数理解析研究所講究録
第335巻 1978年 82-103

収束性の良い級数解の求め方

宇都宮大 教養部 徳田尚之

§1. はじめに

工学，物理学等の多くの重要な問題の解法として級数解は非常にひんぱんに用いられている解法の一つである。ことに求まった級数の収束半径内では，この級数解は問題の厳密解を与えられることもあり，古くから盛んで使われて来た大変に強力な方法である。しかし，一般的には発散してしまい厳密解は与えないが最初の数項だけをとると求める関数の可成り正確な近似を与える漸近展開級数と比較すると，この'厳密な'級数解は一般的には非常に収束速度が遅く，相当多数の項数を計算しないと良い近似の得られないことが非常に多い。ことに高次の項の計算に要する労力はたちまちのうちに膨大なものになる場合が多く，いかに計算機を使うといっても余りに多い項数の計算は実用的ではない。したがって出来るだけ少い項数で良い近似が得られることが望ま

しい訳である。このため級数解の収束速度を改善する方法が古くから研究されている。たとえば，Shanks変換，連分数展開，Pade展開などはその最も代表的な成功例であろう。この級数の収束速度の改善方法についての最近までの展望は Van Dyke（1974）に詳しい。また電子計算機での数値計算法とも関連して最近でのPade 展開理論の発展も目覚ましく，これについてはBaker(1974)の著書に詳わしい。

さて，この論文では，これまでの方法とは違う全く新らしい級数展開のスキームを紹介することにしたい。まずある解析関数 $f(z)$ を級数展開で近似することを考えてみよう。こゝで z は複素数である。もし $f(z)$ が原点の近傍で正則であれば，

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \quad |z|<R_0 \qquad (1.1)$$

こゝで R_0 はある正の数で収束半径である。つま $a_1 \neq 0$ の場合を考えることにしよう。もし $a_1 = 0$ のときには，(2.14)式の所を参照して頂きたい。 いま $f(z)$ のある偏角領域($\arg z$)での $|z| \to \infty$ の振舞いが次の如く判っているとしよう。

$$f(z) \sim C_\infty + o(1) \qquad |z| \to \infty \qquad (1.2)$$

こゝで C_∞ は定数で，$o(1)$ は1に較べて小さいことを表わすオーダー記号である。 C_∞ は z の関数でもよいが，こゝでは簡単のため定数としておこう。

これまでの級数解と違う，本級数解の骨子は関数の展開近似を行う前に近似すべき(従属)関数 f と(独立)変数 z を，ともに一般的には非線形な次の様な変換で新らしい"汎関数"(注) $j(f)$ と"独立変数" τ に変換することにある。

1．汎関数 $j(f)$ の導入．

式(1.1),(1.2)で定義された a_0, c_∞ を使い，f についての一次関数で次の様な汎関数 $j(f)$ を定義する．

$$j(f(z)) = \frac{(f(z)-c_\infty)\,z}{f(z)-a_0} \qquad (1.3)$$

2．独立変数 τ の導入．

$$\tau(z) = \frac{zf'}{f-a_0} - 1 \qquad (1.4)$$

′ は z についての微分を表す。本法では，(1.1)の f の x での展開を，より収束性の良い $j(f)$ の τ での展開に変換し，最終的には(1.4)から関数 f を近似してゆく。(1.3)の $j(f)$ は(2.15)で示す様に一般的には f について N 次の有理関数となり，従って非線形変換になるし，(1.4)式もその中に近似せんとする f 自体が含まれていることから明らかな様に非線形変換である。f が(1.1)より一般的の場合は(2.14)以下で吟味してあり，ここでは f が(1.1)で表わせる場合のみ吟味しよう。(1.3),(1.4)の変換式は，一見して判る様に f と z について見事な対称性をもっていることは注目に値しよう。　本論文では，$j(f)$ を τ で展開した

(注) 慣用的な"汎関数"という用法ではないが，$j(f)$ は"関数 f により決まる関数"という意味で使っている.

