,0)} = \frac{4}{175}\left(hh^{iv} - 2h'h''' - 5h''^2 - 34h'^2h''/h - 8h'^4/h^2\right) \\
&\omega_4^{(4,0)} = -\frac{2}{225}\left(hh^{iv} + 8h'h''' + 15h''^2 - 24h'^2h''/h - 48h'^4/h^2\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (3.5)
$$

$$
\omega_4^{(6,0)} = a_4^{(6,0)}/3h
$$

ここで h^{iv} は ξ についての4階微分を表わす．

とくに中心軸上 $(\eta=0)$ における軸速度および壁面 $(\eta=1)$ における渦度は

$$
\begin{aligned}
\frac{u(\xi,0)}{U} = \frac{1}{h} - \frac{\kappa^2}{10}\left(h'' - 4\frac{h'^2}{h}\right) - \frac{\kappa^4}{4200}\bigl(&19h^2h^{iv} - 248hh'h''' \\
&- 270hh''^2 + 684h'^2h'' + 408h'^4/h\bigr) + O(\kappa^6) \quad (3.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{H}{2U}\,\omega(\xi,1) = &\frac{1}{h^2} + \frac{\kappa^2}{5}\left(2\frac{h''}{h} - 3\frac{h'^2}{h^2}\right) \\
&+ \frac{\kappa^4}{525}\left(2hh^{iv} - 4h'h''' - 45h''^2 - 348h'^2h''/h + 264h'^4/h^2\right) + O(\kappa^6) \\
&\hfill (3.7)
\end{aligned}
$$

となる。圧力勾配 $\partial p/\partial x$ は Stokes の運動方程式からつぎのように求まる：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu\frac{\partial \omega}{\partial y} = -\mu\frac{U}{H^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{h}\Omega_{2n}C_{2n-2}^{3/2}(\eta) \tag{3.8}$$

これから，中心軸上の圧力勾配は

$$-\frac{H^2}{\mu U}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\eta=0} = \frac{2}{h^3} - \frac{\kappa^2}{5}\left(\frac{h''}{h^2} - 14\frac{h'^2}{h^3}\right) + \frac{\kappa^4}{700}\left(17h^{iv} + 176\frac{h'h'''}{h} + 160\frac{h''^2}{h} - 1768\frac{h'^2h''}{h^2} - 424\frac{h'^4}{h^3}\right) + O(\kappa^6) \tag{3.9}$$

となる。圧力そのものの値は(3.9)を数値積分すれば得られる。注意すべき点は，管断面にわたって圧力が一定と見なせるのは（3.8）の展開式の第1項まで，すなわち $O(\kappa)$ の範囲までである。

上記の κ^2 展開による Stokes の解の精度を見るために，$h = \xi$ で表わされるくさび型領域内の発散流に対する Stokes の厳密解[3)]と比較してみよう。くさびの半頂角を θ_0 とすると，$\kappa = \tan\theta_0$ である。図2は中心軸上の速度を，図3は壁面上の渦度を図示したもので，実線は Stokes の厳密解，破線は κ^2 展開の第2次近似解，鎖線は第0近似解，すなわち準 Poiseuille の解を表わす。これらの図から，第2近似解は $\theta_0 = 45°$ のあたり（$\kappa \doteqdot 1$）までかなりの精度を保っているが，第0近似解はそれよりずっと小さい θ_0 の値で厳密解からはずれ始めることがわかる。

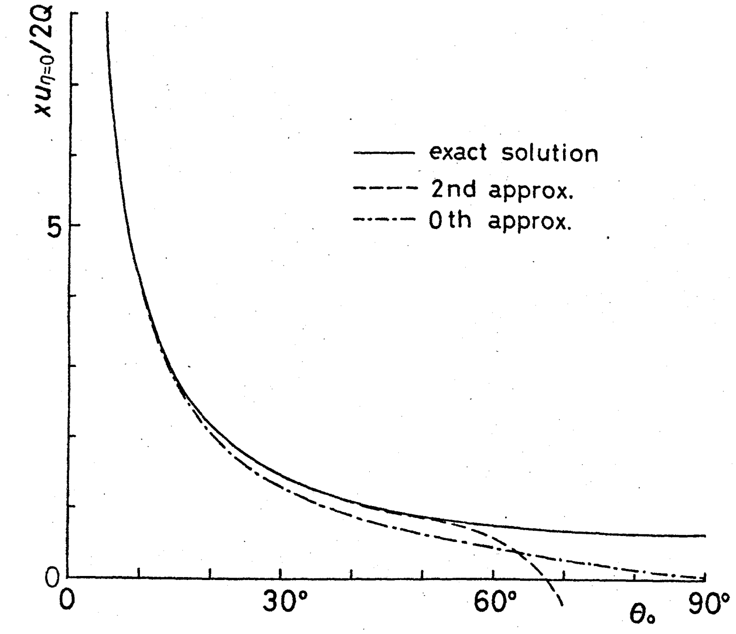

図2 くさび型領域内のStokes流の中心速度。xは頂点から測った距離。

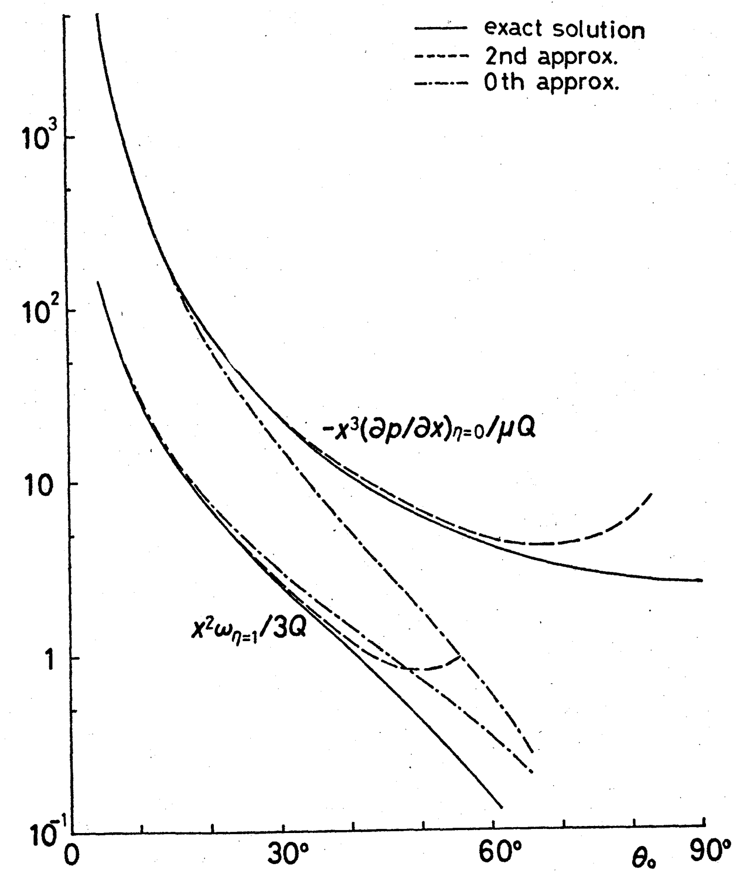

図3. くさび型領域内のStokes流に対する中心軸上の圧力勾配と壁面上の渦度.

もう1つの例として，壁面の形が

$$h(\xi)=1-\beta e^{-\xi^2/2} \qquad (3.10)$$

で与えられる場合を考える。βは定数で，$0<\beta<1$はくびれのある溝を，$\beta<0$は部分的に膨みのある溝を表わす。簡単のため，前者を狭窄管，後者を膨脹管とよぶことにする。

(3.10)およびその微係数を(3.4)および(3.5)に入れ，溝のくびれおよび膨みの効果を評価する。$\beta=0.5$の狭窄管に対する結果を図4に示す。この場合，第0近似が十分大きく，また狭窄部の効果は$|\xi|\geq 3$以上にはほとんど伝わらないことがわかる。事実，第0近似と第2近似の間には，中心軸上の速度と壁面上の渦度に関する限り，それ程目立った差はない（図5参照）。