級数がある条件下では収束することを証明する。つぎに，実際いくつかの例題について，この方法を使うと，級数の収束性が著るしく改善されることを示す。

この(1.4)式の変数では，実は非定常境界層の解析でMoore (1951)が導入した無限個の"小さな"パラメーターの内の一番最初に現われるパラメーターと類似していることを指摘しておこう。Mooreが考えたのは半無限平板が時間的にある定った速度$U(t)$で運動する際の境界層の問題であった。実際に非定常境界層方程式を解いていくと，次の様な無限個のパラメーター

$$\tau_1 = \frac{\dot{U}}{U}\frac{x}{U}, \quad \tau_2 = \frac{\ddot{U}}{U}\left(\frac{x}{U}\right)^2, \quad \tau_3 = \frac{\dddot{U}}{U}\left(\frac{x}{U}\right)^3, \cdots \qquad (1.5)$$

が現われ，そしてこれらのパラメーターが小さければ境界層は準定常的な挙動を示し，解は定常なBlasius解からの摂動解として求まることを示した。ここで・は時間微分を示し，xは平板前縁部からの距離である。たとえば，もし$U \propto At^n$ $n>0$ の様に変化すれば，$\tau_1 = O(x/t^{n+1})$, $\tau_2 = O(x^2/t^{n+2})$, $\cdots$ となり，$x=O(1)$でさえあれば，これらのパラメーターは$t\to\infty$では小さな値をとることが判ろう。しかし，この様にして求めた無限個の多変数展開が収束しているかどうかは全く別で勿論証明はされていない。また往々にして(1.5)式のパラメーター群$\{\tau_n\}$は，全部同じオーダーの大きさである

場合も多く，一般的な場合の収束性の証明は不可能と思われる。こゝで注意したいのは，(1.4)のτと(1.5)の最初のパラメーターτ_1が非常によく似ていることである．じつは，著者はこのMooreの方法を相変化問題など(Tokuda 1966, 1968, 1970)で使ってみて，$\{\tau_n\}$シリーズを適当な所で打切っても大変収束性の良い解が求まることに注目した。今回の新らしい級数解はこのMooreの方法に端を発したもので，Mooreの方法では証明出来なかった級数の収束性の証明が与えられたのでこゝに報告する．

§2でその収束の証明を与え，§3では実際の例題をこの方法で解いてその収束性の良いことを示してみよう。

§2. 新らしい級数展開法とその収束性

§1で導入した解析関数 $f(z)$，洞関数 $j(f(z))$，変数 $\tau(z)$ を考えてみよう。$f(z)$ は(1.1)式の如くある範囲で無限級数に展開可能とする。一方(1.3)式で定義された洞関数 $j(f)$ も，$(f-a_0)$の零点の中で $z=0$ のものを除いて次に現われる零点までは解析的であるので，その範囲内では無限級数に展開出来て

$$j(f(z)) = \frac{(f(z)-c_{\infty})z}{f(z)-a_0} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n + \cdots \qquad (2.1)$$

この $j(f)$ と全く同じことは (1.4) 式で定義した τ についても云える。ただし τ の場合は定数の項がなく、

$$\tau(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots , \qquad (2.2)$$

と書ける。この (2.2) 式の様に $b_0 = 0$ の級数を特に概単数級数 (almost unit series) と呼び、二つの関数による合成関数または合成変換を考える際には不可欠な条件の一つである。(詳しくは、Henrici (1974) をみよ)。この (2.2) 式は常に逆変換出来る (Henrici 1974)。

$$z = \hat{\tau}(z) = d_1 \tau + d_2 \tau^2 + \cdots + d_n \tau^n + \cdots \qquad (2.3)$$

逆変換 $\hat{\tau}(z)$ もまた常に概単数級数である。これらのことから、Lagrange - Bürmann の定理を用いて次の定理を証明する。

定理1．　複素平面上で，原点を囲み，しかも式(1.1), (1.3), (1.4) でそれぞれ定義される関数 f, $j(f)$, τ のいずれもその内部及びその上で解析的である様なある閉曲線Cを考えよう．さらに閉曲線上の任意の点 z と，C に囲まれた領域中の任意の点 x をとったときに，上の関数 τ は次の不等式

$$|\tau(x)| < |\tau(z)| \qquad (2.4)$$

を常に満足しているとする。すると函数 $j(f)$ は次の様に τ についての無限級数に展開可能である。

$$j(f(z)) = B_0 + B_1\tau + B_2\tau^2 + \cdots + B_n\tau^n + \cdots \tag{2.5}$$

ただし，
$$B_0 = \frac{a_0 - c_\infty}{a_1} = j(f(0))$$
$$B_n = \frac{1}{n}\,\mathrm{Res}\left[\frac{j'(f(z))}{\tau^n_{(z)}}\right] \quad n \geqq 1 \tag{2.6}$$

こゝで $'$ は z についての微分であり，Res［　］は［　］内の項の留数を表わし，定義により［　］内の項を Laurent 展開したときの z^{-1} の項の係数である。

証明．この証明は一般には Lagrange-Bürmann の定理として知られているもので，上の定理のように f, $j(f)$, τ が共に解析函数であれば Whittaker & Watson (1965) に示してある如く Cauchy の定理を用いて証明出来る。こゝで (2.4) の条件から閉曲線 C 内および C 上での方程式 $\tau(z)=\tau(x)$ の唯一の解は $x=z$ の時 (Whittaker & Watson 1965, p.131) であることに注意すれば Cauchy の定理から

$$j(f(x)) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{j(f(z))\,\tau'(z)}{\tau(z)-\tau(x)}\,dz \tag{2.7}$$

つまり $$\frac{1}{\tau(z)-\tau(x)} = \frac{1}{\tau(z)}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^n(x)}{\tau^n(z)}\right] \tag{2.8}$$

であることに注意すれば

$$j(f(x)) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{j(f(z))\tau'(z)}{\tau(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\tau^n(x)\oint_C \frac{j(f(z))\tau'(z)}{\tau^{n+1}(z)}dz$$

$$= j(f(0)) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^n(x)}{n} Res\left[\frac{j'(f(z))}{\tau^n(z)}\right] \qquad (2.9)$$

証明終り

定理1の成り立つ範囲は(2.4)を含め定理の条件を満たす閉曲線Cに囲まれている領域であるのは当然である。関数τの値が複素平面全域で与えられていれば，その様なCを描いてその範囲を決定するのは容易であるが，実際な物理的理由から関数値が実数軸上；それも往々に正の領域でのみしか与えられていない場合が多い。例えば§3の例題5をみよ。この様な場合も，実軸上で$|\tau(a)|=|\tau(b)|=M$ (M定数), $ab<0$ を満たす二点a, bが求まり，しかも閉区間$[a,b]$で$\tau(x)$が単調増加（又は減少）しているとしよう。この関数を複素平面に拡張した場合には，a, bを通り$|\tau(z)|=M$を満たし，特異点を避ける閉曲線が描けるだろう。この様にして得た閉曲線Cは，$\tau(z)$がその内部で解析的であることから最大値原理により$\tau(z)$はC上で最大値をとる。よってこのCは定理1の条件を満たす。§3の例題で実軸上で$|\tau(x)|$の単調増加している区間を記録しているが，実は本展開法で求めた級数展開がこの実軸上の区間は勿論もっと広い複素平面上で成り立っていることに注意願いたい。

次の様な下付添字でn項までの部分級数和を表わすことにしよう。

$$j_n(f(z)) = B_0 + B_1\tau + B_2\tau^2 + \cdots + B_n\tau^n \qquad (2.10)$$

一方，n 次の代数方程式(2・10)の解をτの第 n 次の近似解という意味で上付き添字を導入し，$\tau^{(n)}$ と書くことにする．同じ意味で f の第 n 次の近似解を $f^{(n)}$ と表わすと，(2・10) の根 $\tau^{(n)}$ は $f^{(n)}$ と z の関数として表わされる。すると (1.4)式から，

$$\frac{df^{(n)}}{dz} = (\tau^{(n)}+1)\frac{f^{(n)}-a_0}{z} \qquad (2.11)$$

(2・11)式の $\tau^{(n)}$ は (2.10) の根であることに注意すれば，(2.11)式は $f^{(n)}$ についての一般的には非線形の一階常微分方程式となり，この解は原則的に求めることが出来る．$f^{(n)}$ が求まれば，(1.4)式の　$\tau^{(n)} = \frac{z f'^{(n)}}{f^{(n)}-a_0} - 1$　から $\tau^{(n)}$ が求まり，その振舞いから(2.4)式の収束範囲が決定出来る。この展開法の近似手順は次の様にまとめることが出来よう．

第１ステップ：(2.10)式の様に $j(f)$ を n 項まで展開する．

第２ステップ：代数方程式(2・10) の根 $\tau^{(n)}$ を $f^{(n)}$，その関数として求める。この時一般には n 位の根が求まるが物理的根拠により一つ手前の近似 $\tau^{(n-1)}$ に最も近いものだけを選び，他の $(n-1)$ 位の根は捨てる。