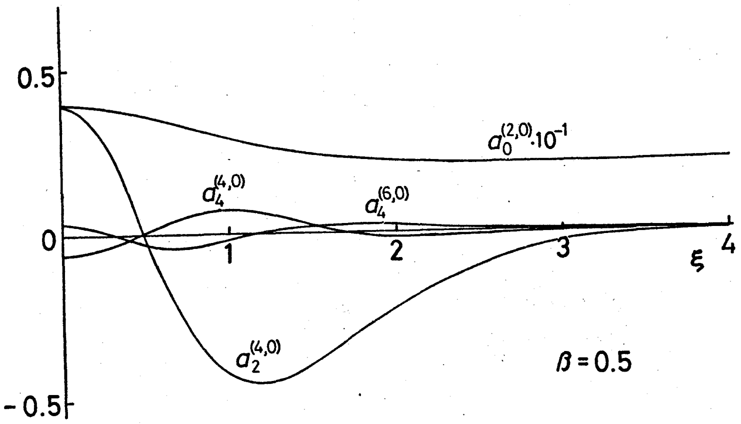

図4. 狭窄管の中のStokes流の解。$\beta=0.5$のときのκ^2展開の係数を示す。$a_0^{(2,0)}=2/h$は縦方向に1/10に縮めてある。

図5は，軸上の圧力降下を(3.9)を数値積分して求めた結果である。縦軸は$(kH^2/\mu U)p(\xi,0)$であり，$\xi=0$で$p=0$となるように積分定数を選んだ。この図から，局所的に狭窄

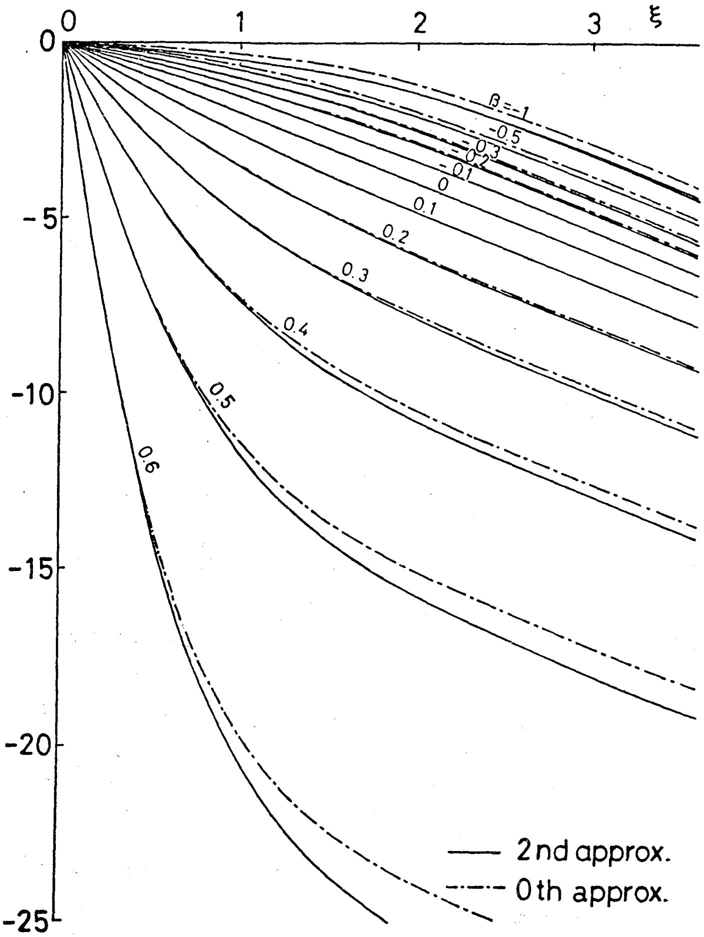

図5. 狭窄流または膨張流における中心軸上の圧力降下 $(kH^2/\mu U)\,p(\xi,0)$。$\xi=0$ で $p=0$ としてある。

または膨張部が存在するために生じる余分の圧力損失を β の関数として求めることができる。それを図13に示す。この付加的圧力損失は膨張管 $(\beta<0)$ で β の変化に対して鈍感であるが，狭窄管 $(\beta>0)$ では β の増加とともに急速に増加することがわかる。