第３ステップ：一階の常微分方程式 (2・11) を解いて $f^{(n)}$ を求め，$\tau^{(n)}$ をその関数として求める．これにより(2・10)の展開の有効範囲が求まる．

この３つのステップを $n=0$ から始め，$f^{(n)}$ が充分収束す

る所までこの手順を繰返えせばよい。これが收束することは定理1により保障されている。

こゝで第0次近似 $f^{(0)}$ を考えてみよう。$f^{(0)}$ については次のレンマ1が成り立つことを示そう。

レンマ1. 第0近似 $f^{(0)}$ は $z\ll1$, $z\gg1$ の2領域で(1.1)の最初の二項($=a_0+a_1z$)と(1.2)で表わされる漸近関係を満す。さらにもし f 自体が一次関数

$$f=\frac{Az+B}{Cz+D} \qquad (2.12)$$

で表わされる関数であれば、$f^{(0)}$ が厳密解を与える。ただし $C\neq0$, $AD-CB\neq0$ とする。

証明. 定理1から $B_0=j(f(0))=\dfrac{a_0-c_\infty}{a_1}$ であるので

$$\frac{(f^{(0)}-c_\infty)z}{f^{(0)}-a_0}=\frac{a_0-c_\infty}{a_1}$$

$$\therefore\quad f^{(0)}=\frac{c_\infty z-\dfrac{a_0(a_0-c_\infty)}{a_1}}{z-\dfrac{a_0-c_\infty}{a_1}} \qquad (2.13)$$

いま(2.12)を $z\ll1$ と $z\gg1$ の展開を行うと $f^{(0)}$ は(1.1)の最初の二項と(1.2)の関係を満すことが確認出来る。一方もし(2.12)が成り立てば、$a_0=\dfrac{B}{C}$, $a_1=\dfrac{AD-CB}{D^2}$, $c_\infty=\dfrac{A}{C}$ である。これらの値を(2.13)式に代入すれば $f^{(0)}\equiv f$. 証明終

$f^{(0)}$は、実は $z=0$ での $f^{(0)}(0)$, $f'^{(0)}(0)$ と $f^{(0)}(\infty)$ の三つの値を

用った一次の有理関数近似と一致することは容易に確認出来よう。ここから判ることは、本展開法では第0次近似で関数fの一次有理関数による二点間補間を行い、それからの"ずれ"を汎関数$j(f)$を展開して修正していることであろう。実際§3で示す様に最初の近似$f^{(0)}$が既に比較的よい近似になっている説明になっていよう。

これまで考えてきたのは$f(x)$が(1.1)で表わされる様な関数系であったが、ここでは適応関数をもっと一般的な関数系に拡張することを考えてみよう。

$$f(z)=a_0+a_1 z^M+a_2 z^{M(1+N)}+\cdots+a_n z^{M(1+(n-1)N)}+\cdots \qquad (2.14)$$

ここでMは任意の正の定数、Nは任意の正の整数とし、$a_1 \neq 0$とする。$M=N=1$の場合が(1.1)の展開にあたる。ここで式(1.3)、(1.4)の$j(f)$とτの定義を次の様に拡張しよう。

$$j(f(z))=\frac{[(f-a_0)^N-(c_\infty-a_0)^N]\,z^M}{f-a_0} \qquad (2.15)$$

$$\tau(z)=\frac{zf'}{f-a_0}-M \qquad (2.16)$$

定理1で、f, $j(f)$, τの定義を(2.14), (2.15), (2.16)の如く再定義し、$\zeta=z^{MN}$とおけば、定理1はζ平面上でそのまま成り立つことを注意しておこう。またNの値によっては、$j(f)$はfについて一次でなくN次の非線形有理関数になることを注意されたい。

また、τの定義で必要なのは擬単数性をもつことであ、

だが，もし(1.1)の $a_0 \neq 0$ の場合には

$$\tau^* = \frac{z f'}{f} \tag{2.17}$$

とおいてもその性格を保持していることに注意されたい。これは，定理1が $j(f)$，τ^* についても成立することを示唆している。また $j(f)$ が f について一次関数であることに注意すれば，定理1，レンマ1は $j(f)$ の逆数についても成り立つことは容易に想像されよう。

$$j^*(f) = j^{-1}(f) = \frac{f - a_0}{(f - c_\infty) z} \tag{2.18}$$

このように定理1，レンマ1は，f，$j(f)$，τ は勿論 $j \to j^*$ を $\to \tau^*$ に変えたそれぞれの組合せでも成り立つ。§3で示す様々問題によってはその代わりに τ^* を，j の代わりに j^* を用いた場合があるが，それは最初の数項を考えた時より収束性が早い組合せを選んだ結果である。

§3. 数値例

最初の4例はBaker(1974)から，最後の例題は粘性流の厳密解Blasius解から選んだ。この5題とも我々は関数の正の実軸上 $(0 \leq x < \infty)$ での値のみに興味をもっている場合を取扱うことにする。

例題1. $f(x) = 1 - e^{-x}$ $\quad 0 \leqq x < \infty$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \cdots \qquad (3.1)$$

$$f(x) \sim 1 + o(1) \qquad x \to \infty$$

式(1.3), (1.4)により, τ $j(f)$ とτを定義すると

$$\tau = \frac{xf'}{f} - 1 = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \cdots \qquad (3.2)$$

$$j(f) = \frac{(f-1)x}{f} = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \cdots \qquad (3.3)$$

ついで(3.2)式の逆変換 $x = -2\tau + \frac{2}{3}\tau^2 + \cdots$ を(3.3)に代入すれば,

$$j(f) = -1 + \tau \qquad (3.4)$$

(3.4)式は $j(f)$ をτで展開するとこの級数は最初の二項で終結するという驚くべき結果を示している。§2の手順で順次 $f^{(0)}, f^{(1)}, \tau^{(0)}, \tau^{(1)}$ を求めて行くと,

$$\frac{(f^{(0)}-1)x}{f^{(0)}} = -1 \qquad \therefore\ f^{(0)} = \frac{x}{1+x}, \quad \tau^{(0)} = \frac{-x}{1+x} \qquad (3.5)$$

$$\frac{(f^{(1)}-1)x}{f^{(1)}} = -1 + \left(1 - \frac{xf^{(1)\prime}}{f^{(1)}}\right) \quad \therefore\ f^{(1)} = 1 - e^{-x}, \quad \tau^{(1)} = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} - 1 \qquad (3.6)$$

(3.6)の $f^{(1)}$ を解くときに $f^{(1)}(0) = 0$ という初期条件を用いている。$\tau^{(0)}, \tau^{(1)}$ を吟味してみれば $|\tau^{(0)}|, |\tau^{(1)}|$ とも $0 \leqq x < \infty$ で単調増加しているので正の実軸上で上の展開が成り立つことは容易にわかる。$\tau^{(1)}$ に限っていえば, $-\infty < x < \infty$ で $|\tau^{(1)}|$ は増加しており $f^{(1)}$ は実軸上全域で成り立っていることも分判ろう。

例題2. $f(x)=(1-e^{-x})/x \qquad 0\leqq x<\infty$

$$f(x)=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{n-1}+\cdots \tag{3.7}$$

$$f(x)\sim 0+o(1/x) \qquad x\to\infty$$

例題1と同様に(1.3), (1.4)式の$j(f)$, τの定義式を用いれば

$$\tau=\frac{xf'}{f-1}-1 \quad , \quad j(f)=\frac{fx}{f-1} \tag{3.8}$$

$$j(f)=2-\tau \tag{3.9}$$

例題2の場合も$j(f)$の級数は2項で終結してしまう。これから$f^{(0)}$, $f^{(1)}$を解くと

$$f^{(0)}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \quad , \quad \tau^{(0)}=-\frac{x}{2+x} \quad , \tag{3.10}$$

$$\frac{df^{(1)}}{dx}=-\frac{1+x}{x}f^{(1)}+\frac{1}{x} \quad , \quad f^{(1)}=(1-e^{-x})/x, \quad \tau^{(1)}=\frac{x(e^{-x}-1)}{1-x-e^{-x}}-2. \tag{3.11}$$