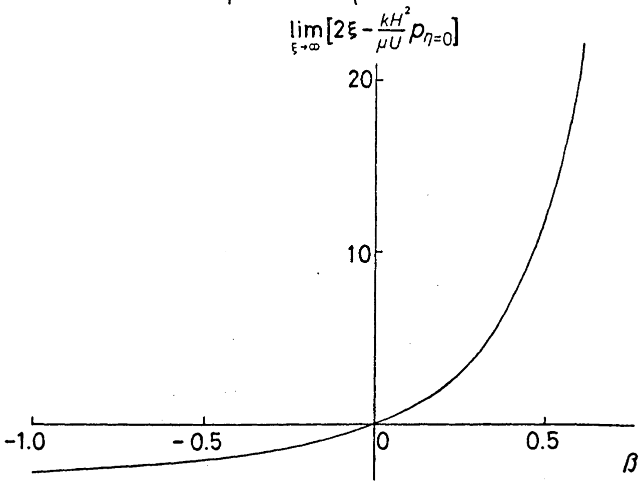

図6. 同じく狭窄度 β に対する付加的圧力損失の変化。$\beta<0$ は膨張流に対応する。

§4. Reynolds数の大きいときの漸近解

前節までの結果では，$R=0$ の Stokes流をくわしく議論した。そして超球多項式による展開が，任意に与えられた境界壁をもつ2次元流の解析に対して有力であることを知った。この節では，慣性の効果が加わったときの溝の中の流れを調べてみよう。

流れの量をすべて(2.23)のように $\varepsilon=\kappa R$ のべキ級数に展開し，(2.22)の ε 展開の式を逐次に解いてゆけば望みは達せられる。その方法は前節のと本質的に異ることはないが，計算は飛躍的に面倒となる。そこで，本節では $\kappa \ll 1$ であるとして $O(\kappa^2)$ を無視するが，ε が0でない有限な値にとどまるような十分大きな Reynolds数の流れを考えよう。

さて，$\kappa \doteqdot 0$ のとき，(2.16)と(2.18)から

$$A_{2n}=h\Omega_{2n}, \qquad N_{2n-1}=\Omega_{2n+2}/h^2 \tag{4.1}$$

を得る。とくに(2.10)から $\cancel{A_2}=2/h$ であるから $\Omega_2=2/h^2$ である。さらに，簡単のため

$$\left.\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}C_{2n}^{-1/2}(\eta) &\doteqdot A_2C_2^{-1/2}(\eta)=(1-\eta^2)/h\\ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}C_{2n-2}^{3/2} &\doteqdot \Omega_2=2/h^2\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

を仮定する。このような仮定の当否は結果から判断されるであろう。

これらの関係を(2.22)に入れ，両辺に h^2 を乗ずると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n+2} C_{2n-1}^{5/2}(\eta) = \varepsilon \left[\frac{h}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}' \cdot (1-\eta^2) C_{2n-1}^{1/2}(\eta) + \frac{2}{9h} \sum_{n=2}^{\infty} (h^2 \Omega_{2n})' C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \right] \tag{4.3}$$

が得られる。 $(1-\eta^2)C_{2n-1}^{1/2}$, $C_{2n+1}^{-3/2}$ は超球多項式の漸化式を用いれば $C_{2m+1}^{5/2}(\eta)$ で表わすことができるので，それらを (4.3) に入れ，$C_{2n-1}^{5/2}$ の係数を等しいと置くと，

$$\Omega_4 = \varepsilon h \left[\frac{2}{45} \Omega_2' - \frac{2}{495} \left\{ 9\Omega_4' - \frac{2}{h^2}(h^2\Omega_4)' \right\} + \frac{2}{6435} \left\{ 45\Omega_6' - \frac{4}{h^2}(h^2\Omega_6)' \right\} + \cdots\cdots \right]$$

$$\Omega_6 = \varepsilon h \left[-\frac{2}{315} \Omega_2' + \frac{2}{4095} \left\{ 27\Omega_4' - \frac{4}{h^2}(h^2\Omega_4)' \right\} - \frac{2}{4095} \left\{ 27\Omega_6' - \frac{2}{h}(h^2\Omega_6)' \right\} + \cdots\cdots \right]$$

.....

となる。初項 Ω_2 は ε^0 のオーダーの既知関数であるから，上式から逐次に $\Omega_4, \Omega_6, \cdots$ を決定することができる。$O(\varepsilon^2)$ までの結果は

$$\Omega_4 = -\frac{8\varepsilon}{45} \frac{h'}{h^2} + \frac{32\varepsilon^2}{675675} \left(113 \frac{h''}{h} - 288 \frac{h'^2}{h^2} \right) - \cdots\cdots \tag{4.4}$$

$$\Omega_6 = \frac{8\varepsilon}{315} \frac{h'}{h^2} - \frac{32\varepsilon^2}{429975} \left(31 \frac{h''}{h} - 72 \frac{h'^2}{h^2} \right) + \cdots\cdots \tag{4.5}$$

$$\Omega_8 = \frac{32\varepsilon^2}{2297295} \left(36 \frac{h''}{h} - 79 \frac{h'^2}{h^2} \right) - \cdots\cdots \tag{4.6}$$

$$\Omega_{10} = \frac{-32\varepsilon^2}{11486475} \left(10 \frac{h''}{h} - 21 \frac{h'^2}{h^2} \right) + \cdots\cdots \tag{4.7}$$

§5. 剥離の生ずる条件

前述の結果を用いて，壁面で流線が剥離する条件および剥

離点の位置を求めることができる。この種の研究はかなり古く，1910 年の Blasius[4] まで遡ることができる。Blasius は境界の形を指数曲線で表わし，それを1次曲線で近似して逆流の生ずる kR の臨界値を 13.1 と評価した．指数曲線といっても，実質的には直線壁で囲まれたくさび型の発散流と同じである。

このくさび型の2次元発散流（または収束流）の研究は，その後まもなく Jeffrey (1915)[5] および Hamel (1917)[6] によって Navier-Stokes 方程式が厳密に解かれたことにより，活発になった。くさびの半頂角を前と同じく θ_0 ととると，逆流が生ずるときの $\theta_0 R$ の臨界値は図7に示すように，$R \to \infty$ で 7.069 となる*。Blasius の求めた値はこれに比べて大きすぎる。

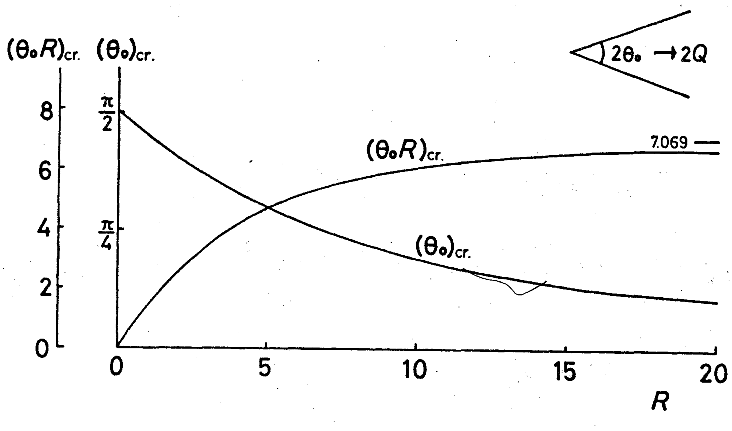

図7. くさび型の発散流で逆流が生ずるための θ_0 および $\theta_0 R$ の臨界値。* $\theta_0 > (\theta_0)_{cr.}$ で逆流が生じる。

* 図7およびこの値は，Rosenhead (1963, p.144)[7] の解説を参考にして筆者が Jeffrey-Hamel の厳密解から計算しなおしたものである。

その後，Abramowitz (1949)[8] は Blasius の方法を改良して，逆流の生ずる ε の漸近値を 9.24 と求めた。Blasius は $O(\varepsilon)$ まで考慮したのに対し，Abramowitz の値は $O(\varepsilon^2)$ の項まで含めた結果である。しかし，これらの研究は直線的な発散流を対象としているので，剥離点の位置を決定する目的にそぐわない。

さて，境面の形が任意であるとして剥離の有無を調べるには，壁面渦度の符号が変化するところ，すなわち，(2.13) より

$$\omega(\xi, 1) = \frac{U}{H}\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_{2n}(\xi)\,C_{2n-1}^{1/2}(1) = \frac{U}{H}\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_{2n}(\xi) = 0 \qquad (5.1)$$

となる ξ の値 ξ_s が存在するかどうかを調べればよい。前節の結果 (4.4)～(4.7)，および同様にして求めた $O(\varepsilon^3)$ の結果を (5.1) に入れると

$$\frac{H}{2U}h^2\omega(\xi,1) = 1 - \frac{8\varepsilon}{105}h' + \frac{16\varepsilon^2}{363825}(40hh'' - 106h'^2)$$
$$- \frac{128\varepsilon^3}{165540375}(221h^2h''' - 1474hh'h'' + 1464h'^3) = 0 \qquad (5.2)$$