この例も例題1と同じく$0\leqq x<\infty$の正の実軸上で成りたつが, $f^{(1)}$は全軸上で成立している。

例題3. $f(x)=\left\{[(1+x+x^2)(1+x)]^{1/3}-1\right\}/x \qquad 0\leqq x<\infty$

$$f(x)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}x-\frac{5}{81}x^2-\frac{2^4}{3^5}x^3+\cdots \tag{3.12}$$

$$f(x)\sim 1+o(1) \qquad x\to\infty$$

この関数には, 分岐点が$x=-1, -\frac{1}{2}(1\pm 3i)$に零点が$-1\pm i$にあり前2題に較べて複雑である。この例では, τの代わりに(2.17)式のτ^*を選ぶと

$$\tau^*=\frac{xf'}{f} \quad , \quad j(f)=\frac{(f-1)x}{f-\frac{2}{3}} .$$

$$j(f)=-\frac{2}{3}+\frac{7}{4}\tau^*-\frac{3}{8}\tau^{*2}+\cdots \tag{3.13}$$

(3.13) を順次解くと

$$f^{(0)}=\frac{1+x}{\frac{3}{2}+x},\quad \tau^{(0)}=\frac{x}{2(x+\frac{2}{3})(x+1)},\quad \tau'^{(0)}=\frac{1-x^2}{2(1+x)^2(\frac{3}{2}+x)} \qquad (3.14)$$

$$\frac{df^{(1)}}{dx}=\frac{4f^{(1)}}{7x}\,\frac{(3f^{(1)}-2+2x(f^{(1)}-1))}{f^{(1)}-\frac{2}{3}}$$

$$\vdots$$

この場合は $j(f)$ を (1.4) の τ で展開してもそうであるが τ' で展開しても無限級数となる例である。ただ，τ' の方が τ より収束速度が速いことが解っている。こゝで注意すべきことは，これまでの例と異り，$\tau'^{(0)}$ は (2.4) の条件を $0\leqq x\leqq 1$ と $1\leqq x<\infty$ の二つの隣接した領域でしか満足していないことである。これは $\tau^{(0)}$ が $x=1$ で最大値をとることからも判ろう。$f^{(1)}$ は Runge-Kutta 法で数値積分し，$\tau'^{(1)}$ の値とともに表1に示してある。$\tau'^{(0)}$, $\tau'^{(1)}$ とも全く同じ傾向を示している。しかしこの例題では，$x=0$, $x\to\infty$ で $\tau'\to 0$ でしかもその点では関数 f の値は厳密でしかも正則であるから，(3.13) の展開は $0\leqq x\leqq 1$ と $1\leqq x<\infty$ の二つの領域で個別に成り立つ。しかも $x=1$ は両側の領域に共通であることに注意すれば，(3.13) の展開は実は $0\leqq x<\infty$ の全領域で成り立つと考えてよいことを注意しておこう。なお表1には，同じ関数を (3.12) の最初の三項による Taylor 展開による近似と，この三項を使った [1/1] Pade 展開の結果も併記してあるが，現在の方法が大変すぐれていること

は明らかであろう。実際$f^{(0)}$が既に可成りよい近似を与えていることは注目に値いしよう。

例題4. $f(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$

$$f(x)\sim 1-x+2!x^2-3!x^3+\cdots \qquad (3.15)$$

$$f(x)\sim 0+o(1/x) \qquad x\to\infty$$

これまでの例と違って(3.15)とみても判る様にこの関数は発散してしまい，$x=0$で解析関数ではない。ただBaker(1974)が示すようにこれはStieltjes関数と呼ばれ，$[n/n]$の如き対角Padé近似で求めると放物定理(Parabolic Theorem)により収束することが判っている。この例は厳密には定理1の解析関数の範囲内では取り扱えない場合であるが，最近Henrici(1964)によりLagrange-Bürmannの定理は非解析関数にも拡張出来ることが示されている。定理1をそのまゝこの関数に使ってみよう。今(2.17),(2.18)式で定義したτ^*, j^*を選ぶと $\tau^*=\frac{xf'}{f}$, $j^*=\frac{(f-1)}{fx}$ で

$$j^*(f)=1+\tau^* \qquad (3.16)$$

j^*の級数はτ^*で展開するともたま二項で終結してしまう。

$$f^{(0)}=\frac{1}{1+x}, \quad \tau^{(0)}=-\frac{x}{1+x}$$

$$\frac{df^{(1)}}{dx}=-\frac{1+x}{x^2}f^{(1)}+\frac{1}{x^2} \quad \therefore f^{(1)}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}E_i(1/x) \qquad (3.17)$$

ただしE_iは積分指数関数で

$$E_i(x)=\int_0^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

E_i の漸近公式から

$$f^{(1)} \sim 1 - x + 2!\,x^2 + \cdots \qquad x \ll 1$$

$$\sim \frac{1}{x}\left[\log x - \gamma + \cdots\right] \qquad x \gg 1$$

この例で $\tau, j(f)$ を選んでもよいがその場合は無限級数になり，この場合の様に二項では終結しない。

例題5. Blasius関数.

半無限平板を過ぎる境界層の厳密解はBlasiusが最初に与えた。今流れ関数をFとすると，Fは次の方程式の解として与えられる.

$$F''' + FF'' = 0 \qquad F(0) = F'(0) = 0 \qquad (3.18)$$
$$F'(\infty) \to 1$$

(3.18)はもし $f = F'$ とおくと次の様な収束する級数解をもつことが知られている(Rosenhead 1964)。

$$f(x) = \alpha_1 x - \alpha_1^2 x^4/4! + 11\alpha_1^3 x^7/7! + \cdots \qquad (3.19)$$

$$f(x) \sim 1 - \frac{0.331}{x} e^{-\frac{1}{2}(x-1.22)^2} \qquad x \to \infty$$

ただし $\alpha_1 = 0.4696$.

(3.19)の級数は(2.14)で $M=1$, $N=3$ の時に対応しており，(2.15)，(2.16)により τ と $j(f)$ を

$$\tau = \frac{xf'}{f} - 1, \qquad j(f) = \frac{(f^3 - 1)\,x}{f} \qquad (3.20)$$

と定義する。$j(f)$ を τ について展開すると

$$j(f) = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \cdots \tag{3.22}$$

ここに $A_0 = -1/\alpha_0$, $A_1 = -8\alpha_1 + 1/3\alpha_1$, $A_2 = -\left(\frac{17\times6}{7!}\alpha_1 + \frac{11}{7!\alpha_1}\right)\delta_1^2 \cdots$

$$f^{(0)3} + f^{(0)}/\alpha_1 x - 1 = 0$$

$$\frac{df^{(1)}}{dx} = \left(1-\frac{1}{A_1}\right)\frac{f^{(1)}}{x} + \frac{\alpha_1}{A_1}\left(f^{(1)3}-1\right)$$

$$\frac{df^{(2)}}{dx} = \frac{f^{(2)}}{x}\left[\frac{1}{2A_2}\left\{-A_1+\sqrt{A_1^2+4A_2\left(\frac{1-f^{(2)3}}{f}\alpha_1 x - A_0\right)}\right\}+1\right] \tag{3.23}$$

$$\vdots$$

(3.23)式の$f^{(0)}$はNewton法で，$f^{(1)}, f^{(2)}$はRunge-Kutta法で数値積分した。Runge-Kuttaの場合はステップを0.01としてミニコンMELCOM 70で計算した結果を表1に示してある。(3.18)の厳密解と較べて$f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}$の収束が全領域$0 \leqq x < \infty$にわたって素晴らしく良い。実際$f^{(2)}$では，最大相対誤差は全領域にわたって0.1%以下である。殊に(3.23)を$x \to \infty$として解くと判る様に$f^{(2)} \sim 1-4e^{-3\alpha_1 x}$と指数関数的に1に近づいていることが注目に値する。例題3の場合と同様に参考のため3項を使ったTaylor展開，[1/1]のPade展開の結果も併記した。本法の結果が抜群に良いことが判ろう。

§4. おわりに

§3で5つの異ったタイプの関数について本級数展開法

による数値計算を行ってみたが，解析関数のみでなく発散級数も含めて非常に収束性のよい解を与えることが判った。この様な収束性のよい解が得られる要因は２つあると思われる。ひとつは，近似する関数 f 自体を直接展開するのではなくて展開する関数系としては f について一般的にはN次有理型関数形式とした汎関数 $j(f)$ ((1.3)及び(2.15)式参照)を選んだことと，もう一つは非線形変換(1.4)式により変数 t を導入したことであろう。f, $j(f)$, t が考えている領域内で正則である場合の級数の収束は古典的なLagrange-Bürmannの定理で証明出来る。その収束範囲は決まって $|t|$ 又は $|t^*|$ が単調増加している領域に限定される。またこの定理は行列理論を使って全く代数的な方法で非解析関数に拡張出来ることが示されている。このため発散級数でも扱えることは注目すべきことであろう。