とくに，$h = \xi$ のくさび型発散流では

$$1 - \frac{8\varepsilon}{105} - \frac{1696}{363825}\varepsilon^2 - \frac{124928}{165540375}\varepsilon^3 = 0 \qquad (5.3)$$

となる。$O(\varepsilon^2)$ を無視すると $\varepsilon = 105/8 \doteqdot 13.1$ となって Blasius の結果となり，$O(\varepsilon^3)$ を無視すると，$\varepsilon = 8.600$ となり，これは Abramowitz の結果 9.24 よりも厳密な値 7.069 に近い。さらに $O(\varepsilon^3)$ まで考慮すると，$\varepsilon = 6.918$ となって近似の精度はさ

らに改善されることがわかる。

以下（5.2）を用いて 2, 3 の例につき剥離または再付着の有無を調べてみよう。まず，§3 で論じた狭窄（または膨張）部のあるみぞ，すなわち（3.10）を考えよう。図 8 は $\beta=0.5$，$\varepsilon=5, 10$ に対する壁面渦度 $(H/2U)\,\omega(\xi,1)$ と ξ の関係を示す。

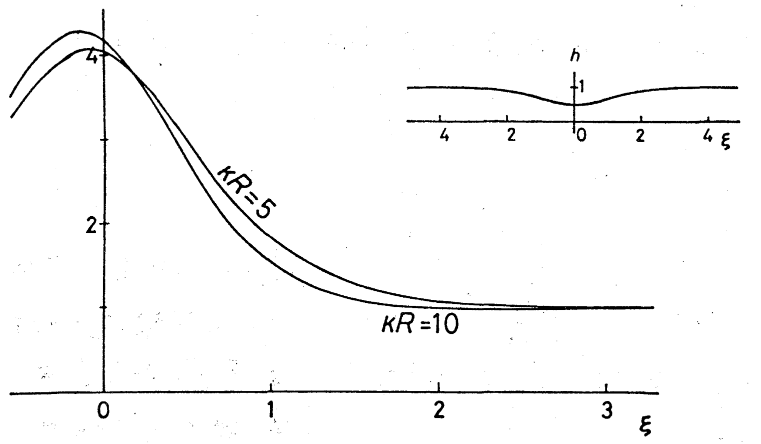

図 8．$\beta=0.5$ の狭窄流に対する壁面渦度分布。挿入図はみぞの上半分の形を示す。

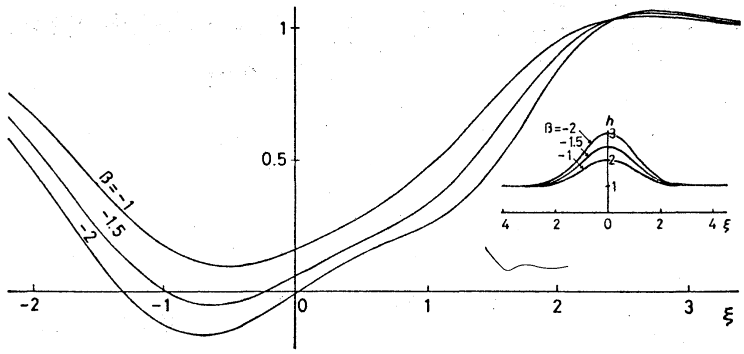

図 9．$\beta=-1, -1.5, -2$；$\kappa R=10$ の膨張流に対する壁面渦度分布。$\beta=-1.5, -2$ で剥離と再付着が生ずる。

この場合，$\varepsilon=\kappa R=10$ 程度では逆流は全く起こりそうもない。狭窄部を過ぎたあたり（$\xi\fallingdotseq1.5$）で無限遠における値（=1）より幾分小さくなる程度である。Stokes 流の場合と著るしく異るのは，壁面渦度が最大になる位置が中心（$\xi=0$）より上流側に寄ることである。これらの傾向は β を増してもそれほど変

化しない。

ところが，図9が示すように，$\beta<0$ の膨張管では，$|\beta|$をある値以上にすると剥離と再付着が生じる。すなわち，局所的な逆流領域が現れる。また，膨張部の終わりのあたりで，渦度は無限遠における値よりも幾分増加すること，および，対称性が図8よりもさらに大きく破れることに注目する必要があろう。