本展開法の第０次近似 $f^{(0)}$ は実質的には $x=0,\infty$ の二点間の一次有理関数による補間を行っていることに相当する。すなわち $f^{(0)}(0)$, $f'^{(0)}(0)$, $f^{(0)}(\infty)$ の三つの情報を使って三個の未知数を定めているわけである。§3の結果をみても判る様に $f^{(0)}$ が既に相当に良い近似を与えているのはこのためである。ただこの方法を有効に使うには $x=\infty$ での関数の振舞いすなわち c_∞ が事前に判っていることが必要である。未知関数の $f(\infty)$ の値を使うということは一見不自然にみえるが，物理的

題と考えるときこの値は境界条件等から既知の場合が多い。例えば例題5等はその典型的な例で，他の問題でも既知の場合が非常に多いということを付け加えておこう．また§3の例題からも判る様に $x \to \infty$ での振舞いが指数函数的である方が収束性はよいようである。これは変数tの選び方とも関係してくるが詳しくは別の論文で検討したい。またこの方法は $j(f)$ が f についての分数形式をしていること，函数fの極，零点ともに変数tに近似されていく点など Padé 展開と密接な関係をもっていることも想定されるがこれらの点は今後の課題としたい。この方法が最も威力を発揮するのは複雑な混合型非線形境界値問題に応用したときと思うが，副射を伴う熱伝導の問題，流れの場の中での触媒反応の問題に応用した計算結果は別の論文で報告したい。

今井功教授，橋本英典教授，増田秀行教授には色々御指導頂いたのでここに謝意を表したい。

Table 1

Ex. 4 $f = \{ [(1 + x + x^2)(1 + x)]^{1/3} - 1\}/x$

x	3 term Taylor Ser.	Pade [1/1]	$f^{(0)}$	$f^{(1)}$	$\tau^{(1)}$	Exact
.2	.7086	.7088	.7059	.7082	.0540	.7083
.6	.7778	.7810	.7619	.7701	.0952	.7729
1.0	.8272	.8406	.8000	.8101	.100	.8171
2.0	.8642	.9524	.8571	.8660	.089	.8795
3.0	.7778	1.030	.8889	.8957	.0767	.9108
4.0	.5679	1.088	.9091	.9143	.0666	.9294
5.0	.2346	1.132	.9231	.9272	.058	.9417

Ex. 5 Blasius function

x	3 term Taylor Ser.	Pade (0) [1/1]	$f^{(0)}$	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$\tau^{(2)}$	Exact
.2	.0939	.0939	.0938	.0939	.0939	.00049	.0939
.6	.2806	.2806	.2758	.2806	.2806	.0126	.2806
1.0	.4606	.4606	.4318	.4607	.4606	.0570	.4606
2.0	.8211	.8163	.6641	.8211	.8166	.3745	.8167
3.0	1.1588	.9616	.7688	1.000	.9684	.7918	.9690
4.0	3.2293	.9646	.8247	1.055	.9976	.9678	.9978
5.0	14.2633	.9386	.8591	1.013	1.0006	.9971	.9999

References:

Baker, G.A. 1974 "Essentials of Pade Approximants", Accademic Press

Henrici, P. 1964 "An Algebraic Proof of the Lagrange-Bürman Formula" Jour. of Math. Anal and Appl. vol. 8, p 218.

Henrici, P. 1974 "Applied and Computational Complex Analysis" vol. 1, John & Wiley & Sons Co.

Moore, F.K. 1951 "Unsteady Laminar Boundary-Layer Flow" NACA TN 2471

Rosenhead, S, 1964 "Laminar Boundary Layers" Oxford University Press

Tokuda, N. 1966 "The Dynamics of Moving Bubbles in Single- and Binary Component System" Ph. D Thesis, University of Michigan

Tokuda, N. & W. J. Yang 1968 "Unsteady Stagnation Point Heat Transfer" Proc. 3rd Int. Heat Transf. Conf. vol. 2, p. 223

Tokuda, N. et al 1970 "Dynamics of Vaper Bubble in Binary Liquid Mixtures with Translatory Motion" Proc. 4th Int. Heat Transf. Conf.; vol. 5

Van Dyke, M.D. 1974 "Analysis and Improvement of Perturbation Series" Quart. J. Mech. App. Math, vol. 27, p. 423