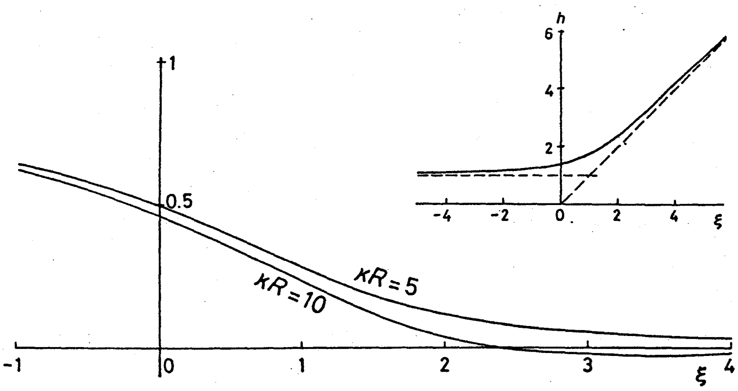

図10、双曲型の壁面をもつ発散流に対する壁面渦度分布。剥離点が1つだけ存在する。挿入図の破線は漸近線である。

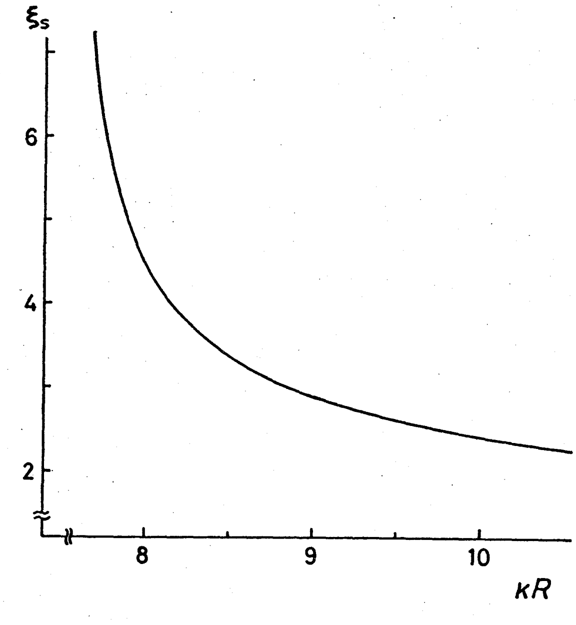

図11. 図10の流れに対する剥離点の位置 ξ_s と κR との関係。

もう1つの例として曲線壁で囲まれた発散流を考えよう。境界の形は，双曲線

$$h(\xi)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\xi^2-2\xi+3}+\xi+1\right]$$

で与えられるものとする。結果は図10に示される。壁面渦度は下流にゆくにつれて単調に減少し，ある点 ξ_s で剥離を生じる。ξ_s は R の増加とともに上流側に移動することが図11からわかる。

本報告では，$R=0$，$\kappa\neq 0$ の Stokes の極限の解と，$\kappa=0$ で $\kappa R\neq 0$ の漸近解の両極端について，みぞの中の2次元定常流を議論した。実際にはその中間の状態について議論しなければならないことの方が多いであろうが，壁面の非一様性が流れにおよぼす効果の，おおその傾向を知るにはこの両極端の解析で一応十分であろう。

解析の手段として超球多項式による展開を利用したが，これは2次元定常流に対しては有力である。なぜなら，初めに対称条件，すべりなしの条件，流量一定の条件をすべて都合よく考慮することができ，しかも Poiseuille の解からのずれを摂動近似によって逐次に決定することが可能だからである。

本研究を行うに当って，慶応義塾大学川口光年教授に貴重な助言を頂いた。また，昭和52年度文部省科学研究費（一般

研究Bおよび総合研究A）から資金の援助を受けた。ここに感謝の意を表する。また，口頭発表の機会を与えて下さった京都大学数理解析研究所にも御礼申しあげる。

文　献

1) Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (eds.) (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publ. Inc., N. Y.

2) 森口・宇田川・一松 (1964). 数学公式III，岩波全書.

3) 今井 功 (1973). 流体力学，前篇，裳華房，p344.

4) Blasius, H. (1910). Zeit für Math. u. Phys. 58, 225.

5) Jeffrey, G. B. (1915). Phil. Mag. (6), 29, 455.

6) Hamel, G. (1917). Jber. dtsch, Matver. 25, 34.

7) Rosenhead, L. (ed.) (1963). *Laminar Boundary Layers*, Oxford Univ. Press, Oxford.

8) Abramowitz, M. (1949). J. Math. Phys. 28, 1.